Cálculo Diferencial e Integral I
Departamento de Matemáticas, ITAM
Examen Final Departamental
Otoño 2015

F

Nombre y cu: ____________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total

JUSTIFICA CON DETALLE TUS RESPUESTAS
LEE CON CUIDADO LOS ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS
NO se permiten libros, apuntes, calculadoras, celulares o tabletas
Usa el reverso de cada hoja si es necesario
Tiempo: 2:30 horas

1. [1 pto.] Encuentra, si las hay, las asíntotas horizontales y verticales de la función $h(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$. Si no hay, dí porqué.

2. [1 pto.] Si una función g satisface, para toda $x \neq 0$ en el intervalo $(-1, 1)$, que

$$|g(x) - 3| \leq \left| \frac{1 - \cos(x)}{x} \right|.$$

¿Se puede decir algo sobre la existencia y el valor del $\lim_{x \to 0} g(x)$? Explica.

3. [1 pto.] Mora quiere demostrar con la definición $\varepsilon - \delta$ que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ para cierta función f. Después de analizar el problema, Mora descubre que para toda x en el intervalo $(1/2, 3/2)$ se cumple que

$$|f(x) - 2| \leq \frac{2|x-1|}{x^2}.$$

Dada $\varepsilon > 0$ encuentra una $\delta > 0$ que pueda proponer Mora para completar su demostración.

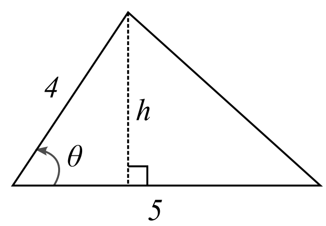
4. [1 pto.] Calcula $f'(0)$ si f es una función tal que

$$1 + f(x) + x^2(f(x))^3 = 11 \quad \text{y} \quad f(1) = 2.$$

5. [1 pto.] Se sabe que la función $g(x) = x^2 - 2x + \cos(x)$ tiene un mínimo local en el intervalo $[0, \pi/2]$. Usa el teorema de Bolzano para justificar que g tiene efectivamente un punto crítico en el intervalo dado. Asegúrate de argumentar que el teorema de Bolzano se puede usar y también de argumentar que el punto crítico, cuya existencia se verificó, corresponde a un mínimo local de g.

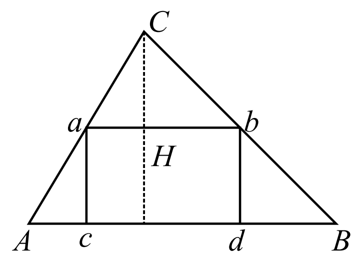
6. [1 pto.] Encuentra, por aproximación lineal o diferenciales, un valor aproximado de $f(0.01)$ si $f(x) = \sqrt{x+1} + \operatorname{sen}(x)$.

7. [1 pto.] Dos lados de un triángulo miden 4cm y 5cm como se indica en la figura. El ángulo, θ, entre estos lados crece a razón de 0.06 radianes por segundo. Calcula la rapidez con la que aumenta el área del triángulo cuando el ángulo entre los lados dados mide $\pi/3$ radianes. Reporta tu respuesta con una frase completa.[1]



[1] $\text{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ y $\cos(\pi/3) = 1/2$.

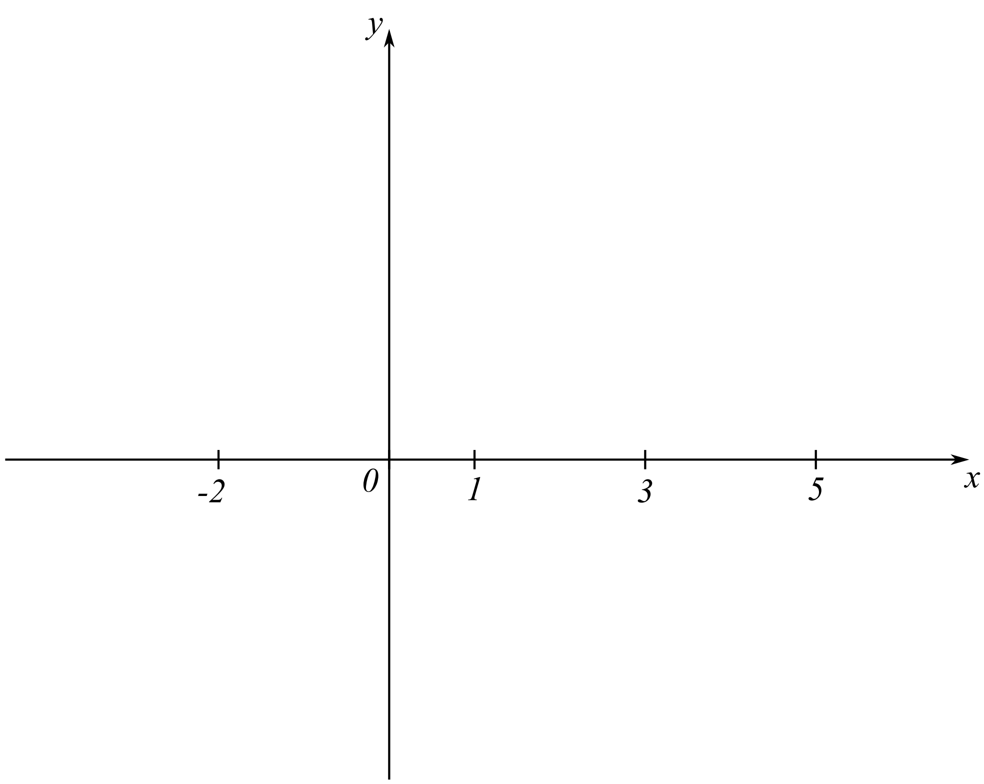
8. [1 pto.] Considera el triángulo ABC como en la figura. Supón que la altura con respecto al lado AB mide H unidades. ¿A qué altura, con respecto a H, debe colocarse un segmento ab, paralelo al lado AB, y con a en el lado AC y b en el lado BC, para que el área del rectángulo $abcd$ sea máxima? Reporta tu respuesta con una frase completa.



9. [1 pto.] Supón que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función para la cual su derivada y su segunda derivada *existen* en todo punto. Además, la derivada y la segunda derivada de f tienen signos, en los intervalos indicados, según la siguiente tabla:

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, 3)$	$(3, 5)$	$(5, \infty)$
signo de f'	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
signo de f''	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$

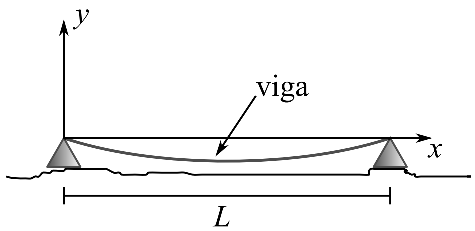
Dibuja una posible gráfica de f. Si los hay, indica los extremos locales y los puntos de inflexión.



10. [1 pto.] Los extremos de una viga de longitud L están sobre dos soportes como se muestra en la figura. Con una carga uniforme sobre la viga esta se flexiona en una curva dada por una función, $y = f(x)$, que satisface

$$f''(x) = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2,$$

donde q y L son constantes. Encuentra $y = f(x)$ si se sabe que $f(0) = 0$ y $f'(L/2) = 0$.



Hoja extra