Segunda Serie

1. Pruebe: $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por: $f(a,b) = 2^{a-1}(2b-1)$ es biyectiva (Por convención $2^0 = 1$).

2. Defina $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ como sigue:
$$f(r) = \begin{cases} 2^p 3^q & si\ r = \dfrac{p}{q} \quad con\ (p,q) = 1 \quad (p\ \in \mathbb{Z}^+,\ q \in \mathbb{N}) \\ 1 & si\ r = 0 \\ 2^{-p}3^q + 1 & si\ r = \dfrac{p}{q} \quad con\ (p,q) = 1 \quad (p\ \in \mathbb{Z}^-,\ q \in \mathbb{N}) \end{cases}.$$
Pruebe que f es inyectiva. Concluya que $\mathbb{Q}$ es numerable.

3. Sean E un conjunto y $B \subset E$ un subconjunto numerable. Pruebe: Si $E \setminus B$ es infinito, entonces $E \sim E \setminus B$.
(Sugerencia: Sea $A \subset E \setminus B$ numerable. Si $A = \{a_1, a_2, ...\}$ y $B = \{b_1, b_2, ...\}$ son enumeraciones, defina $h : E \to E \setminus B$ poniendo:
$h(x) = \begin{cases} a_{2i} & si \quad x = a_1 \\ x & si \quad x \notin A \cup B \\ a_{2i-1} & si \quad x = b_i \end{cases}$. Concluya que $(0,1) \sim (0,1) \setminus \mathbb{Q}$.

4. Pruebe: $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (Sugerencia: Use el anterior)

5. Sean $B_0, B_1, ..., B_n$ conjuntos dados. Suponga que existen funciones inyectivas $\varphi_0 : B_0 \to B_1, \varphi_1 : B_1 \to B_2, ..., \varphi_{n-1} : B_{n-1} \to B_n$ y $\varphi_n : B_n \to B_0$. Pruebe: $B_0 \sim B_1 \sim ... \sim B_n$. (Generalización del Teorema de Schröder-Bernstein)

6. Sea $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$ con $E_k \sim \mathbb{N} \times ... \times \mathbb{N}$ (k veces). Pruebe que $E \sim \mathbb{N}$. Concluya que $\mathbb{Q}[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n : a_0, ..., a_n \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$ es numerable.

7. Pruebe: El conjunto de números algebráicos de $\mathbb{R}$ es numerable.
(Sugerencia: Use el anterior.)

8. Denotemos: $\mathcal{A} = \{s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$
$\mathcal{B} = \{s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : s$ es estrictamente creciente$\}$
$\mathcal{C} = \{s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : s$ es biyectiva$\}$
$\mathcal{D} = \{s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : s$ es inyectiva$\}$

Pruebe: $\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \sim \mathcal{C} \sim \mathcal{D}$.
(Sugerencia: Claramente $\mathcal{B} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$. Por el ejercicio 5, es suficiente probar que existen $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ funciones inyectivas. Defina $t = \varphi(s)$ poniendo $t_1 = s_1$ y $t_n = s_1 + ... + s_n$ si $n \geq 2$. Defina $\psi = \rho \circ \varphi$ donde $\rho : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ se construye del siguiente modo: dada $s \in \mathcal{B}$ podemos escribir: $\mathbb{N} = \cup_{j=1}^{\infty} S_j$ (unión ajena) donde $S_1 = \{1, ..., s_1\}$ y $S_j = \{s_{j+1}, ..., s_{j+1}\}$ si $j > 1$. Denotamos por $\pi_j : S_j \to S_j$ las permutaciones cíclicas $\pi_1 = (1, ..., t_1)$ si $j = 1$ y $\pi_j = (s_j + 1, ..., s_{j+1})$ si $j > 1$. Defina $u = \rho(t) \in \mathcal{C}$ poniendo $u_n = \pi_j(n)$ si $n \in S_j$. Pruebe que ρ es inyectiva.)

9. Denotemos: $\mathcal{E} = \{E \subset \mathbb{N} : E \text{ es numerable}\}$ y
$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ $(= \{0,1\}^{\mathbb{N}})$
Pruebe que: $\mathcal{A} \sim \mathcal{E} \sim \mathcal{F}$.
(Sugerencia: Sea $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ como en el anterior, $\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ dada por: $\beta(s) = s(\mathbb{N})$, $\gamma : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ dada por: $\gamma(E) = \chi_E$ y $\delta : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$ dada por: $\delta(f)(j) = f(j) + 1$. Pruebe que cada una de las funciones es inyectiva y aplique el ejercicio 5.)

10. Pruebe: $\mathcal{F} \sim (0,1)$
(Sugerencia: Para cada $x \in (0,1)$ considere su expansión binaria
$x \overset{2}{=} 0.x_1x_2...$ sin "cola" de unos y defina $\psi : (0,1) \to \mathcal{F}$ poniendo: $\psi(x)(j) = x_j$, ahora defina $\mu : \mathcal{F} \to (0,1)$ inyectiva y aplique el teorema de Schröder-Bernstein)

11. Sea $\mathcal{G} = \{h : \mathbb{N} \to (0,1)\}$. Pruebe: $\mathcal{G} \sim (0,1)$.
(Sugerencia: Justifique las siguientes equivalencias: $\mathcal{G} \sim (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim (\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim (0,1)$)

12. Sea $\mathcal{S} = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}\}$ $(= \mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$, sea $\mathcal{S}_c = \{x \in \mathcal{S} : \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existe}\}$ y $\mathcal{S}_d = \{x \in \mathcal{S} : \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existe}\}$. Pruebe que $\mathcal{S}_c \sim \mathcal{S}_d \sim (0,1)$.
(Sugerencia: Cada número real en $(0,1)$ es el límite de una sucesión en $\mathcal{S}_c$ y cada sucesión en $\mathcal{S}_c$ es subsucesión de alguna sucesión de $\mathcal{S}_d$)

13. Sea $\mathcal{H} = \{E \subset (0,1) : E \text{ es no numerable}\}$. Pruebe que $\mathcal{H} \sim \mathcal{P}((0,1))$.

14. Escriba a $(0,1)$ como la unión no numerable de subconjuntos no numerables y ajenos entre sí.
(Sugerencia: Pruebe primero que $(0,1) \times (0,1) \sim (0,1)$)

15. Sea $E = \{x \in (0,1) :$ la expansión decimal de x no requiere de los dígitos 1,3,5,7 y 9$\}$. Pruebe: $E \sim (0,1)$.

16. Sea $p \geq 1$ y $B = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^p : ||\overline{x}|| < 1\}$. Pruebe que: $\mathbb{R}^p \sim B$. Determine la regla de φ^{-1}.
(Sugerencia: Pruebe que $\varphi : \mathbb{R}^p \to B$ dada por $\varphi(\overline{x}) = \dfrac{\overline{x}}{1 + ||\overline{x}||}$ es biyectiva.)

17. Sea $p \geq 2$ y $\overline{B} = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^p : ||\overline{x}|| \leq 1\}$
$B^{\infty} = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^p : \max_{1 \leq i \leq p} |x_i| \leq 1\}$. Pruebe que $\overline{B} \sim B^{\infty}$.
(Sugerencia: Defina $\varphi : \overline{B} \to B^{\infty}$ poniendo $\varphi(\overline{0}) = \overline{0}$ y $\varphi(\overline{x}) = \dfrac{||\overline{x}||\overline{x}}{||\overline{x}||_{\infty}}$ si $\overline{x} \neq \overline{0}$ donde $||\overline{x}||_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$. Pruebe que φ es biyectiva.)

18. Pruebe que no existe una función suprayectiva entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ($=\{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$). Concluya que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no pueden ser equivalentes.
(Sugerencia: Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ una función. Defina $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poniendo $h(x) = 1 + (\varphi(x))(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que h no pertenece a la imagen de φ.)

19. Sea $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$. Pruebe que $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$.
(Sugerencia: Toda función constante es continua y por otro lado, cualquier función continua queda totalmente determinada por sus valores sobre $\mathbb{Q}$.Para probar que $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{R}$ puede usar el ejercicio 11. Aplique el teorema de Schröder-Bernstein.)

20. Sea ζ un número irracional. Pruebe:

    a) $a + b\zeta$ es irracional si $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ y $b \in \mathbb{Q}$.
    b) El conjunto $\{\zeta, \zeta^2, \zeta^3, ...\}$ contiene una infinidad de irracionales.
    c) $(\zeta), (2\zeta), (3\zeta), ...$ son irracionales y distintos entre sí.
    (x) denota la parte fraccionaria de x, i.e. $(x) = x - [x]$.
    d) Si $\zeta > 2$, entonces: $\zeta_1 = \zeta$, $\zeta_2 = \sqrt{2 + \zeta}$ y en general $\zeta_{n+1} = \sqrt{2 + \zeta_n}$ $\quad n \geq 1$ son irracionales y distintos entre sí.

21. Pruebe:

    a) Si $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ entonces $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ es irracional.
    b) Sea $\zeta = \log_2(3)$ (i.e. $2^{\zeta} = 3$), entonces ζ es irracional (generalice) .

22. Sean $x < y$ números reales, entonces existe m par y $n \in \mathbb{N}$ tal que : $x < \dfrac{m}{7^n} < y$.

23. *a*) Sea $S \subseteq (0, \infty)$ con $\inf(S) = 0$ y sea $D = \{ns : n \in \mathbb{Z},\ s \in S\}$. Pruebe: D es denso en $\mathbb{R}$.
    b) Pruebe: $\{\sqrt{a} - \sqrt{b} : a, b \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

24. Sea ζ un número irracional dado. Pruebe $D = \{a + b\zeta : a, b \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$. (Sugerencia: Sea $S = (0, \infty) \cap D$ y use el anterior)

25. Pruebe que si $0 < x < y$ entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que: $x < 2^a 3^b < y$.
(Sugerencia: por el ej. 21. b) y el anterior, existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que: $\log_2(x) < a + b\zeta < \log_2(y)$)

26. Sea $S = \{\frac{1}{3^m} - \frac{1}{2^n} : m, n \in \mathbb{N}\}$. Calcule $\text{ínf}(S)$ y $\sup(S)$. Pruebe formalmente que lo son.

27. Pruebe $\sqrt{a} = \frac{1}{2}\,\text{ínf}_{r\in\mathbb{Q}^+}\{\frac{a}{r} + r\}$ para todo $a > 0$.

28. Sea C el conjunto clásico de Cantor. Pruebe que $D = \{mx : x \in C, m \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

29. Pruebe: $\frac{10}{13}, \frac{12}{13}$ y $\frac{31}{40} \in C$. (Nota: los tres números están escritos en base 10, expréselos en base 3)

30. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Pruebe: $\text{máx}\{|x-y|, |x+y|\} = |x| + |y|$.
(Sugerencia: $|a \pm b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0$ ($ab \leq 0$) respectivamente)

31. Sea (M, d) un espacio métrico, $x_0 \in M$ y $R > 0$ dados. Pruebe:

   a) Si $x \in B_{R/2}(x_0)$, entonces $x_0 \in B_{R/2}(x)$ y $B_{R/2}(x) \subseteq B_R(x_0)$.
   b) Si $x \neq x_0$, existe $r = r(x) > 0$ tal que $x_0 \notin B_r(x)$ y $B_r(x) \subseteq B_R(x_0)$.

32. Pruebe:

   a) Si A y $B \subseteq \mathbb{R}$ son abiertos, entonces $A \times B$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.
   b) Si $G\subseteq\mathbb{R}^2$ es abierto y $G_1 = \{x \in \mathbb{R} :$ existe y tal que $(x, y) \in G\}$ entonces G_1 es abierto en $\mathbb{R}$.
   c) ¿Son ciertos los incisos anteriores si ahora A, B y G son cerrados?

33. Sea (M, d) un espacio métrico, $x \in M$ y $S \subseteq M$ no vacío. Sea $d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}$. Pruebe:

   a) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$
   b) $\overline{A} = \cap_{n=1}^{\infty}\{x \in M : d(x, A) < \frac{1}{n}\}$. (Sugerencia: $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$)
   c) Concluya: si A es cerrado, entonces A es la intersección numerable de abiertos.

34. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^p$ un conjunto finito no vacío. Construya $E \subseteq \mathbb{R}^p$ tal que $E' = F$.

35. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $E' \neq \emptyset$. Pruebe: $D = \{nx : n \in \mathbb{Z},\ x \in E\}$ es denso en $\mathbb{R}$. Concluya que si E es no numerable, entonces D es denso en $\mathbb{R}$.

36. Sea $E \subset \mathbb{R}^p$ tal que E' (El conjunto de puntos de acumulación de E) es numerable, entonces E es numerable. Concluya que si $E \subset \mathbb{R}^p$ es no numerable, E' lo es también.
(Sugerencia: Pruebe que el conjunto de puntos aislados de E es a lo sumo numerable.)

37. Pruebe: Existen conjuntos cerrados A y B de $\mathbb{R}$ tales que $A+B$ no es cerrado.
(Sugerencia: Primer ejemplo: Sea $A=\mathbb{N}$ y $B=\{-n+\dfrac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$, entonces A y B son cerrados, pero $0\notin A+B$. Segundo ejemplo: Sea $A=\mathbb{Z}$ y $B=\{b\zeta : b\in\mathbb{Z}\}$ con ζ irracional, entonces A y B son cerrados y $A+B$ es denso en $\mathbb{R}$.)

38. Sea (M,d) un espacio métrico y $E\subseteq M$ dado. Pruebe:

   a) $(\partial(\partial(E))^{\mathrm{o}}=\emptyset$ i.e. el cerrado $\partial(\partial(E))$ es denso en ninguna parte (d.n.p.) .
   b) Inversamente, si $N\subseteq M$ es un cerrado d.n.p., entonces existe $E\subseteq M$ tal que $N=\partial(\partial(E))$.

39. Sean $a_1,...,a_m$ números positivos dados. Pruebe:

   a) $\text{lím}_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^m a_k^n\right)^{1/n}=\text{máx}_{1\le j\le m}\{a_k\}$ (Gauss).
   b) $\text{lím}_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{(1+a_1x)+...(1+a_mx)}-1}{x}=\dfrac{1}{m}\sum_{k=1}^m a_k$.

40. Sea $j\in\mathbb{N}$ fijo. Pruebe $\text{lím}_{n\to\infty}\dfrac{\binom{n}{j}}{(n+j)^j}=\dfrac{1}{j!}$.

41. Pruebe: $\text{lím}_{n\to\infty}(\sum_{j=1}^p(j)^{p/n})^n=p!\qquad(p\in\mathbb{N})$.
(Sugerencia: $\text{lím}_{h\to 0}\dfrac{t^h-1}{h}=\log(t),\quad t>0$)

42. Calcule:

   a) $\text{lím}_{n\to\infty} n\sin\left(\dfrac{a}{n}\right)\qquad a\in\mathbb{R}$.
   b) $\text{lím}_{n\to\infty}\sin(2\pi en!)$.
   c) $\text{lím}_{n\to\infty} n^j\sin(2\pi en!)$ $j=1,2$.

43. Pruebe en orden los siguientes incisos:

   a) Si $0\le a<b$, entonces: $\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}<(n+1)b^n$.
   (Sugerencia: el T.V.M.)
   b) $b^n[(n+1)a-nb]<a^{n+1}$.
   c) Sustituya $a=1+\dfrac{1}{n+1}$ y $b=1+\dfrac{1}{n}$ en el inciso anterior para mostrar que la sucesión $\left((1+\dfrac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente.

d) Sustituya $a = 1$ y $b = 1 + \dfrac{1}{2n}$ en b) para obtener: $(1 + \dfrac{1}{n})^n < 4$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

e) Concluya que $\text{lím}_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ existe.

44. Suponga que $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión tal que: $\text{lím}_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Pruebe que $\text{lím}_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$ existe.

45. Pruebe: $\text{lím}_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}} = \infty$.

(Sugerencia: Sea $M \in \mathbb{N}$ dada y $n = 2M + v$, $v \in \mathbb{N}$. Entonces $\dfrac{n!}{M^n} \geq \dfrac{(2M)!}{M^{2M}} \cdot 2^v$. Elija v de tal modo que la última expresión sea mayor que 1. Así pues, $n! \geq M^{\frac{1}{n}}$ o bien $(n!)^{\frac{1}{n}} \geq M$)

46. Sea $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión acotada y sea $L = \{l \in \mathbb{R} : \exists$ una subsucesión de x que converge a $l\}$. Pruebe:

a) Si $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ converge, entonces L se reduce a un punto.

b) $L \neq \emptyset$ (Sugerencia: Bolzano-Weierstrass)

c) $\underline{\text{lím}}_{n\to\infty} x_n \leq l \leq \overline{\text{lím}}_{n\to\infty} x_n \quad \forall\, l \in L$.

d) $\underline{\text{lím}}_{n\to\infty} x_n = \text{mín}\, L$, $\overline{\text{lím}}_{n\to\infty} x_n = \text{máx}\, L$.

47. Defina $x : \mathbb{N} \to [0, 1]$ poniendo $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = \dfrac{1}{2}$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$, $x_7 = \dfrac{1}{3}$, $x_8 = \dfrac{2}{3}$, $x_9 = 1$, $x_{10} = 0$, $x_{11} = \dfrac{1}{4}$, etc.

a) Halle la regla de x .

b) Determine L.
(Sugerencia: Ver el anterior.)

48. *a*) Sea $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que $x_{n+m} \leq x_n + x_m$. Pruebe que $\text{lím}_{n\to\infty}(\dfrac{x_n}{n})$ existe y es igual a $\text{ínf}_n\{\dfrac{x_n}{n}\}$. (El límite podría ser $-\infty$ si $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ no está acotada inferiormente.)
(Sugerencia: Sea $m \geq 1$ fijo y $j = m\ell + n$ con $0 \leq n < m$ y $\ell \in \mathbb{N}$, entonces:
$\dfrac{x_j}{j} \leq \dfrac{x_{m\ell}}{j} + \dfrac{x_n}{j} \leq \ell\dfrac{x_m}{j} + \dfrac{x_n}{j} = \dfrac{x_m}{m + n\ell} + \dfrac{x_n}{j}$. Si $j \to \infty$, entonces $\ell \to \infty$ por lo que: $\overline{\text{lím}}_{j\to\infty}(\dfrac{x_j}{j}) \leq \text{ínf}_m\{\dfrac{x_m}{m}\})$

b) Sea $(w_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tales que:// $w_{n+m} \leq w_n \cdot w_m$. Pruebe que $\text{lím}_{n\to\infty} w_n^{1/n}$ existe y es igual a $\text{ínf}_n\{w_n^{1/n}\}$ (el límite podría ser cero).
(Sugerencia: Sea $x_n = \log(w_n)$ y aplique el anterior.)

49. Pruebe: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge $\iff$ $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n) + \overline{\lim}_{n\to\infty}(y_n)$ para toda sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$. Análogamente con el límite inferior.
(Sugerencia: si $\overline{\lim}_{n\to\infty}(y_n)$ es finito, entonces es el mayor número real para el que existe una subsucesión de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a él.)

50. Sean $a < b$ en $\mathbb{R}$ y $\lambda \in (0,1)$ dados. Defina $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ como sigue: $x_1 = a,\ x_2 = b$ y $x_{n+2} = (1-\lambda)x_{n+1} + \lambda x_n$.

   a) Pruebe que $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy.
   (Sugerencia: Pruebe por inducción que $x_{n+2} - x_{n+1} = (-1)^n \lambda^n (b-a)$)

   b) Obtenga $\lim_{n\to\infty} x_n$ en términos de a, b y λ .
   (Sugerencia: $x_{n+2} = x_1 + \sum_{j=0}^{n}(x_{j+2} - x_{j+1})$)

51. Sea $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección y $x : \mathbb{N} \to M$ una sucesión. Pruebe:

   a) $x : \mathbb{N} \to M$ converge a l $\iff$ $x \circ \pi : \mathbb{N} \to M$ converge a l.

   b) $x : \mathbb{N} \to M$ es de Cauchy $\iff$ $x \circ \pi : \mathbb{N} \to M$ es de Cauchy.
   (Note que $x \circ \pi$ es una subsucesión de x sólo si π es la identidad.)

52. Sea $x_n = \sin(n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $D = \{m \sin(n) : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

53. A partir de la serie $e = \sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{1}{j!}$ pruebe que $e \notin \mathbb{Q}$.

   (Sugerencia: Pruebe primero que $n! \sum_{j=0}^{n} \dfrac{1}{j!} \in \mathbb{Z}$. Ahora suponga que $e \in \mathbb{Q}$.)

54. *a*) Determine los valores de a tales que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{a}{a+1})^n$ converge y obtenga el valor de la serie.

   b) Determine los valores de a para los que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a^n+1}$ converge.

   c) Determine la relación entre a y $b > 0$ de tal modo que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por: $x_n = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a(a+1)}{b(b+1)} + \ldots + \dfrac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)}$ converja.

55. Sea $k \in \{0, \ldots, 9\}$ dado y sea $A_k = \{n \in \mathbb{N} :$ el dígito k no aparece en la representación decimal de $n\}$. Pruebe: $\sum_{n\in A_k} \dfrac{1}{n} < \infty$.

56. Un número natural escrito en base 10 se llama <u>palíndromo</u> si tiene el mismo valor leído de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo: 52325. Sea $P = \{n \in \mathbb{N} : n$ es un palíndromo$\}$. Pruebe: $\sum_{n\in P} \dfrac{1}{n} < \infty$.
(Sugerencia: Cuente los palíndromos en {1,...,9},{10,...,99},{100,...,999},...)

57. Sea $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$ continua y no decreciente. Sea $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ continuamente diferenciable y tal que $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$. Suponga que existe $a>0$ tal que $f(g(x))g'(x)$ es no creciente en (a,∞). Pruebe: $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ converge $\iff$ $\sum_{j=1}^{\infty} f(g(j))g'(j)$ converge (N.V. Bugaev).
(Sugerencia: Use la prueba de la integral de Cauchy.)

58. Sea $J\subseteq(0,\infty)$ no vacío. Defina $\sum_{x\in J} x=\sup\{\sum_{x\in F} x : F\subseteq J, F \text{ finito}\}$. Pruebe:

    a) Si $\sum_{x\in J} x<\infty$, entonces J es finito o numerable.
    (Sugerencia: $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $E_n=\{x\in J : x\geq \dfrac{1}{n}\}$ es a lo sumo numerable.)

    b) Si J es numerable y $\varphi:\mathbb{N}\to J$ es una biyección, entonces $\sum_{x\in J} x=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ (sumabilidad conmutativa).

59. Hipótesis y notación como en el anterior. Si $S=\sum_{x\in J} x<\infty$, pruebe: $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, F_\varepsilon=F(\varepsilon)\subset J$ finito tal que $|S-\sum_{x\in G} x|<\varepsilon\ \forall\, G\supseteq F_\varepsilon$ con $G\subseteq J$ finito.

60. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función y $x_0\in(a,b)$ dado. Suponga que para todo $\delta>0$ existe $\varepsilon>0$ tal que si $|x-x_0|<\delta\quad(x\in(a,b))$ entonces $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. ¿Es f continua en x_0?

61. Sea $M=\{x,y,z\}$, $d=$métrica discreta y d' dada por: $d'(x,y)=d'(x,z)=2$, $d'(y,z)=1$ y $d(x,x)=d(y,y)=d(z,z)=0$. Pruebe:

    a) d' es métrica.

    b) d y d' son equivalentes.

    c) Si $f:M\to M$ está dada por: $f(x)=y$, $f(y)=z$ y $f(z)=z$, entonces f es d'-continua pero no es d-continua.

62. Sea $s:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estrictamente creciente. Defina $f_s:[0,1)\to[0,1)$ como sigue: $f_s(x)\overset{10}{=}0.x_{s_1}x_{s_2}...$ si $x\overset{10}{=}0.x_1x_2...$ (expansión decimal sin "cola" de nueves). Pruebe: f_s es continua en todo aquel $x\in[0,1)$ tal que $f_s(x)$ no tenga "cola" de nueves.

63. Sea $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que: $\varphi(a+h)+\varphi(a-h)=2\varphi(a)\quad\forall\, a,h\in\mathbb{R}$. Pruebe:

    a) Si $\psi(x)=\varphi(x)-\varphi(0)$ entonces ψ es aditiva.

    b) Si φ es continua en 0, entonces: $\varphi(x)=(\varphi(-1)-\varphi(0))x+\varphi(0)\quad\forall\, x\in\mathbb{R}$.

64. Pruebe: No existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua tal que $x\in\mathbb{Q}\iff f(x)\notin\mathbb{Q}$.
(Sugerencia: Si tal f existe, no podría ser constante en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ por continuidad. Suponga que $f(x)=q$, $f(y)=r$ con $q\neq r$, en $\mathbb{Q}$. Use que el intervalo con extremos x y y contiene una cantidad no numerable de números irracionales y el Teorema de Bolzano.)

65. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua con $f(0)=f(1)$ y sea $n\geq 2$. Pruebe que existe $x_0\in[0,\dfrac{n-1}{n}]$ tal que $f(x_0)=f(x_0+\dfrac{1}{n})$.
(Sugerencia: Sea $g(x)=f(x)-f(x+\dfrac{1}{n})$, pruebe que $g(0)+g(\dfrac{1}{n})+...+g(\dfrac{n-1}{n})=0$)

66. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y $x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$ dados. Pruebe que existe $x_0\in[a,b]$ tal qeu $f(x_0)=\dfrac{1}{n}(f(x_1)+...+f(x_n))$. Generalice a otros promedios.

67. Pruebe que la versión "topológica" del teorema de Schröder-Bernstein no se cumple, es decir: si existen $f:A\to B$ y $g:B\to A$ funciones inyectivas y continuas, entonces no se sigue que A y B sean homeomorfos..
(Sugerencia: $A=[0,1]$ y $B=\mathbb{R}$ con la métrica usual.)

68. Sea (M,d) un espacio métrico, $G\subset M$ abierto no vacío. defina $f:G\to\mathbb{R}$ poniendo $f(x)=\dfrac{1}{d(x,G^c)}$ y $d^*:G\times G\to\mathbb{R}$ dada por $d^*(x,y)=d(x,y)+|f(x)-f(y)|$. Pruebe:

    a) f es continua. (Sugerencia: $|d(x,A)-d(y,A)|\leq d(x,y)$)
    b) d^* es una métrica en G.
    c) d^* es equivalente a d restringida a G.

69. (La desigualdad de W. Young)
Sea $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ una función continua, estrictamente creciente con $\varphi(0)=0$. Sea $\Psi=\varphi^{-1}$ su inversa. Pruebe:

    a) Ψ es estrictamente creciente y continua también.
    b) Para cualesquiera $a,b\geq 0$ se tiene que: $ab\leq\int_0^a\varphi(s)ds+\int_0^b\Psi(t)dt$. La igualdad ocurre $\iff b=\varphi(a)$. Argumente geométricamente.
    c) Sean $p,q\in(1,\infty)$ exponentes conjugados, es decir $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Pruebe que $ab\leq\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$ $(a,b\geq 0)$. La igualdad ocurre $\iff a^p=b^q$ (Desigualdad de Hölder).

70. Pruebe: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua $\iff A=\{(x,y):y<f(x)\}$ y $B=\{(x,y):f(x)<y\}$ son abiertos en $\mathbb{R}^2$.

71. Pruebe: Si (M,d) es un espacio métrico completo y $(E_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión anidada de subconjuntos cerrados y acotados (rel. d) no vacíos tal que: $\lim_{n\to\infty}\text{diam}(E_n)=0$, entonces $\cap_{n=1}^\infty E_n$ consta de un punto exactamente (diam(E) denota el diámetro de un conjunto acotado y se define como $\sup\{d(x,y):x,y\in E\}$).

72. Sea M un conjunto numerable y $M = \{m_1, m_2, ...\}$ una enumeración. Defina $d : M \times M \to \mathbb{R}$ poniendo: $d(m_{n+p}, m_n) = d(m_n, m_{n+p}) = 1 + \dfrac{1}{n}$ $(n, p \in \mathbb{N})$ y $d(m_n, m_n) = 0$. Pruebe:

    a) d es una métrica.

    b) (M, d) sólo posee sucesiones de Cauchy que son finalmente constantes, por lo que es completo.

    c) $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{1+1/n}(m_n) = \emptyset$.

    (NOTA: Este ejercicio muestra que la condición de que los diámetros tiendan a cero en el ejercicio anterior es indispensable para que la intersección sea diferente del vacío.)

73. Sea (M, d) un espacio métrico. Decimos que $K \subseteq M$ es totalmente acotado si $\forall\ \varepsilon > 0$ existe un número finito de puntos $x_1, ...x_{N(\varepsilon)} \in K$ tales que $K \subseteq B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_{N(\varepsilon)})$. Pruebe que si K es totalmente acotado, entonces K es acotado. Pruebe con un ejemplo que el recíproco es falso. (NOTA: El conjunto $\{x_1, ..., x_{N(\varepsilon)}\}$ se llama una ε-red.)

74. Sea (M, d) un espacio métrico completo y $f : M \to M$ d-continua. Pruebe que M contiene un subconjunto d-compacto no vacío M_0 tal que $f(M_0) = M_0$.
    (Sugerencia: Sea $M_0 = \cap_{j=1}^{\infty} f^{(j)}(M)$, donde $f^{(j)}(M)$ significa $f(f(...f(M)...))$ j veces.)

75. (Teorema Min-Max de Weierstrass)
    Sea (M, d) un espacio métrico, $f : M \to \mathbb{R}$ continua y $K \subseteq M$ compacto por sucesiones. Pruebe:

    a) $f(K) = \{f(k) : k \in K\}$ es acotado.

    b) $\exists\ \ x^*$ y $x_* \in K$ tales que $f(x^*) = \sup\{f(x) : x \in K\}$ y $f(x_*) = \inf\{f(x) : x \in K\}$.

76. *a*) Sea $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ definida por $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Pruebe que f es contractiva y no tiene punto fijo a pesar de que $[1, \infty)$ es completo.

    b) Determine $[a, b]$ de tal modo que $f : [a, b] \to [a, b]$ dada por: $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$ sea una contracción.

77. (Teorema de Edelstein)
    Sea (M, d) un espacio métrico y $K \subseteq M$ compacto. Sea $T : K \to K$ tal que $d(Tx, Ty) < d(x, y) \quad \forall\ x \neq y \in K$. Pruebe: T tiene un único punto fijo.
    (Sugerencia: Defina $f : K \to \mathbb{R}$ poniendo: $f(x) = d(x, Tx)$. Pruebe que f es continua y que $\min\{f(x) : x \in K\} = 0$.)

78. Sea (M, d) un espacio métrico compacto y $T : M \to M$ tal que $d(Tx, Ty) = d(x, y)$ para cada $x, y \in M$. Pruebe que T es suprayectiva.
(Sugerencia: Sea $x_0 \in M \backslash T(M)$. Como $T(M)$ es compacto, $\varepsilon_0 = \text{mín}\{d(x_0, Tx) : x \in M\}$ es positivo. Concluya de la hipótesis que $(T^n x_0)_{n=1}^{\infty}$ en $T(M)$ no admite subsucesiones convergentes.)

79. Sea $p \geq 1$, $\overline{B} = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^p : ||\overline{x}|| \leq 1\}$ y $T : \overline{B} \to \overline{B}$ tal que $||T\overline{x} - T\overline{y}|| \leq ||\overline{x} - \overline{y}||$. Pruebe que T tiene al menos un punto fijo.
(Sugerencia: Considere $(1 - 1/k)T$)

80. Sea (M, d) un espacio métrico compacto y $T : M \to M$ una transformación expansiva (i.e. $d(Tx, Ty) \geq d(x, y) \quad \forall\, x, y \in M$). Pruebe que T es una isometría (i.e. $d(Tx, Ty) = d(x, y) \quad \forall\, x, y \in K$.)

81. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable. Suponga que existen constantes $0 < m < M$ tales que: $m \leq f'(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ y que $f(a) < 0 < f(b)$. Defina $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ como sigue: $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{M}$.
Pruebe:

   a) φ está bien definida, es creciente y es un contracción con constante $1 - \dfrac{m}{M}$.
   (Sugerencia: Se sigue del teorema del valor medio que $M(x - b) \leq f(x) \leq M(x - a)$)

   b) Si x_0 es el (único) punto fijo de φ, entonces x_0 es la única solución de la ecuación $f(x_0) = 0$.
   (Sugerencia: Pruebe que para cualquier $x_1 \in [a, b]$ fijo se tiene:
   $|x_{n+1} - x_0| \leq \dfrac{|f(x_1)|}{m}(1 - \dfrac{m}{M})^n$ donde $x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n \geq 1)$.)

82. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y tal que $f'(a) \neq 0$. Sea $\delta > 0$ tal que si $|x - a| \leq \delta$ entonces $|f'(x) - f'(a)| \leq \dfrac{1}{2}|f'(a)|$. Suponga que y es tal que $|y - f(a)| \leq \dfrac{\delta|f'(a)|}{2}$, entonces la función $\varphi : [a - \delta, a + \delta] \to [a - \delta, a + \delta]$ dada por:
$\varphi(x) = x - \dfrac{f(x) - y}{f'(a)}$ es una contracción y el punto fijo x_0 de φ es la única solución de la ecuación $f'(x) = y$.
(Sugerencia: Aplique el teorema del valor medio. De las hipótesis se sigue que $\dfrac{1}{2}$ es una constante de contracción. Para probar que $\varphi(x) \in [a-\delta, a+\delta]$, estime $|\varphi(x) - a| \leq |\varphi(x) - \varphi(a)| + |\varphi(a) - a|$)

83. Sea $F : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función ($F = F(x, y)$) tal que F es continua en x y diferenciable en y. Suponga que existen constantes $0 < m < M$ tales que $m \leq \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) \leq M$ para toda $(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$, entonces la ecuación $F(x, y) = 0$ tiene una y sólo una solución $y = f(x)$ que es continua en

$[a, b]$ (Un caso particular del teorema de la función implícita).
(Sugerencia: Sea $T : C_{\mathbb{R}}([a, b]) \to C_{\mathbb{R}}([a, b])$ dada por
$T(f)(x) = f(x) - \dfrac{1}{M}F(x, f(x))$. Pruebe que T es una contracción con respecto a la norma uniforme. Use el teorema del valor medio. El punto fijo es la solución.)

84. Sea (M, d) un espacio métrico, $K \subset M$ d-compacto, no vacío y $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ una cubierta d-abierta de K. Pruebe que existe $\lambda > 0$ tal que si x, $y \in K$ satisfacen $d(x, y) < \lambda$, entonces existe $G_\alpha \in \mathcal{G}$ tal que contiene ambos puntos (λ se llama un <u>número de Lebesgue</u> de la cubierta $\mathcal{G}$.).
(Sugerencia: Para cada $x \in K$ tal que $x \in G_\alpha$ elija $\delta(x) > 0$ tal que $B_{\delta(x)}(x) \subset G_\alpha$. Entonces $\{B_{\delta(x)}(x) : x \in K\}$ es una cubierta abierta de K. Sean $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ tales que $K \subset B_{\delta(x_1)}(x_1) \cup ... \cup B_{\delta(x_n)}(x_n)$ y sea $\lambda = \text{mín}\{\delta(x_1), ..., \delta(x_n)\}$.)

85. Sean $n \geq 1$, $\mathcal{G} = \{A \subset \mathbb{R}^p : A \text{ es abierto}\}$, $\mathcal{F} = \{C \subset \mathbb{R}^p : C \text{ es cerrado}\}$ y $\mathcal{K} = \{K \subset \mathbb{R}^p : K \text{ es compacto}\}$. Pruebe que: $\mathcal{G} \sim \mathcal{F} \sim \mathcal{K} \sim (0, 1)$, i.e. todos son equivalentes.
(Sugerencia: El complemento de cada abierto es cerrado y viceversa, por lo que la primera equvalencia es inmediata. Cada abierto es la unión a lo más numerable de miembros de la familia numerable que consiste de bolas de radio racional y centro en $\mathbb{Q}^p$.)

86. Sea (M, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{F} = \{F \subset M : F \text{ es no vacío, } d\text{-cerrado y } d\text{-acotado}\}$. Defina $\tau : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ poniendo $\tau(E, F) = \text{máx}\{h(E, F), h(F, E)\}$ donde $h(E, F) = \sup\{d(x, F) : x \in E\}$. Pruebe:

   a) τ es una métrica (LA MÉTRICA DE HAUSDORFF).
   b) $\tau(\{x\}, \{y\}) = d(x, y)$.
   c) $\tau(E, F) \leq \varepsilon \iff E \subset \{x \in M : d(x, F) < \varepsilon\}$ y $F \subset \{x \in M : d(x, F) < \varepsilon\}$.
   d) $\tau(E, F) \leq \varepsilon \iff F \subset \{x \in M : d(x, E) < \varepsilon\}$ y $B_\varepsilon(x) \cap F \neq \emptyset$ para toda $x \in E$.
   e) Si (M, d) es completo, $(\mathcal{F}, \tau)$ es completo.
   (Sugerencia: El ejercicio 71 de sucesiones y series es útil.)

87. Sea $M = (0, 1)$ y sean d y d' métricas en M dadas por:
$d(x, y) = \left| \dfrac{x}{1 + x} - \dfrac{x}{1 + y} \right|$ y $d'(x, y) = \text{mín}\{1, |x - y|\}$. Pruebe:

   a) d y d' son equivalentes.
   b) Si τ y τ' son las métricas de Hausdorff determinadas por d y d' respectivamente, entonces τ y τ' <u>no</u> son equivalentes.
   (Sugerencia: Sea $\mathcal{H} = \{F : F \subset \mathbb{N}, F \text{ finito}\}$. Entonces $\mathbb{N}$ pertenece a la τ-cerradura de $\mathcal{H}$ pero no así a la τ'-cerradura de $\mathcal{H}$. De hecho, verifique que $h'(\mathbb{N}, F) \geq 1$ para cada $F \in \mathcal{H}$.)

88. *a*) Si C_1 y C_2 son conexos (rel. d) y $\overline{C_1} \cap C_2 \neq \emptyset$, entonces $C_1 \cup C_2$ es conexo (rel. d).

    b) Sea $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio métrico con la siguiente propiedad: existe $\beta \in I$ tal que para todo $\alpha \in I$ se tiene que: $C_\alpha \cap \overline{C_\beta} \neq \emptyset$. Pruebe que $\cup_{\alpha \in I} C_\alpha$ es conexo (rel. d).

89. Sea (M, d) un espacio métrico. Pruebe:

    a) (M, d) es conexo $\iff$ $\partial(A) \neq \emptyset$ para todo $A \subset M$, con $A \neq M$ no vacío.

    b) Si además M no es acotado, entonces para cada $x_0 \in M$ y $r > 0$ se tiene que $\{x \in M : d(x, x_0) = r\} \neq \emptyset$.

90. Si $C \subset \mathbb{R}^p$ es conexo y contiene más de un punto, entonces C es no numerable.

91. Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos, $f : M \to M'$ continua. Pruebe: Si M es conexo (rel. d), entonces $\Gamma(f) = \{(\overline{x}, f(\overline{x})) : x \in M\}$ es $d \times d'$-conexo.

92. Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ numerable. Pruebe que $C = \mathbb{R}^2 \setminus B$ es conexo.
    (Sugerencia: Es suficiente probar que C es conectable por trayectorias. Sea $x \in C$ fijo y $y \in C$ arbitrario. A través del punto medio del segmento $\overline{xy}$ trácese otro segmento, digamos de longitud uno, que lo intersecte sólo en el punto medio. Como B es numerable, existe $z \in C$ en tal segmento y tal que $(\overline{xz}) \cup (\overline{zy}) \subset C$.)
    Generalice a $\mathbb{R}^p$, $p > 2$.

93. Sea $\mathcal{C} = \{C \subset \mathbb{R}^2 : C \text{ es conexo}\}$. Pruebe que $\mathcal{C} \sim \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.
    (Sugerencia: $\{B_1^2 \cup E : E \subset S^1\} \subset \mathcal{C}$.) Generalice para $p > 2$. ¿Cuál es el resultado correspondiente si $p = 1$?

94. Sea $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \geq 1/x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1/n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Pruebe:

    a) C_n es conexo y cerrado para cada n.

    b) $\cap_{n=1}^{\infty} C_n$ no es conexo.
    (Sugerencia: Dibuje.)

95. Sean $M = [0,1] \times [0,1] \setminus \{(x, 0) : 1/3 \leq x \leq 2/3\}$ y $A_n = \{(x, y) \in M : y \leq 1/n\}$. Pruebe que A_n es conexo en M, $A_n \supset A_{n+1}$ $(n = 1, ...)$ y $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ no es conexo.

96. Sea (M, d) un espacio métrico y $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión anidada de subconjuntos compactos, conexos (rel. d) y no vacíos; entonces $\cap_{n=1}^{\infty} C_n$ es compacto, conexo (rel. d) y no vacío. (Compare con los dos ejercicios anteriores.)

97. Pruebe: $S^p = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^p : ||\overline{x}|| = 1\}$ es conexo.
(Sugerencia: Sean $\overline{x}$, $\overline{y} \in S^p$ con $\overline{y} \neq -\overline{x}$. Defina $\varphi : [0,1] \to S^p$ poniendo: $\varphi(t) = \dfrac{(1-t)\overline{x} + t\overline{y}}{||(1-t)\overline{x} + t\overline{y}||}$.) Concluya que S^1 y S^p, $p > 1$ no son homeomorfos.

98. Sea $S^p = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^p : ||\overline{x}|| = 1\}$ y sea $f : S^p \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe: Existe $\overline{x_0} \in S^p$ tal que $f(\overline{x_0}) = f(-\overline{x_0})$.
(Sugerencia: Considere $\varphi : (\overline{x}) = f(\overline{x}) - f(-\overline{x})$ y use la conexidad de S^p.)

99. Pruebe que no existe una isometría suprayectiva entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ (métricas usuales).

100. Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos con (M', d') completo y $M_0 \subset M$, d-denso en M. Sea $f : M_0 \to M'$ uniformemente continua y $\overline{f} : M \to M'$ la extensión natural de f. Pruebe que $\overline{f}$ es uniformemente continua también.

101. Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos y $(f_n : M \to M')_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones que converge uniformemente a f en un subconjunto M_0 de M. Pruebe: Si cada f_n es uniformemente continua en M_0, entonces f es uniformemente continua en M_0 también.

102. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Suponga que la familia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por: $f_n(t) = f(nt)$ es equicontinua en $[-1, 1]$. Pruebe que f es constante.

103. Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos compactos y (M'', d'') métrico. Sea $F : M \times M' \to M''$ continua. Para cada $x \in M$ fija, definimos $F_x : M' \to M''$ dada por $F_x(y) = F(x, y)$. Pruebe que $\mathcal{F} = \{F_x : x \in M\}$ es acotada y uniformemente equicontinua.

104. Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos y D un subconjunto d-denso en M. Sea $(f_n : M \to M')_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas tal que converge en cada punto de D. Pruebe: Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente equicontinua, entonces $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en todo punto de M y la convergencia es uniforme en todo subconjunto d-compacto de M.

105. Sea $\mathcal{F} \subset C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ uniformemente equicontinua y $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ una sucesión. Sea $H = \{x \in [0, 1] : (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ converge}\}$. Pruebe que H es cerrado.

106. Sea $\mathcal{F} \subset C_{\mathbb{R}}([a, b])$ una familia uniformemente equicontinua y $x_0 \in [a, b]$ dado. Pruebe que si $V(x_0) = \{f(x_0) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado, entonces $\mathcal{F}$ está acotada.

107. Sea $\mathcal{F} \subset C_{\mathbb{R}}([a, b])$ dada y $x_0 \in [a, b]$ fijo y $V(x_0)$ como en el anterior. Sea $D = \{x_0 \in [a, b] : V(x_0) \text{ es acotado}\}$. Pruebe que D es abierto y cerrado en $[a, b]$. Concluya que si $\mathcal{F}$ es equicontinua y $D \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{F}$ está acotada.
(Sugerencia: $[a, b]$ es conexo.)

108. Generalice el anterior para espacios métricos (M,d), $K \subset M$ d-compacto y d-conectable por trayectorias.

109. Sea (M,d) un espacio métrico y $K \subset M$ d-compacto, no vacío. Sea $\mathcal{F} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ una familia acotada y uniformemente equicontinua. Pruebe que $\overline{\mathcal{F}}$ es también acotada y uniformemente equicontinua.

110. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua. Para cada $s \in [0,1]$ y $x \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ con $||x||_{[0,1]} \leq 1$, sea: $F_x(s) = \int_0^1 f(s,t,x(t))dt$. Defina $\varphi(x) = F_x$. Pruebe que $\varphi : C([0,1]) \to C_{\mathbb{R}}([0,1])$ lleva compactos en compactos (respecto a la norma uniforme).

111. Sea $I = [0,1]$ y $\mathcal{F} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(I) : |f(s) - f(t)| \leq |s-t|,\ s,t \in I\}$. Pruebe que $\mathcal{F}$ es $||\quad||_I$-compacto.

112. Sea $(f_n : [a,b] \to \mathbb{R})_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuamente diferenciables tal que $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a cierta función g y $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ converge para algún $x_0 \in [a,b]$. Pruebe que existe $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable tal que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f y $f' = g$ en $[a,b]$.
(Sugerencia: Escriba $f_n(x) = \int_{x_0}^{x} f'_n(t)dt + f_n(x_0)$ y sea $f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt + \lim_{n\to\infty} f_n(x_0))$
Enuncie el teorema correspondiente para series de funciones y pruébelo.

113. Sea $(f_n : [a,b] \to \mathbb{R})_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones diferenciables tal que $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ está uniformemente acotada en $[a,b]$ y tal que $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ converge para algún $x_0 \in [a,b]$. Pruebe que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ admite una subsucesión uniformemente convergente.

114. Sea $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones diferenciables tal que:

   a) $f_n(0) = 0$ para cada n.
   b) $|f'_n(x)| \leq e^{|x|}$ para cada n y cada x.

   Pruebe que la sucesión admite una subsucesión uniformemente convergente en cada intervalo acotado.

115. Para $f,\ g \in M = C_{\mathbb{R}}([0,1])$ defina: $d(f,g) = ||f-g||_{[0,1]}$ y $D(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$. Pruebe:

   a) d y D son métricas.
   b) Todo abierto relativo a D, es abierto relativo a d.
   c) No toda sucesión D-Cauchy es d-Cauchy.

116. Sea (M,d) un espacio métrico compacto y $f : M \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe: para cada $\varepsilon > 0$, existe $q : M \to \mathbb{R}$ Lipschitz continua (i.e. $|q(x) - q(y)| \leq Ad(x,y)\ x,y \in M,\ A > 0$ constante) tal que $||f - q||_M < \varepsilon$.
(Sugerencia: El teorema de Stone.)

117. Sean $f, g \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$ tales que $f(x) < g(x)$ para toda $x \in [a,b]$. Pruebe: existe $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $f(x) < p(x) < g(x)$ para toda $x \in [a,b]$.

118. Sea $f \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$ y $\varepsilon > 0$. Pruebe que existen $p, q \in \mathbb{R}[x]$ tales que $p(x) < f(x) < q(x)$ para toda $x \in [a,b]$ y tales que $||p - q||_{[a,b]} < \varepsilon$.

119. Sea $h \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$ dada. Pruebe que existe una sucesión $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}[x]$ tal que $p_n \leq p_{n+1}$ para cada n y p_n converge a h uniformemente en $[a,b]$.

120. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, entonces: $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)dx = f(0)$.
(Sugerencia: Aproxime uniformemente con polinomios.)

121. Pruebe los resultados correspondientes a los cuatro ejercicios anteriores para funciones $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son continuas y de período 2π y para sucesiones $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ de polinomios trigonométricos.

122. Pruebe los resultados análogos a los ejercicios 117,118 y 119 para funciones en $C_{\mathbb{R}}(K)$ con p y q en un álgebra de funciones que contiene constantes y separa los puntos de K (K subconjunto compacto no vacío de un espacio métrico.)

123. Sea $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}([a,b])$ un álgebra que contiene constantes y separa los puntos de $[a,b]$. Sea $V(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$ $f \in C[a,b]$, $x \in [a,b]$. Sea $D = \{V(f) : f \in \mathcal{A}\}$. Pruebe que D es $||\quad||_{[a,b]}$-denso en $\{g \in C_{\mathbb{R}}([a,b]) : g(a) = 0\}$.

124. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable. Pruebe que existe una sucesión de polinomios (p_n) tal que: $||f - p_n||_{[a,b]} + ||f' - p_n'||_{[a,b]} \to 0$ si $n \to \infty$.

125. Pruebe con un ejemplo en cada caso que la conclusión del teorema de Stone-Weierstrass falla para funciones de $C_{\mathbb{R}}(K)$ si una y sólo una de las hipótesis del teorema no se cumple; i.e. si K no es compacto ó el álgebra no separa puntos ó no contiene constantes ó la familia de aproximadores no constituye un álgebra, pero se satisfacen el resto de las hipótesis.

126. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $a_n \to \infty$ (o $a_n \to -\infty$) si $n \to \infty$. Suponga que: $\dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \cos(ja_n) \to 0$, $\dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \sin(ja_n) \to 0$ si $n \to \infty$ para cada $j \in \mathbb{N}$, entonces: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a_n) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$ para cada f continua y de período 2π.
(Sugerencia: La hipótesis implica que la conclusión se cumple si f es un polinomio trigonométrico. Ahora use el ejercicio 121 para polinomios trigonométricos.)

127. Sea α un número tal que $\dfrac{\alpha}{\pi}$ es irracional y sea $a_n = n\alpha$ ($n \in \mathbb{N}$). Pruebe que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ satisface la hipótesis del ejercicio anterior.

128. Sea $(a,b) \subset [0,2\pi]$ dado. Defina $\varphi : [0,2\pi] \to \{0,1\}$ como sigue: $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in (a,b) \\ 0 & si \quad x \notin (a,b) \end{cases}$, y extienda φ periodicamente a todo $\mathbb{R}$ con período 2π. Pruebe: si α es un número tal que $\dfrac{\alpha}{\pi}$ es irracional, entonces: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varphi(n\alpha) = \dfrac{b-a}{2\pi}$.
(Sugerencia: Considere primero el caso en el que $a \neq 0$ y $b \neq 2\pi$. Dada $\varepsilon > 0$ construya funciones continuas $f_j : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ tales que:

   i) $f_j(0) = f_j(2\pi) = 0 \qquad j = 1,2.$
   ii) $f_1(\theta) \leq \varphi(\theta) \leq f_2(\theta), \quad \theta \in [0,2\pi].$
   iii) $\left| \int_0^{2\pi} f_j(\theta) d\theta - (b-a) \right| < \varepsilon \qquad j = 1,2.$

   y use los dos ejercicios anteriores.)

129. Sea (M,d) un espacio métrico, $K \subseteq M$ compacto y $\mathcal{A} \subseteq C_{\mathbb{R}}(K)$ un álgebra de funciones. Suponga que $\mathcal{A}$ no se anula en K, i.e. para cada $x \in K$ existe $\mathcal{F} = f_x \in \mathcal{A}$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Pruebe: $\mathcal{A}$ distingue los puntos de $K \iff$ i) $\mathcal{A}$ no se anula en K y ii) $\mathcal{A}$ separa a los puntos de K.

130. Notación como en el anterior. Pruebe: si $\mathcal{A}$ separa los puntos de K, entonces: $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}(K)$ ó existe $x_0 \in K$ tal que $\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) : f(x_0) = 0\}$.
(Sugerencia: Use el anterior. Si $\mathcal{A}$ se anula en K, sea $\widetilde{\mathcal{A}} = \{g + c : c \in \mathbb{R}\}$ entonces $\widetilde{\mathcal{A}}$ es un álgebra y $\overline{\widetilde{\mathcal{A}}} = C_{\mathbb{R}}(K)$. Sea $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = 0 \quad \forall\ f \in \mathcal{A}$. Entonces: $\overline{\mathcal{A}} \subseteq \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) : f(x_0) = 0\}$. Para la otra contención, aproxime f con elementos de $\widetilde{\mathcal{A}}$.)

Bibliografía

[1] APOSTOL, T.M., *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, MA, (1974).

[2] BARTLE, R.G., *The Elements of Real Analysis*, segunda edición, Wiley, (1976).

[3] BOAS, R.P., BOAS H.P, *A Primer of Real Functions*, Mathematical Association of America, (1997).

[4] GELBAUM, B.R. y OLMSTED J.M., *Counterexamples in Analysis*, Dover, (2003).

[5] HEWITT, E. y STROMBERG K., *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, Vol. 25, (1975).

[6] KOLMOGOROV, A.N. y FOMIN, S.V., *Introductory Real Analysis*, Dover, (1975).

[7] PHILLIPS, E.R., *An Introduction to Analysis and Integration Theory*, Dover, (1984).

[8] RUDIN, W, *Principios de Análisis Matemático*, tercera edición, McGraw Hill, (1976).

[9] SHILOV, G. E., *Elementary Real and Complex Analysis,* Dover, (1996).

[10] SIMMONS, G.F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw Hill, NY, (1963).

[11] SPRECHER, D.A., *Elements of Real Analysis*, Dover, (1987).