EJERCICIOS PARA EL CURSO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS

ITAM, 2012

INTRODUCCIÓN

La siguiente lista consiste de dos series con 275 ejercicios correspondientes al material de un primer curso de Análisis Matemático. Se ha hecho particular énfasis en espacios métricos y las nociones topológicas asociadas. Asimismo se ha pretendido desarrollar los elementos de la teoría de funciones de variable real.

El material de la primera serie (145 ejercicios) se divide de manera natural en tres partes. La primera se ocupa de la presentación de las nociones topológicas básicas en espacios métricos con muy frecuentes aplicaciones a suconjuntos de $\mathbb{R}^P$. La segunda parte se ocupa de los elementos de la teoría de convergencia, incluyendo temas como el de los límites inferior y superior así como el método de promedios. La noción de compacidad se examina también en términos de sucesiones y se discute la validez de la propiedad Bolzano-Weierstrass en espacios métricos. La tercera parte es la más extensa y en ella se discute la continuidad, semi-continuidad y continuidad uniforme de funciones y la preservación de estas propiedades bajo la toma de límites. La compacidad y la conexidad juegan aquí un papel muy importante. Asimismo se construyen funciones especiales con propiedades destacadas.

La segunda serie (130 ejercicios) aborda temas afines y profundiza lo expuesto en la primera.

A lo largo del trabajo se han incluido abundantes sugerencias para aquellos ejercicios que me parecen más difíciles, esta apreciación desde luego es subjetiva. Las sugerencias pueden no seguirse pues no son el único camino para la solución y otros enfoques son deseables, sin embargo, si éstas se utilizan, deben probarse las afirmaciones ahí contenidas.

Al final se incluye una breve bibliografía recomendada en cuyos textos se hallan ejercicios de otra naturaleza así como otros temas de Análisis.

Me resulta grato deber reconocer la impecable y paciente labor de Javier Sagastuy al frente del procesador de LaTeX, LyX.

Guillermo Grabinsky S.

Primera Serie

1. Dos conjuntos S y T se llaman equivalentes (denotando $S \sim T$) si existe $f : S \to T$ biyectiva. Pruebe: $\sim$ es una relación de equivalencia.

2. Sea T numerable y $S \subset T$. Pruebe: S es a lo más numerable (i.e. finito o numerable).

3. Si existe $f : S \to \mathbb{N}$ inyectiva, entonces S es a lo más numerable. (Sugerencia: $S \sim f(S)$ donde $f(S) = \{f(s) : s \in S\}$).

4. Si existe $f : \mathbb{N} \to S$ suprayectiva, entonces S es a lo más numerable.

5. Si $S \sim T$ y $U \sim V$, entonces $S \times U \sim T \times V$.

6. Si S es numerable, entonces $S \times S$ es numerable. Generalice. (Sugerencia: $S \sim \mathbb{N}$ y por el anterior, $S \times S \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, por lo que basta probar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Considere $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(i, j) = 2^i 3^j$ y use el ejercicio 2)).

7. Sea $D_1, D_2, ...$ una sucesión de conjuntos numerables y $D = \cup_{i=1}^{\infty} D_i$. Pruebe: D es numerable también. (Sugerencia: Si $D_i = \{x_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$ defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to D$ poniendo $f(i, j) = x_{i,j}$) .

8. Sea T un conjunto infinito y $S = \{s_1, s_2, ...\}$ un subconjunto numerable de T. Si $S_0 = \{s_1, s_3, ...\}$ entonces $T \sim T \setminus S_0$. (Sugerencia: defina $f : T \to T \setminus S_0$ poniendo: $f(x) = \begin{cases} x & si\, x \in T \setminus S \\ s_{2n} & si\, x = s_n \in S \end{cases}$)

9. Pruebe que $(0, 1] \sim (0, 1)$. (Sugerencia: defina $f : (0, 1] \to (0, 1)$ como sigue: $f(x) = \dfrac{3}{2^n} - x$ si $x \in (\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{2^{n-1}}]$ $n = 1, 2, ...$). (G. Cantor, 1877)

10. Pruebe que $(0, 1) \sim [0, 1)$, $[0, 1) \sim [0, 1]$ y $[0, 1] \sim \mathbb{R}$. (Sugerencia: use el anterior) .

11. Pruebe: cualesquiera dos intervalos con más de un punto son equivalentes.

12. Sea $D_n = \{\dfrac{j}{2^n} : j = 0, ..., 2^n - 1\}$ para $n \in \mathbb{N}$ y sea $D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$ el conjunto de los números diádicos en [0,1). Pruebe:

a) $\sup(D) = 1$.

b) Entre cualesquiera dos números reales en $[0,1]$ hay una infinidad de números diádicos.

13. Describa a los elementos de D como en el anterior en términos de su expansión binaria.

14. Dé un ejemplo de un conjunto acotado de números irracionales que tenga supremo e ínfimo racional.

15. Pruebe:

    a) Si un conjunto acotado contiene una cota superior, ésta es el supremo (análogamente con el ínfimo).

    b) Un conjunto finito no vacío de números reales contiene a su supremo y a su ínfimo.

16. Sea $S \subset \mathbb{R}$ acotado, entonces $\forall a \in \mathbb{R}$ se tiene:

    a) $\inf(a + S) = a + \inf(S)$.

    b) $\sup(a + S) = a + \sup(S)$ donde $a + S = \{a + s \,:\, s \in S\}$

17. Pruebe con detalle que si $S \subset \mathbb{R}$ es acotado, entonces:

$$\inf(aS) = \begin{cases} a(\inf(S)) & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ a(\sup(S)) & a < 0 \end{cases}$$

    Enuncie el resultado análogo para supremo y pruébelo. (Aquí $aS = \{as \,:\, s \in S\}$).

18. Sea S un conjunto no vacío y $f, g : S \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas. Pruebe la siguiente serie de desigualdades:

$$\inf\{f(x) \,:\, x \in S\} + \inf\{g(x) \,:\, x \in S\} \leq \inf\{f(x) + g(x) \,:\, x \in S\} \leq$$

$$\inf\{f(x) : x \in S\} + \sup\{g(x) : x \in S\} \leq \sup\{f(x) : x \in S\} + \sup\{g(x) : x \in S\}$$

19. Muestre con ejemplos que cada una de las siguientes desigualdades en el ejercicio anterior podría ser estricta.

20. Calcule $\inf_x \sup_y (f(x,y))$ y $\sup_y \inf_x (f(x,y))$ si $f(x,y) \,:\, (-1,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}$ se define por:

    a) $f(x,y) = (x - y)^3$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x-y & x>y \\ y-x & x\leq y \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & x-y\in\mathbb{Q} \\ 0 & x-y\notin\mathbb{Q} \end{cases}$

21. Sea $f\ : X\times Y\to\mathbb{R}$ acotada, entonces:

    a) $\sup_x\sup_y\{f(x,y)\} = \sup_y\sup_x\{f(x,y)\} = \sup_{(x,y)}\{f(x,y)\}$ (Principio del supremo iterado).

    b) $\sup_x \inf_y\{f(x,y)\}\leq \inf_y\sup_x\{f(x,y)\}$. Exhiba un ejemplo en el que la desigualdad es estricta.

22. Pruebe: Para cada $a>0$ y $n\in\mathbb{N}$ existe uno y sólo un número real $b>0$ tal que $b^n=a$ (se denotará $b=\sqrt[n]{a}$). Sugerencia: sea $S=\{x>0\ :\ x^n<a\}$, entonces $S\neq\emptyset$, por ejemplo $\dfrac{a}{1+a}\in S$ y S está acotado superiormente. Sea $b=\sup(S)$).

23. Pruebe: Si (a,b) es un intervalo que intersecta al conjunto de Cantor C, entonces también intersecta al complemento de C.

24. Muestre que el conjunto de Cantor no es la unión numerable de intervalos cerrados.

25. Sea C el conjunto de Cantor. Pruebe: $\forall\varepsilon>0$, $\forall x\in C$, el intervalo $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ contiene una infinidad de **elementos derechos e izquierdos** de intervalos ternarios y que pertenecen a C.

26. Entre cualesquiera dos elementos de C hay una cantidad no numerable de elementos de C o no hay elementos de C . (Sugerencia: el último caso se da cuando x y y son los extremos más próximos de intervalos ternarios contiguos. En otro caso se puede hallar un intervalo ternario "entre" x y y).

27. Pruebe el teorema de Pitágoras para la norma 2, concretamente:
    $||x+y||_2^2 = ||x||_2^2+||y||_2^2 \iff x\cdot y=0$.

28. Determine cuáles de las siguientes funciones $||\ ||\ :\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ son normas:

    a) $||x|| = \text{máx}_{0\leq t\leq 1}\left\{\left|\sum_{k=1}^p x_k t^{k-1}\right|\right\}$, $x=(x_1,...,x_p)$

    b) $||x|| = \text{máx}_{1\leq j\leq p}\{a_j|x_j|\}\quad a_1,...,a_p>0$ fijos.

    c) $||x|| = \sup\{x\cdot y\ :\ ||y||_2=1\}$

    ¿Cuál de ellas satisface la identidad del paralelogramo?

29. Pruebe:

    a) $|x\cdot y|\leq 1||x||_1||y||_1$ y $|x\cdot y|\leq p||x||_\infty||y||_\infty \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^p$

b) 1 y p son las mejores cotas.

30. Pruebe con ejemplos que si $r \neq 2$, $r \in [1, \infty)$, la identidad del paralelogramo **no** se cumple para la norma:

$$||x||_r = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^r \right)^{\frac{1}{r}} , \quad x = (x_i, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$$

31. Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Verifique que d es una métrica y que $\{x : d(x, x_0) < r\} = \begin{cases} \{x_0\} & r \in (0, 1] \\ M & r \in (1, \infty) \end{cases}$

.d se llama la **métrica discreta.**

32. Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una métrica. Definimos $D : M \times M \to [0, 1]$ como sigue: $D(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$. Pruebe que D es una métrica y que $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que $\{y : D(x, y) < \delta\} \subset \{y : d(x, y) < \varepsilon\}$.

33. Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una métrica. Definimos $D : M \times M \to [0, 1]$ como sigue: $D(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$. Pruebe que D es una métrica también. (Sugerencia: examine algunas propiedades de $\varphi(t) = \dfrac{t}{1 + t}$. Pruebe que φ es creciente y subaditiva.)

34. *a*) Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una métrica. Pruebe la **desigualdad tetraédrica:**

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w) \quad \forall x, y, z, w \in M$$

b) Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una función tal que $d(x, y) = d(y, x) > 0$ $\forall x \neq y \in M$, tal que $d(x, x) = 0\ \forall x \in M$ y que satisface la desigualdad tetraédrica. Pruebe que d es una métrica.

35. (Métrica inducida por una biyección). Sea (M, d) un espacio métrico y $f : M \to N$ una biyección. Sea $d' : N \times N \to \mathbb{R}$ definida por: $d'(z, w) = d(f^{-1}(z), f^{-1}(w))$. Pruebe:

a) (N, d') es un espacio métrico.

b) Examine las métricas resultantes si:

i. $M = (-1, 1), \quad N = \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$ y d usual.

ii. $M = (0, \infty), \quad N = (0, \infty), \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$ y d usual.

iii. $M = (-1,1)$, $N = \mathbb{R}$, $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}x)$ y d usual.

36. Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una métrica y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Defina $D : M \times M \to \mathbb{R}$ poniendo $D(m,m') = \varphi(d(m,m'))$. ¿Qué condiciones podrían exigirse a φ para que D sea una métrica en M?

37. (Métricas equivalentes). Dos métricas $d, d' : M \times M \to \mathbb{R}$ se llaman **equivalentes** (denotado $d \sim d'$) si:

    i. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in M\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ tal que $\{y : d(x,y) < \delta\} \subset \{y : d'(x,y) < \varepsilon\}$

    ii. $\forall \delta > 0$, $\forall x \in M\ \exists\, \varepsilon = \varepsilon(\delta, x) > 0$ tal que $\{y : d'(x,y) < \varepsilon\} \subset \{y : d(x,y) < \delta\}$

    Pruebe:

    a) $\sim$ es una relación de equivalencia.

    b) ¿Qué condiciones debe satisfacer $\varphi : M \to M$ para que $D = \varphi \circ d$ sea equivalente a d?

38. Sea (M,d) un espacio métrico. Para $x \in M$ y $A \subset M$, $A \neq \emptyset$ defina $d(x,A) = \text{ínf}\{d(x,a) : a \in A\}$. Pruebe:

    a) $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$

    b) $\forall\, \varepsilon > 0$, $U_\varepsilon = \{x \in M : d(x,A) < \varepsilon\}$ es abierto. (U_ε se llama una ε-vecindad de A)

39. Notación como en el anterior. Pruebe:

    a) z es un punto de adherencia de $A \iff d(z,A) = 0$

    b) z es un punto exterior de $A \iff d(z,A) > 0$

40. Sea $S \subset R$ acotado superiormente y $x = \sup(S)$. ¿Cierto o falso?

    a) x es un punto interior de S

    b) x es un punto de adherencia de S

    c) x es un punto frontera de S

    d) x es un punto de acumulación de S o de su complemento. Justifique.

41. Sea (M,d) un espacio métrico y $F \subset M$ dado. Pruebe: x es un punto de acumulación de $F \iff \forall\, \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap F$ es infinito. Concluya que un conjunto finito no tiene puntos de acumulación.

42. Sea (M,d) un espacio métrico. Para $F \subset M$ denote $\partial(F) = \{x \in M : x$ es punto frontera de $F\}$. Pruebe:

    a) $\partial(F)$ es cerrado. F es cerrado $\iff \partial(F) \subset F$.

b) Si $F_1 \subset F_2$ **no** se sigue que $\partial(F_1) \subset \partial(F_2)$.

c) $\partial(\overline{F}) \subset \overline{F} \quad \forall F$, pero la contención inversa podría no cumplirse.

d) $\partial(F_1 \cup F_2)$, $\partial(F_1 \cap F_2)$, $\partial(F_1 \backslash F_2)$ están todos contenidos en $\partial(F_1) \cup \partial(F_2)$.

e) $\partial(\partial(\partial(F))) = \partial(\partial(F))$ (Sugerencia: $\partial(\partial(\partial(F))) \subset \partial(\partial(F))$ por a)).

f) $\partial(F \times G) = (\partial(F) \times \overline{G}) \cup (\overline{F} \times \partial(G))$ (Sugerencia: $(x, y) \in \partial(F \times G)$ significa que $\forall \delta > 0$, $(B_\delta(x)) \times (B_\delta(y))$ contiene algún punto de $F \times G$ y de su complemento).

43. Obtenga $F^o, \overline{F}, F'$ y $\partial(F)$ si $F \subset \mathbb{R}^2$ es:

a) $F = \{(x, rx) \,:\, r \in \mathbb{Q},\, x \in \mathbb{R}\}$

b) $F = \{(x, y) \,:\, y - x \in \mathbb{Q}\}$

c) $F = \{(x, rx) \,:\, xy \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}\}$

44. Exhiba un conjunto acotado $F \subset \mathbb{R}$ tal que F' es numerable. (Sugerencia: $F = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,:\, m, n \in \mathbb{N}\}_{n=1}^{\infty}$, entonces $F' = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$)

45. ¿Cuántos subconjuntos diferentes de $\mathbb{R}$ se pueden formar si se aplican las operaciones $\circ \,:\, A \to A^o$ y $c \,:\, A \to A^c$?

46. Sea $A \subset \mathbb{R}^p$ un subconjunto no vacío arbitrario. Pruebe que A contiene un subconjunto C a lo más numerable, con la siguiente propiedad:$\forall\, \varepsilon > 0$ y $\forall x \in A, \exists z = z(\varepsilon, x) \in C$ tal que $||x - z|| < \varepsilon$ i.e. $C \subset A \subset \overline{C}$. (Sugerencia: para cada $n \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{Q}^p$, considere $A \cap B_{1/n}(r)$. Si el conjunto no es vacío, elija un punto $z_n(r)$ ahí. Sea $C = \cup_n \cup_r \{z_n(r)\}$ y use la densidad de $\mathbb{Q}^p$ en $\mathbb{R}^p$)

47. Pruebe que todo conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^p$ es la unión numerable de conjuntos cerrados. (Sugerencia: Sea $C \subset A$ como en el ejercicio anterior. Para cada $z \in A$ sea $N_z = \{n \in \mathbb{N} \,:\, \overline{B_{1/n}}(z) \subset A\}$ y sea $r_z = \dfrac{1}{n_z}$ donde $n_z = \text{mín}\, N_z$. Pruebe que $A = \cup_{z \in C} \overline{B_{r_z}}(z)$).Concluya que todo conjunto cerrado de $\mathbb{R}^p$ es la intersección numerable de subconjunos abiertos.

48. Sea $A \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto no numerable. Pruebe que $A \cap A'$ es no numerable. (Sugerencia: pruebe que $A = (A \cap A') \cup A_a$ (unión ajena) donde $A_a = \{x \in A \,:\, \exists\, r > 0$ tal que $B_r(x) \cap A = \{x\}\}$ es el conjunto de **puntos aislados** de A. Pruebe que A_a es a lo más numerable).

49. Un conjunto P se llama **perfecto** si $P = P'$. Pruebe que el conjunto ternario de Cantor es perfecto.

50. Decimos que un punto $x \in \mathbb{R}^p$ es un **punto de condensación** de $A \subset \mathbb{R}^p$ si $\forall\, r > 0$ $B_r(x) \cap A$ es no numerable. Pruebe: Todo conjunto cerrado A puede escribirse como la unión disjunta $A = P \cup N$ de un conjunto

perfecto P y otro a lo más numerable N. (Teorema de Cantor-Bendixson, 1883) (Sugerencia: Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^p \,:\, x$ es un punto de condensación de $A\}$, como A es cerrado, $P \subset A$. Sea $N = A \backslash P$ pruebe que N es a lo más numerable como sigue: sea $C \subset A$ como en el ejercico 46. Pruebe que $\mathbb{B} = \{B_{1/n}(z) \,:\, n \in \mathbb{N},\ z \in C\}$ es numerable y $\forall\, x \in N\ \exists\, B = B_x \in \mathbb{B}$ tal que $x \in B$ y $A \cap B$ es a lo sumo, numerable. Así pues $N \subset \cup_{B \in \mathbb{B}}(A \cap B)$) .

51. Sea (M, d) un espacio métrico. $F \subset M$ se llama **denso en ninguna parte** (d.n.p) si $(\overline{F})^{\mathrm{o}} = \emptyset$. Pruebe:

    a) F es d.n.p. $\iff$ $\forall\, A \in M$ abierto, existe otro conjunto abierto no vacío $B \subset A$ tal que $B \cap F = \emptyset$.

    b) F es d.n.p. $\iff$ $F \subset \overline{(\overline{F})^{\mathrm{o}}}$.

    c) Si F es cerrado (o abierto), entonces $\partial(F)$ es d.n.p.

    d) F es d.n.p. si $F = \partial(H)$ con H cerrado.

52. Use el principio de los intervalos cerrados anidados para mostrar que si $a < b$, entonces $[a, b]$ es no numerable (G. Cantor). (Sugerencia: suponga que $[a, b] = \{x_1, x_2, ...\}$. Construya inductivamente una sucesión anidada de subintervalos cerrados (I_n) de $[a, b]$ tal que $x_1, ..., x_n \notin I_n$ y considere $y \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$).

53. Sea (M, d) un espacio métrico y $A \subset M$ no vacío. Decimos que A es **acotado** si el conjunto $\{d(x, y) \,:\, x, y \in A\}$ es acotado; en cuyo caso el **diámetro de** A se define como: $diam(A) = \sup\{d(x, y) \,:\, x, y \in A\}$. Pruebe:

    a) A es acotado $\iff$ $\forall\, x \in M$, $\exists R = R_x > 0$ tal que $A \subset \{y \in M \,:\, d(x, y) < R\}$.

    b) Si A y B son acotados, entonces $A \cup B$ es acotado y $diam(A \cup B) \leq diam(A) + diam(B) + \delta(A, B)$ donde $\delta(A, B) = \inf\{d(x, z) \,:\, x \in A, z \in B\}$.

    c) $diam(\overline{A}) = diam(A)$.

54. Sean $d, d' \,:\, M \times M \to \mathbb{R}$ dos métricas equivalentes y $x \,:\, \mathbb{N} \to M$ una sucesión. Pruebe: $x_n \to_d l \iff x_n \to_{d'} l$. ¿Cuáles de las siguientes métricas de $\mathbb{R}$ son equivalentes?

    a) $d(x, y) = |x - y|$.

    b) $d'(x, y) = |\tan^{-1} x - \tan^{-1} y|$.

    c) $d''(x, y) = \left| \dfrac{x}{1 + |x|} - \dfrac{y}{1 + |y|} \right|$.

55. Proporcione un ejemplo de dos métricas equivalentes en $\mathbb{R}$ una de ellas completa y la otra no (por lo tanto la complitud no es invariante bajo la equivalencia).

56. Pruebe:

    a) Si $\varrho \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y $\varepsilon > 0$ son dados, entonces existen $m, n \in \mathbb{Z}$ distintos de cero tales que $|m\varrho - n| < \varepsilon$.

    b) Si $\varrho \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ son dados, entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $|(a\varrho + b) - x| < \varepsilon$ i.e. $\{a\varrho + b \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$. (Sugerencia: Para a) elija $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Divida el intervalo $[0, 1)$ en n subintervalos ajenos y congruentes y considere las partes fraccionarias de ϱ, 2ϱ, $3\varrho, ...$ Claramente $\exists\, i \neq j$ tales que $i\varrho$ y $j\varrho$ pertenecen a un mismo intervalo por lo que $|i\varrho - j\varrho| < \varepsilon$).

57. Defina $x : \mathbb{N} \to [0, 1]$ tal que $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}' = [0, 1]$.

58. Sea (M, d) un espacio métrico y $x : \mathbb{N} \to \mathbb{M}$ una sucesión. Pruebe:

    a) (x_n) converge $\iff$ para alguna $k \in \mathbb{N}$ la sucesión trasladada $(y_n = x_{n+k})$ converge. En cuyo caso, el límite es el mismo.

    b) Si $m_1, ..., m_k \in M$ son fijos y $x : \mathbb{N} \to M$ es una sucesión dada, entonces: (x_n) converge $\iff$ (z_n) converge donde $z : \mathbb{N} \to M$ se define como sigue: $z_n = \begin{cases} m_n & 1 \le n \le k \\ x_n & n > k \end{cases}$, en cuyo caso el límite es el mismo. (Nota: este ejercicio muestra que la convergencia de una sucesión **no** depende de los "primeros términos".)

59. Sea (M, d) un espacio métrico y $x, y : \mathbb{N} \to M$ dos sucesiones. Sea $z : \mathbb{N} \to M$ dada por $z_n = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & n \ impar \\ y_{\frac{n}{2}} & n \ par \end{cases}$. Esquemáticamente $z = (x_1, y_1, x_2, y_2, ...)$. Pruebe: (z_n) converge $\iff$ (x_n) y $(y_{n)})$ convergen y $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

60. Sea (M, d) un espacio métrico. Pruebe el siguiente criterio de convergencia: $x : \mathbb{N} \to M$ converge a $l \iff$ toda subsucesión de x admite a su vez otra subsucesión que converge a l.

61. Examine la convergencia de las siguientes sucesiones. Si convergen, halle el límite.

    a) $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$.

    b) $x_n = \tan^{-1}(n)$.

    c) $x_n = \sqrt{n+a} - \sqrt{n}\ (a > 0)$.

    d) $x_n = n^{\frac{1}{n}}$.

e) $x_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$.

f) $x_n = \sum_{k=2}^{n} \log(1 - \frac{1}{k^2})$.

g) $x_n = \frac{a^n}{n!}$ $(a > 0)$.

h) $x_n = \frac{n^\alpha}{a^n}$ $(a > 1,\ \alpha > 0)$.

i) $x_n = \frac{(\log n)^a}{n}$.

j) $x_n = \frac{\log n}{n^a}$ $(a > 0)$.

62. Pruebe:

a) $\lim_{n\to\infty}(\cos(\pi\theta))^{2n} = \begin{cases} 1 & si\ \theta \in \mathbb{Z} \\ 0 & si\ \theta \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

b) $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty}(\cos(\pi m!\theta))^{2n} = \begin{cases} 1 & si\ \theta \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ \theta \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

(Sugerencia: Para a) pruebe que $(\cos(\alpha)^{2n} = \frac{1}{2^n}(1+\cos(2\alpha))^n$. Para b), si $\theta \in \mathbb{Q}$ entonces $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m!\theta \in \mathbb{Z}\ \forall\, m \geq m_0$).

63. Definamos $sgn : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ como sigue: $sgn(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$.

Pruebe: $\lim_{m\to\infty} sgn(\sin^2(\pi m\theta)) = \begin{cases} 0 & si\ \theta \in \mathbb{Q} \\ 1 & si\ \theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$.

64. Pruebe:

a) $(1+\frac{1}{k})^k < e < (1+\frac{1}{k})^{k+1}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ (Sugerencia: Aplique log y argumente geométricamente).

b) $\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e < \frac{n^n}{(n-1)!}$ (Sugerencia: Multiplique desde $k = 1$ hasta $k = n-1$ en a)).

c) $en^n e^{-n} < n! < en^{n-1}e^{-n}$.

65. Pruebe el criterio de la raíz: Sea (x_n) una sucesión de números reales no negativos tales que $d = \lim_{n\to\infty}(x_n)^{\frac{1}{n}}$ existe, entonces:

a) Si $d < 1$, $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$.

b) Si $d > 1$, (x_n) no es actoado.

c) Si $d = 1$, existen ejemplos en los que (x_n) converge y otros en los que no.

66. Sea (x_n) una sucesión de números reales positivos tales que: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n+1}{x_n}\right) = l > 0$. Para $\epsilon \in (0,1)$ fija, pruebe que existen constantes A, $B > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que: $A(l-\epsilon)^n \leq x_n \leq B(l+\epsilon)^n \; \forall\, n \geq N$. Concluya que $\lim_{n\to\infty}(x_n)^{\frac{1}{n}} = l$. Use el resultado para probar que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = e$.
Nota: Puede probarse que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\theta_n \in (0,1)$ tal que: $n! = \sqrt{2\pi n}(n^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta_n}{12n}})$. (J. Stirling.)

67. Pruebe:

    a) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}) = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \log(2)$.

    b) $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n)$ existe.

    (Sugerencia: pruebe que la sucesión es decreciente y no negativa)
    Nota: el límite γ en b) se llama la constante de Euler-Mascheroni. Se desconoce si γ es racional o irracional.

68. (Sucesiones definidas recursivamente)

    a) Sean $0 < a_1 < b_1$ fijos. Defina $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ y $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. Pruebe: (a_n) y (b_n) convergen y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

    b) Sea $a_1 = a > 0$ fija y sea $a_{n+1} = a^{a_n}$. Investigue los posibles valores de a para que (a_n) converja.
    (Sugerencia: si a es tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, entonces $a^l = l$ y en ese caso a puede escribirse como sigue $a = x^{\frac{1}{x}}$. Describa la gráfica de $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ y concluya que $o < a \leq e^{\frac{1}{e}}$.
    Si $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ entonces (a_n) es monótona y creciente.)

69. A partir del límite $\lim_{t\to\infty}(1 + \frac{1}{t})^t = e$ obtenga:

    a) $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^n$. (Sugerencia: $(1 - \frac{1}{n}) = (\frac{n}{n-1})^{-1}$).

    b) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+\alpha}{n+\beta})^n$ $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

    c) $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{\alpha}{n})^{\beta n}$ $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

70. (La sucesión de Fibonacci y la razón de oro)

Defina $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ y $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ si $n \geq 1$. (u_n) se conoce como la sucesión de Fibonacci.
Sea $x_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ si $n \geq 1$. Pruebe directamente que (x_n) es de Cauchy y que $\lim_{n\to\infty} x_n = \delta$ donde $\delta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (la razón de oro). También pruebe que $|x_n - \delta| \leq \dfrac{1}{2^{n-3}}\ \forall\, n \geq 3$.
(Sugerencia:
Pruebe: $|x_{n+1} - x_{n+1}| = \dfrac{1}{x_n x_{n+1}}|x_{n-1} - x_n| \leq \dfrac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|\ \forall\, n$ observe que $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$).

71. Detemine si las sucesiones siguientes satisfacen la condición de Cauchy. Si es el caso, halle el límite:

   a) $x_1 < x_2$ dadas y $x_n = \dfrac{1}{3}x_{n-1} + \dfrac{2}{3}x_{n-2}$ si $n \geq 3$.

   b) $k > 0$ dado, $x_1 = k$ y $x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n}$ (una fracción continuada).

   c) $x_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} \quad n \geq 1$.

   d) $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$ (una suma de Riemann).

72. Pruebe: Si (x_n) y (y_n) son sucesiones acotadas, entonces:

   a) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$.

   b) $\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n$ y $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$ si (x_n) converge.

   c) Obtenga una fórmula para $\underline{\lim}_{n\to\infty}(ax_n)$ y $\overline{\lim}_{n\to\infty}(ax_n)$ en términos de $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ y $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ si $a \in \mathbb{R}$.

73. Muestre con ejemplos que cada una de las desigualdades del inciso a) del ejercicio anterior podría ser estricta.

74. Sea (x_n) una sucesión acotada. Pruebe:

   a) $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \inf U$ donde $U = \{u \in \mathbb{R} : u < x_n$ para un número finito de n's$\}$.

   b) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \sup V$ donde $V = \{v \in \mathbb{R} : x_n < v$ para un número finito de n's$\}$.

75. Sea $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión acotada y sea $L = \{l \in \mathbb{R} : \exists$ una subsucesión de x que converge a $l\}$. Pruebe:

a) Si $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ converge, entonces L se reduce a un punto.

b) $L \neq \emptyset$ (Sugerencia: Bolzano-Weierstrass)

c) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq l \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \quad \forall\, l \in L$.

d) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \min L$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \max L$.

76. Sea (x_n) una sucesión acotada y (σ_n) la sucesión de promedios aritméticos. Pruebe:

    a) Si (x_n) es monótona, (σ_n) lo es también.

    b) Si (σ_n) converge, entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = 0$.
    (Sugerencia: $x_n = n\sigma_n - n\sigma_{n-1}$)

77. Hipótesis como en el ejercico anterior. Pruebe: $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sigma_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sigma_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.
    (Sugerencia: Basta probar la primera desigualdad, la segunda es gratis y la tercera se sigue de la primera si se considera $-x_n$ en vez de x_n)
    Nota: Este ejercicio proporciona otra prueba del teorema de Cauchy.

78. Proporcione un ejemplo de una sucesión <u>acotada</u> tal que la sucesión de promedios no converja.

79. Sea $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ una serie de números reales, (x_n) la sucesión de sumas parciales y (σ_n) la sucesión de promedios de (x_n). Pruebe: si (σ_n) converge y $na_n \to 0$, entonces (x_n) converge también.
    (Sugerencia: Examine $|\sigma_n - x_n|$)
    (Nota: G. H. Hardy probó en 1910 que es suficiente suponer que (na_n) es acotada)

80. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no numerable. Pruebe que existe una sucesión $x : \mathbb{N} \to A$ de números reales distintos tal que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es igual a $+\infty$ (o bien $-\infty$) .
    (Sugerencia: Para alguna $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_n = \{a \in \mathbb{R} : |a| > \dfrac{1}{n}\}$ es no numerable.)

81. Sea $x_n = \sin(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ y $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Pruebe que $A' = [-1, 1]$.
    (Sugerencia: Pruebe primero que $\forall\, \delta > 0$ y $\forall\, b \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|b - (n + 2\pi m)| < \delta$. Use la periodicidad y la continuidad de $y = \sin(x)$; ver el ejercicio 56.) Concluya que $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sin(n) = -1$ y $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sin(n) = 1$.

82. Sea (M, d) un espacio métrico y $H \subset M$ dado. Decimos que H es **compacto por sucesiones** si toda sucesión $x : \mathbb{N} \to H$ admite una subsucesión convergente a un elemento de H. Pruebe:

a) Si H es compacto por sucesiones entones H es cerrado y acotado (relativo a d).
(Sugerencia: Suponga en cada caso lo contrario para obtener sendas contradictorias).

b) Si $M = \mathbb{R}^p$ y $x \in \mathbb{R}^p$ y H es compacto por sucesiones, entonces $H + x = \{z + x : z \in H\}$ y $tH = \{tz : z \in H\}$ $(t \in \mathbb{R})$ son compactos por sucesiones.

c) Si $M = \mathbb{R}^p$ y $H_1,\ H_2$ son compactos por sucesiones, entonces $H_1 + H_2 = \{z_1 + z_2 : z_i \in H_i,\ i = 1, 2\}$ es compacto por sucesiones.

83. Sea $M = (0, \infty)$ y $d(x, y) = |\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}|$. Sea $H = [1, \infty)$. Pruebe:

    a) H es cerrado y acotado (relativo a d).

    b) H no es compacto por sucesiones.

84. Pruebe que toda cubierta abierta $G = [G_\alpha : \alpha \in I\}$ de $A \subset \mathbb{R}^p$ puede reducirse a una cubierta numerable $G' \subset G$.
(Sugerencia: por el ejercicio 46, A contiene un subconjunto numerable C tal que $C \cap G_\alpha \neq \emptyset$ si $A \cap G_\alpha \neq \emptyset$).
Nota: espacios que cumplen la propiedad anterior de llaman de <u>Lindelöf.</u>

85. Generalice el resultado del ejercicio anterior para espacios métricos <u>separables.</u>

86. Sea (M, d) un espacio métrico y $x : \mathbb{N} \to M$ una sucesión que converge a l. Pruebe que $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ es compacto.

87. Sea (M, d) un espacio métrico. Para $A, B \subset M$ no vacíos, definimos $\delta(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$. Pruebe:

    a) Si A es compacto, $\exists\, a \in A$ tal que $\delta(A, B) = d(a, B)$.

    b) Si A y B son compactos, entonces $\exists\, a \in A,\ b \in B$ tales que $\delta(A, B) = d(a, b)$.

    c) Si A es compacto y B es cerrado, entonces:
    $\delta(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$.

    d) La conclusión del inciso anterior no se cumple si A y B son sólo cerrados.

    (Sugerencia: $M = \mathbb{R},\ A = \mathbb{N}$ y $B = \{-n + \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$)

88. Pruebe el teorema del encaje de Cantor para compactos de $\mathbb{R}^p$ usando el teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones.
(Sugerencia: Si (K_n) es una sucesión anidada de compactos no vacíos, defina: $x : \mathbb{N} \to K_n$ poniendo $x(n) = x_n$ donde x_n es algún punto de K_n)

89. Sea (M, d) un espacio métrico separable y $K \subset M$ dado. Pruebe:
K es compacto $\iff$ K es compacto por sucesiones.
(Sugerencia: Para la suficiencia, si (x_n) es una sucesión con valores en K, aplique el teorema del encaje de Cantor. Para la necesidad, por el ejercicio 84. basta considerar solamente cubiertas numerables. Sea $\{G_n\}$ una cubierta abierta de K y que sin pérdida de generalidad se puede suponer que satisface $G_n \subset G_{n+1}$. Sea $K_n = K \setminus G_n$, entonces $\cap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. Basta probar que $\exists\, n_0$ tal que $\cap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. Suponga lo contrario, elija $x_n \in K_n$, aplique la hipótesis y obtenga una contradicción.)

90. Sea $A \subset \mathbb{R}^p$ acotado y para cada $r \geq 0$ sea $K_r = \{x \in \mathbb{R}^p : d(x, A) \leq r\}$. Pruebe que K_r es compacto.

91. Sea (M, d) un espacio métrico y $D \subset M$ disconexo. Sea $(A|B)$ una disconexión de D. Pruebe:
$(A \cap D) \cap \overline{(B \cap D)} = \emptyset = \overline{(A \cap D)} \cap (B \cap D)$
Nota: Conjuntos no vacíos E y F tales que $E \cap \overline{F} = \emptyset = \overline{E} \cap F$ se llaman **separados**.

92. Sea (M, d) un espacio métrico y $C \subset M$ conexo. Pruebe: si $C \subset E \subset \overline{C}$ entonces E es conexo.

93. Sea (M, d) un espacio métrico y $C_1, C_2, ..., C_n \subset M$ conexos tales que $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset \quad i = 1, 2, ..., n-1$. Pruebe: $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$ es conexo. Generalice.

94. Sea (M, d) un espacio métrico y $E \subset M$ conexo. Sea $\{C_\alpha\}\alpha \in I$ una familia arbirtaria de conexos tales que $E \cap C_\alpha \neq \emptyset \forall \alpha$. Pruebe: $C = (\cup_{\alpha \in I} C_\alpha) \cup E$ es conexo.

95. Pruebe la conexidad de:

    a) $C = (\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R})$.
    b) $C = \{(x, rx) : x \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Q}\}$.
    c) C se obtiene del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ omitiendo los segmentos de recta $\left\{\frac{1}{2}\right\} \times \left[0, \frac{3}{4}\right]$, $\left\{\frac{1}{3}\right\} \times \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, $\left\{\frac{1}{4}\right\} \times \left[0, \frac{3}{4}\right]$, $\left\{\frac{1}{5}\right\} \times \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, etc.
    d) $C = \{(x, y) : y - x \in \mathbb{Q}\} \cup \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

96. Sea (M, d) un espacio métrico, $C \subset M$ conexo y $A \subset M$ abierto tal que $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \setminus A \neq \emptyset$ entonces $C \cap \partial(A) \neq \emptyset$.
(Sugerencia: $M = A \cup \partial(A) \cup (M \setminus A)^o$)

97. Sea $D \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto numerable. Pruebe que D es disconexo.
(Sugerencia: Sean $x \in D$ y $y \notin D$ fijos, entonces debe existir alguna $r \in (0, ||y - x||)$ tal que $\{z \in \mathbb{R}^p : ||z - x|| = r\} \cap D = \emptyset$)

98. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto conexo no vacío. Pruebe:

   a) Si A es acotado, entonces A es un intervalo de alguna de las siguientes formas: (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ o $[a,b]$.
   (Sugerencia: Pruebe si $x < y$ pertenecen a A entonces $[x,y] \subset A$, ahora pruebe que $(a,b) \subset A \subset [a,b]$ donde $a = \text{ínf } A$.

   b) Si A no es acotado, entonces A es un intervalo de alguna de las siguientes formas: $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, (a,∞), $[a,\infty)$ o $\mathbb{R}$.

99. Pruebe: Si $A \subset \mathbb{R}$ es abierto no vacío, entonces A es la unión disjunta a lo más numerable de intervalos abiertos.
(Sugerencia: defina una relación en A como sigue: $x \sim y \quad (x,y \in A) \iff$ existe un intervalo abierto $I = I(x,y)$ contenido en A tal que $x,y \in I$. La relación es de equivalencia por lo que parte a A en clases de equivalencia ajenas. Usando la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ pruebe que hay a lo más una cantidad numerable de clases y que cada clase en un intervalo abierto.)

100. Generalice el ejercicio anterior a $\mathbb{R}^p$ probando que todo subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^p$ es la unión a lo más numerable de subconjuntos abiertos, ajenos y conexos (llamadas las **componentes conexas** del abierto).

101. Define $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue: $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Pruebe: f es continua en $x_0 \iff x_0 = 0$ (Use ε y δ).

102. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función aditiva i.e. $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}$. Pruebe:

   a) Si f es continua, entonces $f(x) = f(1)x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

   b) Si f es continua en un punto, entonces $f(x) = f(1)x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

   c) Si f es acotada en algún intervalo abierto, entonces $f(x) = f(1)x$
   (Sugerencia: Pruebe primero que $f(r) = f(1)r \quad \forall\, r \in \mathbb{Q}$ en cada caso)

103. *a*) Sea $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$. Si φ es continua, continua en un punto o acotada en (a,b) con $a > 0$, entonces $\varphi(x) = \varphi(e)\ln(x)$.
   (Sugerencia: Considere $f = \varphi \circ \exp$ y aplique el ejercicio anterior)

   b) ¿Qué puede decirse de una función $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface $\Psi(x+y) = \Psi(x)\Psi(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ y es continua, continua en un punto o acotada en (a,b)?

   Nota: Si se supone que existe una base de Hamel de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ entonces existen funciones f, φ, Ψ como en los ejercicios 102 y 103 que no son acotadas en algún intervalo!

104. (La función de K. J. Thomae)
Defina $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ como sigue:
$f(x)=\begin{cases}0 & x\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}\\ \dfrac{1}{n} & x=\dfrac{m}{n}\end{cases}$ con $m,n\in\mathbb{N}$ y $(m,n)=1$. Pruebe: f es continua en $x_0 \iff x_0\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}$.
(Sugerencia: Claramente f es discontinua en x_0 si $x_0\in\mathbb{Q}$; para mostrar que f es continua en $x_0\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}$ pruebe que dado $\delta>0$ y $N\in\mathbb{N}$ existe sólo una cantidad finita de fracciones $\dfrac{m}{n}$ tales que $|x_0-\dfrac{m}{n}|<\delta$ si $n\leq N$).

105. (Funciones crecientes)
Sea $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función creciente y continua por la derecha, i.e. $\varphi(x^+)=\varphi(x)$, $\forall\, x\in(a,b)$. Pruebe:

a) $x\in(a,b)$ es una discontinuidad de $\varphi \iff \varphi(x^+)>\varphi(x^-)$.

b) Si $D=\{x\in(a,b):\varphi(x^+)>\varphi(x^-)\}$ entonces D (el conjunto de discontinuidades de φ) es a lo más numerable.

(Sugerencia: Sea $D_n=\{x\in D:\varphi(x^+)-\varphi(x^-)>\dfrac{1}{n}\}$, entonces $D=\cup_{n=1}^{\infty}D_n$ por lo que basta probar que D_n es finito. Pruebe si D_n contiene al menos m elementos, entonces $\dfrac{m}{n}\leq\varphi(b^-)-\varphi(a^+)$ o bien $m\leq n(\varphi(b^-)-\varphi(a^+)) \therefore \#(D_n)\leq n(\varphi(b^-)-\varphi(a^+))$.

c) Si $\{x_1,x_2,...\}$ es una enumeración de D y $s:(a,b)\to\mathbb{R}$ se define por $s(x)=\sum_{x_j\leq x}s_j$ donde $s_j=\varphi(x_j^+)-\varphi(x_j^-)$ es el "tamaño del salto" de φ en x_j entonces s es no negativa, continua por la derecha y creciente.
(Sugerencia: Empiece probando que s tiene sentido; se conviene en definir como cero a las sumas vacías)
s se llama la función de "saltos de φ" .

d) Si $f=\varphi-s$ entonces f es <u>continua</u>, creciente y satisface $\varphi=f+s$.

106. (Funciones convexas)
Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se llama **convexa** en $[a,b]$ si:
$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y) \quad \forall\, x.y\in[a,b],\ \forall\, t\in(0,1)$.

a) Interprete geométricamente la condición que define a una función convexa.

b) Si f es convexa en $[a,b]$ y $x<y<z$ pertenecen a $[a,b]$ entonces: $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$ y así se tiene que si $w<x\leq y<z$ pertenecen a $[a,b]$ entonces: $\dfrac{f(x)-f(w)}{x-w}\leq\dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$
(Sugerencia: Para la primera desigualdad escriba a y como combinación "convexa" de x y z i.e. $y=\left(\dfrac{z-y}{z-x}\right)x+\left(\dfrac{y-x}{z-x}\right)z$.

c) Usando b) pruebe que f tiene derivadas laterales finitas en todo punto de (a,b) y donde f' no existe es un conjunto a lo más numerable.
(Sugerencia: Denote por $f'_+(x)$ y $f'_-(x)$ la derivada lateral derecha e izquierda de f en x. f es derivable en $x \iff f'_+(x) = f'_-(x)$. Por b), $f'_-(x) \leq f'_+(x) \quad \forall\, x \in (a,b)$)

d) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es convexa en $[a,b]$, entonces f es continua en (a,b)
Nota: f podría no ser continua en a o en b.

107. Sea (M,d) un espacio métrico y $A \subset M$ no vacío. Pruebe:

a) $d(\cdot, A) : M \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua. (Ver el ejercicio 38.)

b) Si E y $F \subset M$ son subconjuntos separados (i.e. $E \cap \overline{F} = \emptyset = \overline{E} \cap F$) entonces existen abiertos U y $V \subset M$ tales que $E \subset U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.
(Sugerencia: Defina $\varphi : M \to \mathbb{R}$ como sigue: $\varphi(x) = d(x,E) - d(x,F)$ y considere $\varphi^{-1}(0,\infty)$ y $\varphi^{-1}(-\infty,0)$)

108. Use el número de Lebesgue de una cubierta para probar que una función real continua definida sobre un conjunto compacto de un espacio métrico es uniformemente continua.

109. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto <u>no</u> compacto. Pruebe:

a) Existe $f : E \to \mathbb{R}$ continua pero no acotada.

b) Existe $g : E \to \mathbb{R}$ continua y acotada, pero que no alcanza su supremo en E.

c) Si E es además acotado, existe $h : E \to \mathbb{R}$ que no es uniformemente continua.
(Sugerencia: Si E es acotado, entonces $E' \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in E'$ y defina $f(x) = \dfrac{1}{x - x_0} = h(x)$ y $g(x) = \dfrac{1}{1-(x-x_0)^2}$. Si E es no actoado, defina $f(x) = x$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$)

110. Sea (M,d) un espacio métrico, $E \subset M$ acotado (i.e. $\exists\, z \in M$, $R > 0$ tal que $E \subset B_R(z)$). Pruebe:

a) Si $f : M \to \mathbb{R}^p$ es uniformemente continua, entonces $f(E)$ es un subconjunto acotado.

b) El inciso anterior no se cumple si E no es acotado.
(Sugerencia: Sea $z_0 \in E$ fijo y examine $f(x) = d(x,z_0)$)

111. Sea (M,d) un espacio métrico y $E \subset M$. Sea $f : M \to \mathbb{R}^p$ una función tal que f restringida a E es uniformemente continua. Pruebe:

a) f puede extenderse de manera única a una función uniformemente continua f sobre $\overline{E}$.
(Sugerencia: Sea $x_0 \in \overline{E} \setminus E$ y $x : \mathbb{N} \to E$ una sucesión tal que $d(x_n, x_0) \to 0$ entonces por continuidad uniforme, $(f(x_n))$ es de Cauchy en $\mathbb{R}^p$ por lo que converge en $\mathbb{R}^p$. defina $\overline{f}(x_0)$ como dicho límite. Pruebe que $\overline{f}$ está bien definida y es uniformemente continua en $\overline{E}$. Verifique la unicidad.)

b) El inciso anterior no se cumple si f no es uniformemente continua en E .

112. Sean (M, d) y (N, d) dos espacios métricos y $f : M \to N$ una función. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) f es continua.

b) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \quad \forall\, A \subset M$.

c) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}) \quad \forall\, B \subset N$.

d) $f(A') \subset \overline{f(A)} \quad \forall\, A \subset M$.

e) $\partial(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\partial(B)) \quad \forall\, B \subset N$.

(Sugerencia: Pruebe: a)$\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a) y a) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ a))

113. Construya una función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua en cada variable pero que no sea continua.

114. Sea $C \subset [0, 1]$ el conjunto ternario de Cantor. Defina $f : C \to [0, 1] \times [0, 1]$ como sigue:
$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n+1}}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{2^n}\right)$ donde $a_k \in \{0, 2\}$ y $b_k = \frac{a_k}{2}\ \forall\, k$. Pruebe:

a) f es suprayectiva.

b) f es continua.

c) Si Π_1, $\Pi_2 : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ denotan las proyecciones y $g_i = \Pi_i \circ f : C \to [0, 1] \quad (i = 1, 2)$ entonces $g_i^{-1}(\{x\}) = \{a \in C : g_i(a) = x\}$ es no numerable $\forall\, x \in [0, 1]$.

115. (Funciones uniformemente continuas sobre dominios no compactos)

a) Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ una función continua tal que $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M = M(\varepsilon) > 0$ tal que $||f(x)|| < \varepsilon$ si $||x|| > M$. Pruebe que f es uniformemente continua.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica de periodo $T > 0$ (i.e. $f(x+T) = f(x)\, \forall\, x \in \mathbb{R}$). Pruebe que si f es continua en algún intervalo cerrado de longitud T, entonces f es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.

116. (Funciones semicontinuas)
Sea (M,d) un espacio métrico. Una función $f : M \to \mathbb{R}$ se llama semicontinua superiormente ($s.s.$) si $\{x \in M : f(x) < b\}$ es abierto $\forall\, b \in \mathbb{R}$. $g : M \to \mathbb{R}$ se llama semicontinua inferiormente ($s.i.$) si $f = -g$ lo es superiormente. Pruebe:

   a) $g : M \to \mathbb{R}$ es $s.i.$ $\iff$ $\{x \in M : f(x) > a\}$ es abierto $\forall\, a \in \mathbb{R}$.
   b) $h : M \to \mathbb{R}$ es continua $\iff$ h es $s.s.$ y $s.i.$
   c) Si $K \subset M$ es compacto y f es $s.s.$ entonces f está acotada superiormente en K y alcanza su supremo en un punto de K. Lo análogo es cierto para el ínfimo y funciones $s.i.$
   d) Existen funciones semicontinuas que no son continuas.
   (Sugerencia: examine funciones monótonas no continuas)

117. Notación como en el ejercicio anterior. Pruebe:

   a) f es $s.s.$ $\iff$ $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, x_0$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ si $d(x, x_0) < \delta$.
   b) f es $s.i.$ $\iff$ $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, x_0$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ si $d(x, x_0) < \delta$.

118. Sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha : M \to \mathbb{R}\}$ una familia de funciones continuas definidas en un espacio métrico. Sea $F = \sup\{f_\alpha : \alpha \in I\}$. Pruebe que F es $s.i.$
Nota: es posible que para alguna $x \in M$ se tenga $F(x) = \infty$. La definición de función $s.i.$ que toma valores infinitos se extiene sin cambio a la dada en el ejercicio 116.

119. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ena función continua tal que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Sea $x = \sup\{c \in [a,b] : f(c) < 0\}$. Pruebe que $f(x) = 0$.

120. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe: f es inyectiva $\iff$ f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

121. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(f(f(x))) = x\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Pruebe que $f(x) = x\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Pruebe que lo mismo es cierto para cualquier número impar mayor o igual que tres aplicaciones de f. ¿Cómo debe modificarse la conclusión si el número de aplicaciones es par?
(Sugerencia: aplique el ejercicio anterior).

122. Proporcione un ejemplo de una función que satisface la propiedad del valor intermedio pero que sea discontinua en todo punto de su dominio.

123. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función que toma cada uno de sus valores exactamente dos veces.

   a) Pruebe que g no es continua.
   (Sugerencia: Suponga que existe una función continua con tal propiedad y obtenga una contradicción usando el teorema del valor intermedio de Bolzano)

b) Construya $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que toma cada valor exactamente 3 veces.

124. (Propiedad de Darboux)
Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene la **propiedad de Darboux** si satisface la propiedad del valor intermedio de Bolzano. Pruebe: si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $[a, b]$ entonces $f = F'$ satisface la propiedad de Darboux. (Sugerencia: Si $f(c) = C$ y $f(d) = D$ con $c < d$ en $[a, b]$ y E está entre C y D, considere en ínfimo de $G(x) = F(x) - E(x - c)$ en $[c, d]$).
Note que f no tiene por qué ser continua.

125. Pruebe que no existe una función diferenciable $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$.

126. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con la propiedad de Darboux. Pruebe: Si $f^{-1}(\{r\}) = \{x \in [a, b] : f(x) = r\}$ es cerrado $\forall\, r \in \mathbb{Q}$, entonces f es continua.
(Sugerencia: Si $x_n \to x_0$, $f(x_n) > r > f(x_0)$ para alguna $r \in \mathbb{Q}$ y para toda n es posible construir una sucesión (t_n) tal que t_n está entre x_0 y x_n y $f(t_n) = r$, claramente $t_n \to x_0$, obtenga de esto una contradicción.)

127. Sea (M, d) un espacio métrico compacto y conexo y $f, g : M \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Si $f(M) \subset g(M)$, entonces existe $c \in M$ tal que $f(c) = g(c)$.
(Sugerencia: Considere $h = f - g$ y sus valores extremos.)

128. Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ una función lineal y $B = \{x \in \mathbb{R}^p : ||x|| \leq 1\}$ la bola unitaria cerrada. Pruebe $f(B) = [-A, A]$ donde $A = \sqrt{(f(\overline{e_1}))^2 + ... + (f(\overline{e_p}))^2}$ $(\overline{e_i})$(j)=δ_{ij} . Pruebe también que existe $x^* \in \mathbb{R}^p$ con $||x^*|| = 1$ tal que $f(x^*) = A$. ¿Quién es x^* ? (2 soluciones)

129. Sea (M, d) un espacio métrico y $T : M \to M$ una contracción. Pruebe:

   a) T^k es una contracción $\forall\, k = 2, 3, ...$ ($T^k = T \circ ... \circ T$ $\quad k$ veces) .
   b) Si z_0 es un punto fijo de T, entonces lo es de T^k, $k = 2, 3, ...$
   c) Si $U : M \to M$ satisface que $U \circ T = T \circ U$, entonces U tiene un punto fijo (observe que T tiene un único punto fijo).
   d) SI x_0 es un punto fijo para T^n y T^{n+1} para algún $n \geq 2$, entonces x_0 es el punto fijo de T .

130. Sea (M, d) un espacio métrico y $T : M \to M$ tal que T^k es una contracción para alguna $k > 2$. Pruebe que T tiene un único punto fijo.

131. Proporcione un ejemplo de una función $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$|Tx - Ty| < |x - y|\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ y que no tenga un solo punto fijo.
(Sugerencia: $Tx = \ln(1 + e^x)$).

132. Examine la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones ($f_n : D \to \mathbb{R}$) si:

   a) $D = [0,1]$ y $f_n(x) = x^n$.
   b) $D = [-1,1]$ y $f_n(x) = |x|^{\frac{1}{n}}$.
   c) $D = \mathbb{R}$ y $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.
   d) $D = \mathbb{R}$ y $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}(nx)$.
   e) $D = [0,\infty)$ y $f_n(x) = x^\alpha e^{-nx} \quad (\alpha > 0)$.

133. Proporcione un ejemplo de una sucesión de funciones ($f_n : D \to \mathbb{R}$) tal que converge puntualmente en D y una sucesión convergente $x : \mathbb{N} \to D$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ pertence a D, pero que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$ no exista. ¿Es posible que este fenómeno ocurra si la convergencia es uniforme? En este último caso, ¿se tiene $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$?

134. Sea ($f_n : D \to \mathbb{R}$) una sucesión de funciones *s.s.* (ver el ejercicio 116) tal que converge uniformemente a f en D. Pruebe que f es *s.s.* Obtenga el resultado análogo para funciones *s.i.* y concluya que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua.

135. Sea (M,d) un espacio métrico, $K \subset M$ compacto y ($f_n : K \to \mathbb{R}$) una sucesión de funciones continuas tales que:

   a) $f_n(x) \le f_{n+1}(x) \quad \forall\, x \in K, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
   b) (f_n) converge puntualmente a una función continua f en K. Pruebe $f_n \to f$ uniformemente en K (Teorema de U. Dini).
   (Sugerencia: Sea $g_n = f - f_n$, entonces cada g_n es continua y $g_n \ge g_{n+1}$, $g_n \to 0$ uniformemente. Para $\varepsilon > 0$ fija, pruebe que $(K_n(\varepsilon))_{n=1}^{\infty}$ con $K_n(\varepsilon) = \{x \in K : |g_n(x)| \ge \varepsilon\}$ es una sucesión anidada de compactos con intersección vacía. Aplique el teorema del encaje de Cantor)

136. Muestre con ejemplos que la compacidad de K o la continuidad de f es indispensable en el ejercicio anterior.

137. Sea $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Pruebe:

   a) f_n converge uniformemente a una función f.
   b) $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \quad \forall\, x \neq 0$.

138. Sea (M,d) un espacio métrico y ($f_n : M \to \mathbb{R}$) una sucesión de funciones. Suponga que para cada n existe $A_n > 0$ tal que $|f_n(x)| \le A_n$ $\forall\, x \in M_0 \subset M$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en M_0 (K. Weierstrass).
(Sugerencia: las sumas parciales de la serie son de Cauchy uniforme en M_0)

139. Pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$ converge uniformemente en cada intervalo acotado, pero diverge absolutamente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

140. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < \dfrac{1}{n+1} \\ \sin^2(\dfrac{\pi}{x}) & x \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right] \\ 0 & \dfrac{1}{n} < x \end{cases}$. Pruebe:

   a) (f_n) converge puntualmente, pero no uniformemente a una función continua.

   b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolutamente, pero no uniformemente.

141. El siguiente resultado es un caso especial del método de **condensación de singularidades**.
Sea $D = \{d_1, d_2, ...\} \subset \mathbb{R}$ un subconjunto numerable y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada y continua excepto en 0 en donde se tiene:
$f(0^+) - f(0^-) = \eta > 0$. Suponga que $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ es una serie numérica que converge absolutamente. Pruebe que la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f(x - d_i)$ satisface:

   a) F es continua en $x \iff x \notin D$.

   b) $F(d_i^+) - F(d_i^-) = c_i \eta$.

   (Sugerencia: El ejercicio y las hipótesis garantizan la convergencia uniforme de la serie que define a F. Si $x \neq d_i$ escriba
   $F(x) = c_i g(x - d_i) + H_i(x)$ donde H_i es <u>continua</u> en d_i. El resto se sigue de esta descomposición.)

142. Sea $E = \{e_1, e_2, ...\} \subset \mathbb{R}$ un conjunto numerable y denso en ninguna parte (ver el ejercicio 51). Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua salvo en $x = 0$, en donde $\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$. Sea $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ una serie convergente de números reales y sea $G(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i g(x - e_i)$. Pruebe:

   a) G es continua en $z \iff z \notin \overline{E}$.

   b) Si $z \in \overline{E}$, entonces G tiene una discontinuidad de tipo infinito en z.

   (Sugerencia: Si $z \notin \overline{E}$, entonces $|z - e_i| \geq d(z, \overline{E}) > 0\ \forall\, i$, por lo que existe $\delta > 0$ y $M > 0$ tal que $|g(x-e_i)| \leq M \quad \forall x \in (z-\delta, z+\delta)$, de ahí la continuidad de G en z. Si $z = e_k$ entonces existe una sucesión (x_n) contenida en $\mathbb{R} \backslash \overline{E}$ tal que $x_n \to z$ por lo que el término $g(z - e_k) \to \infty$ a través de (x_n))

143. Sea $\{r_1 r_2, ...\}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Defina $H : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ como sigue:
$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s} \sin\left(\dfrac{\pi}{x - r_n}\right)$ ($s > 1$ fija). Pruebe que H es continua en su dominio.

144. Sea $a > 1$ fija y defina $K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1+a^n x}\right)$. Pruebe que K es una función continua excepto en los puntos $0, -\frac{1}{a}, -\frac{1}{a^2}, \ldots$

145. (La función de B. Riemann)
Para $x \in \mathbb{R}$ denote por (x) la diferencia positiva o negativa entre x y el entero más próximo y 0 si $x = n + \frac{1}{2}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$. Pruebe:

a) Sea $S = \{\frac{p}{2m} : p$ es impar, $m \in \mathbb{Z}$ y $(p;m) = 1\}$ entonces S es numerable y denso en $\mathbb{R}$. Si $x \notin S$, f es continua en x.

b) Si $x = \frac{p}{2m}$ como en a), entonces $f(x^+) = f(x) - \frac{\pi^2}{16m^2}$ y $f(x^-) = f(x) + \frac{\pi^2}{16m^2}$.
(Sugerencia: Se puede suponer que $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$)

c) $\forall\, \varepsilon > 0$, el conjunto $S_\varepsilon = \{x \in [a,b] : f(x^+) - f(x^-) \geq \varepsilon\}$ es finito.
(Sugerencia: $S_\varepsilon = \{\frac{p}{2m} \in (a,b) : \frac{\pi^2}{8m^2} \geq \varepsilon\}$ con $\frac{p}{2m}$ como en a); use el b))

d) f es Riemann-integrable en $[a,b]\ \forall\, a < b$ en $\mathbb{R}$.