• Ejercicios - ejemplo extra

1. Demuestra que $\cosh(\alpha+\beta)=\cosh\alpha\cosh\beta+\operatorname{senh}\alpha\operatorname{senh}\beta$.

Sean las definiciones siguientes:

$$\cosh\theta=\frac{1}{2}\left(e^{\theta}+e^{-\theta}\right) \quad y \quad \operatorname{senh}\theta=\frac{1}{2}\left(e^{\theta}-e^{-\theta}\right) \quad \forall\, \theta\in\mathbb{R}.$$

De este modo, tenemos que

$$\cosh(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\left(e^{\alpha}e^{\beta}+e^{-\alpha}e^{-\beta}\right) \quad y \quad \operatorname{senh}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\left(e^{\alpha}e^{\beta}-e^{-\alpha}e^{-\beta}\right)$$

$$\Rightarrow e^{\alpha}e^{\beta}=(\cosh\alpha+\operatorname{senh}\alpha)(\cosh\beta+\operatorname{senh}\beta)=\cosh\alpha\cosh\beta+\operatorname{senh}\alpha\operatorname{senh}\beta+\cancel{\cosh\alpha\operatorname{senh}\beta}+\cancel{\operatorname{senh}\alpha\cosh\beta}$$

$$\Rightarrow e^{-\alpha}e^{-\beta}=\cosh\alpha\cosh\beta+\operatorname{senh}\alpha\operatorname{senh}\beta-\cancel{\cosh\alpha\operatorname{senh}\beta}-\cancel{\operatorname{senh}\alpha\cosh\beta}$$

De este modo, tenemos que

$$\cosh(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\left(e^{\alpha}e^{\beta}+e^{-\alpha}e^{-\beta}\right)=\cosh\alpha\cosh\beta+\operatorname{senh}\alpha\operatorname{senh}\beta.$$

2. Evaluar $I=\int_1^{\cosh\alpha}\sqrt{x^2-1}\,dx$, $\alpha\geq 0$.

$$I=\int_0^{\alpha}\sqrt{\cosh^2 u-1}\,\operatorname{senh}u\,du=\int_0^{\alpha}\operatorname{senh}^2 u\,du=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\cosh(2u)\,du-\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}du=\frac{1}{4}\operatorname{senh}(2\alpha)-\frac{\alpha}{2}$$

$\begin{cases} x=\cosh u=\frac{1}{2}\left(e^{u}+e^{-u}\right) \\ dx=\operatorname{senh}u\,du \end{cases}$ $\quad \cosh^2u-\operatorname{senh}^2u=1 \quad$ $\operatorname{senh}^2u=\frac{1}{2}(\cosh(2u)-1)$

3. Sea $m>0$ la masa de un paracaidista, g la aceleración de la gravedad en la Tierra y γ el coeficiente de fricción. Si $v(t)$ es la rapidez de caída libre cuando el paracaídas está abierto al tiempo $t\geq 0$, entonces

$$v(t)=-\sqrt{\frac{mg}{\gamma}}\tanh\sqrt{\frac{\gamma g}{m}}\,t.$$

Calcular la rapidez límite $v_\infty=\lim_{t\to\infty}v(t)$.

Debido a que $\tanh\theta=\dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}}$ $\forall\,\theta\in\mathbb{R}$, tenemos que

$$v_\infty=\lim_{t\to\infty}v(t)=\lim_{t\to\infty}-\sqrt{\frac{mg}{\gamma}}\,\frac{e^{\sqrt{\frac{\gamma g}{m}}t}-e^{-\sqrt{\frac{\gamma g}{m}}t}}{e^{\sqrt{\frac{\gamma g}{m}}t}+e^{-\sqrt{\frac{\gamma g}{m}}t}}=-\sqrt{\frac{mg}{\gamma}}\lim_{t\to\infty}\frac{1-\cancelto{0}{e^{-2\sqrt{\frac{\gamma g}{m}}t}}}{1+\cancelto{0}{e^{-2\sqrt{\frac{\gamma g}{m}}t}}}=-\sqrt{\frac{mg}{\gamma}}$$

4. Probar que $\operatorname{arcosh}\sqrt{x^2+1}=\operatorname{arcsenh}x$ para $x\geq 0$.

Sea $x=\operatorname{senh}u$, entonces $\operatorname{arcsenh}x=\operatorname{arcsenh}(\operatorname{senh}u)=u$; en consecuencia, tenemos que $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\operatorname{senh}^2u+1}=\cosh u=\cosh(\operatorname{arcsenh}x)$. Como $x\geq 0$, entonces

$\cosh^2u-\operatorname{senh}^2u=1$

tenemos que $\cosh(\cdot)$ es invertible y, por lo tanto, obtenemos que

$$\operatorname{arcosh}\sqrt{x^2+1}=\operatorname{arcsenh}x$$

5. Sea $f(x)=\int_0^x\frac{du}{\sqrt{1+u^3}}$ para $x\geq 0$.

(a) Probar que $f(x)$ es monótona creciente para todo $x\geq 0$.

(b) Sea $x=g(y)$, la función inversa de $y=f(x)$. Demostrar que $g''(y)=k\,g(y)^2$ y encontrar el valor de $k\in\mathbb{R}$.

Observemos que, debido al T.F.C., $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}>0$ $\forall\, x\geq 0$, lo cual indica que $f(x)$ es monótona creciente.

Sea $x=g(y)$, la inversa de $y=f(x)$. Como consecuencia del T.F.Inv., tenemos que $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\sqrt{1+x^3}=\sqrt{1+g(y)^3}$. De este modo, calculamos la derivada logarítmica de $g'(y)$, es decir:

$$\log g'(y)=\frac{1}{2}\log\left(1+g(y)^3\right)\Rightarrow\frac{g''(y)}{g'(y)}=\frac{1}{2}\,\frac{3g(y)^2g'(y)}{1+g(y)^3}=\frac{3}{2}\,\frac{g'(y)}{1+g(y)^3}\,g(y)^2$$

$$\Rightarrow g''(y)=\frac{3}{2}\,\frac{1+g(y)^3}{1+g(y)^3}\,g(y)^2 \qquad \therefore\; g''(y)=k\,g(y)^2,\ \text{donde } k=\frac{3}{2}$$

$g'(y)^2=1+g(y)^3$

6. Sea la función logaritmo integral $Li(x)=\int_2^x\frac{du}{\log u}$, $x\geq 2$. Encontrar $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $Li(x)=\int_{\alpha}^{\log x}\frac{e^u}{u}\,du$.

Notemos que si $\theta=\log u$, entonces $u=e^{\theta}\Rightarrow du=e^{\theta}d\theta$, entonces tenemos que si $u=2\Rightarrow\theta_0=\log 2$ y $u=x\Rightarrow\theta_1=\log x$; en consecuencia,

$$Li(x)=\int_{\log 2}^{\log x}\frac{e^{\theta}}{\theta}\,d\theta,\quad \text{donde } \alpha=\log 2$$

7. Sea $F(x)=\int_1^x\frac{e^u}{u}\,du$ para $x>0$. Expresar las siguientes integrales en términos de $F(x)$:

(a) $I_1=\int_1^x\frac{e^{\alpha u}}{u}\,du$, $\alpha\in\mathbb{R}$; (b) $I_2=\int_1^x e^{1/u}\,du$.

Tenemos que $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces

$$I_1=\int_1^x\alpha\,\frac{e^{\alpha u}}{\alpha u}\,du=\int_{\alpha}^{\alpha x}\frac{e^{v}}{v}\,dv=-\int_1^{\alpha}\frac{e^{v}}{v}\,dv+\int_1^{\alpha x}\frac{e^{v}}{v}\,dv$$

$\begin{cases} v=\alpha u \\ dv=\alpha\,du \end{cases}\Rightarrow \begin{matrix} v(1)=\alpha \\ v(x)=\alpha x \end{matrix}$

$$\therefore\; I_1=F(\alpha x)-F(\alpha)$$

Ahora, tenemos que $I_2=\int_{1/x}^{1}\frac{e^{v}}{v^2}\,dv$.

$\begin{cases} v=\frac{1}{u} \\ dv=-\frac{du}{u^2} \end{cases}\Rightarrow \begin{matrix} v(1)=1 \\ v(x)=\frac{1}{x} \end{matrix}$

Observemos que $\frac{e^{v}}{v^2}=e^{v}\frac{1}{v^2}$; por otro lado, tenemos que $\frac{d}{dv}e^{v}=e^{v}$ y $\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{1}{v^2}$. De este modo, notemos que $e^{v}\frac{1}{v^2}=e^{v}\frac{d}{dv}\left(-\frac{1}{v}\right)$. En consecuencia, tenemos que

$$\frac{d}{dv}\left(e^{v}\frac{1}{v}\right)=e^{v}\frac{1}{v}-\frac{1}{v^2}e^{v}\Rightarrow\frac{e^{v}}{v^2}=e^{v}\frac{1}{v}-\frac{d}{dv}\left(e^{v}\frac{1}{v}\right).$$

Por el T.F.C., tenemos que

$$\int_1^x\frac{e^{v}}{v^2}\,dv=\int_1^x\frac{e^{v}}{v}\,dv-\int_1^x\frac{d}{dv}\left(\frac{e^{v}}{v}\right)dv=F(x)-\left.\frac{e^{v}}{v}\right|_1^x=F(x)-\frac{e^{x}}{x}+e$$

8. Calcular $I=\int_{1/\alpha}^{\alpha}\frac{\log_\alpha u}{u}\,du$, $\alpha>0$.

Sea $u=\alpha^{v}\Rightarrow\log_\alpha u=v$; por otro lado, observemos que $\log u=v\log\alpha$ $\Rightarrow\log u=(\log_\alpha u)(\log\alpha)$; en consecuencia, tenemos que

$$I=\int_{1/\alpha}^{\alpha}\frac{1}{\log\alpha}\,\frac{\log u}{u}\,du=\frac{1}{\log\alpha}\int_{-\log\alpha}^{\log\alpha}x\,dx=0$$

$u=e^{x}$, $du=e^{x}dx$

9. Sea $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{senh}x\cosh x-\int_1^{\cosh x}\sqrt{u^2-1}\,du$, $x\geq 0$. Mostrar que $f(x)=\frac{1}{2}x$.

Observemos que

$$\operatorname{senh}x\cosh x=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{senh}(2x)\quad\forall\,x\in\mathbb{R}.$$

En consecuencia, tenemos que $f(x)=\frac{1}{4}\operatorname{senh}(2x)-G(\cosh x)$, donde $G(x)=\int_1^x\sqrt{u^2-1}\,du$. Debido al T.F.C., se tiene que

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cosh(2x)-G'(\cosh x)\operatorname{senh}x=\frac{1}{2}\cosh(2x)-\sqrt{\cosh^2x-1}\,\operatorname{senh}x=\frac{1}{2}\cosh(2x)-\operatorname{senh}^2x.$$

Ahora, sabemos que $\cosh(2x)=\frac{1}{2}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$ y $\cosh^2x=\frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)+\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow\cosh^2x=\frac{1}{2}(\cosh(2x)+1)\Rightarrow\cosh(2x)=2\cosh^2x-1$$

De esta manera, tenemos que

$f'(x)=\cosh^2x-\frac{1}{2}-\operatorname{senh}^2x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Entonces, el T.F.C. indica que $f(x)=\frac{1}{2}x+k$, $k\in\mathbb{R}$, i.e.: $k=\left.f(x)-\frac{1}{2}x\right|_{x=0}=f(0)-0=0$ $\quad\therefore\; f(x)=\frac{1}{2}x$

10. Encontrar la familia de primitivas de $f(x)=\csc x$.

Sabemos que $\csc x=\frac{1}{\operatorname{sen}x}$. Por otro lado, la identidad del doble ángulo conduce a que $\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, entonces

$$\frac{1}{\operatorname{sen}x}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\sec\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\sec\frac{x}{2}\,\frac{\sec\frac{x}{2}}{\sec\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\,\frac{1}{\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}\sec^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}.$$

De esta manera, tenemos que

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\,dx=\int\frac{du}{u}=\log|u|+k=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+k,\quad k\in\mathbb{R}$$

$\begin{cases} u=\tan\frac{x}{2} \\ du=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx \end{cases}$