Laboratorio 16

1. Calcula el límite de $\{a_n\}$ o justifica su divergencia:

(a) $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$

(e) $a_n = \frac{(-1)^n+1}{n}$. Observemos que $|a_n| \le \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(b) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}} = \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{\cancel{n}+\sqrt{n}-\cancel{n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} =$

$= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} \underset{\sqrt{n}=m}{=} \frac{2m}{\sqrt{m^2+m}+\sqrt{m^2-m}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{m}}+\sqrt{1-\frac{1}{m}}} \xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty} 1$

(d) $a_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{2}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\frac{2}{n+1}} = e^2\,\frac{1}{1+0} = e^2$

(g) $a_n = \sqrt[n]{\log n}$; sugerencia $1 \le \log n \le n \quad \forall\, n \ge 3$.

Observemos que $1 \le \sqrt[n]{\log n} \le \sqrt[n]{n}$. Sea $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^{1/x}$, donde $f(n) = \sqrt[n]{n}$. De este modo tenemos que

$$\log\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\log a_n = \lim_{x\to\infty}\log f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$\Rightarrow \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad \therefore \quad a_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Guía para ejercicios faltantes:

(c) $a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$

(f) $a_n = (-1)^n\frac{n}{n+1} = (-1)^n\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \begin{cases} \frac{1}{1+1/2m}, & \text{si } n = 2m \\ \frac{-1}{1+\frac{1}{2m+1}}, & \text{si } n = 2m+1 \end{cases} \quad \forall\, m\in\mathbb{N}.$

2. Demuestra que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$$

(a) $\lim_{n\to\infty}(1+\alpha^n)^{1/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } 0<\alpha\le 1. \\ \alpha, & \text{si } \alpha>1 \end{cases}$

Sea $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = (1+\alpha^x)^{1/x}$ donde $f(n) = a_n$.

$\Rightarrow \log\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\log a_n = \lim_{x\to\infty}\log f(x) = \lim_{x\to\infty}\boxed{\frac{\log(1+\alpha^x)}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+e^{x\log\alpha})}{x} =$

$\underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\log\alpha\, e^{x\log\alpha}}{1+\alpha^x} = \log\alpha\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha^x}{1+\alpha^x} = \log\alpha\begin{cases} B \\ A \end{cases}$, donde

$A = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\alpha^x}+1} = 1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}(1+\alpha^n)^{1/n} = \alpha$, si $\alpha>1$.

$B = \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha^x}{1+\alpha^x} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}(1+\alpha^n)^{1/n} = 0$, si $0<\alpha<1$

(b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}$, $a,b>0$.

Sin pérdida de generalidad $\max\{a,b\} = a>0$, entonces $\sqrt[n]{a^n+b^n} = a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$, donde $0<\frac{b}{a}<1$. Sea $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^x\right)^{1/x}$, donde $f(n) = \frac{a_n}{a}$, entonces $\log\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a}\right) = \lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{a_n}{a}\right) = \lim_{x\to\infty}\log f(x) = \lim_{x\to\infty}\boxed{\frac{\log\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^x\right)}{x}} \underset{(a)}{=} 1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n = a = \max\{a,b\}$

3. Calcular las series siguientes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{3^{2n-1}}$. Tenemos que, si $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^k}{3^{2k-1}}$, entonces $\lim_{n\to\infty}S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^k}{3^{2k-1}}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^k}{3^{2k-1}} = 3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi}{9}\right)^k = 3\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\pi}{9}\right)^k - 1\right) = 3\,\frac{1}{1-\frac{\pi}{9}} - 1$

$3^{2k-1} = \frac{9^k}{3}$

$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}q^k = \frac{1}{1-q} \text{ si } |q|<1}$

(b) $S = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}+3^{n+1}}{6^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^n} + 3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{6^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + 3\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^n - 1 - \frac{1}{6} + 3\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{6}} - 1 - \frac{1}{6} + 3\left(\frac{1}{1-1/2} - 1 - \frac{1}{2}\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left[(n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{1/n}\right] = \lim_{m\to\infty}\left[\cancel{(2^{1/2}} - 1^{1/1}) + (\cancel{3^{1/3}} - \cancel{2^{1/2}}) + \cancel{\cdots} +\right.$

$\left. + \cancel{\cdots} + (\cancel{m^{1/m}} - \cancel{(m-1)^{\frac{1}{m-1}}}) + ((m+1)^{\frac{1}{m+1}} - \cancel{m^{1/m}})\right] =$

$= \lim_{m\to\infty}\left(-1 + (m+1)^{\frac{1}{m+1}}\right)$

Observemos que $\lim_{m\to\infty}(m+1)^{\frac{1}{m+1}} \underset{m+1=s}{=} \lim_{s\to\infty}\sqrt[s]{s} = 1 \quad\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) = 0$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n+1}^{n+2}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\int_{n+1}^{n+2}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{m\to\infty}\left(\int_1^2\frac{dx}{1+x^2} + \int_2^3\frac{dx}{1+x^2} + \cdots + \int_{m+1}^{m+2}\frac{dx}{1+x^2}\right) =$

$= \lim_{m\to\infty}\int_1^{m+2}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{m\to\infty}\left(\arctan(m+2) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

Aditividad de la integral

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1$

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

4. Estudiar la convergencia de las series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{1/n}$. × Observemos que si $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{7}}$, entonces $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{7}}{\sqrt[n+1]{7}} = \frac{7^{1/n}}{7^{1/n+1}} \longrightarrow 1$

× Usando el criterio de la raíz: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{7^{1/n^2}} = 1$

Nota: Si $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge, entonces $a_n \to 0$.

Como $\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{7^{1/n}} = 1 \ne 0 \quad\therefore$ la serie diverge.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{(2n)!}{3!\,n!\,3^n}}_{a_n}$ Por medio del criterio de la razón, tenemos que:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{\cancel{3!}(n+1)!\,\cancel{3^{n+1}}}\,\frac{\cancel{3!}\,n!\,\cancel{3^n}}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!\,n!}{3(n+1)!\,(2n)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}}\,\frac{1}{3}\,\frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}} =$

$= \frac{1}{3}(2n+2)\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$ no existe; en consecuencia, la serie diverge.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{\arctan n}{n^{1.1}}}_{a_n}$ Dado que $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, entonces la serie probablemente converge.

Sea $b_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{n^{1.1}}$, entonces $a_n \le b_n \ \forall\, n\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n \le \sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Queremos averiguar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Para utilizar el criterio de la integral, consideremos a $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{\pi}{2x^{1.1}}$ donde $f(n) = b_n$; entonces, $\int_1^{\infty}f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1.1}} < \infty$, puesto que $\frac{1}{x^{1.1}}$ tiene una potencia mayor a uno.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n < \infty$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, donde $a_n = \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$.

$a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, entonces la serie plausiblemente converge.

Veamos que:

× $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}} \longrightarrow$ ¿?

× $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}+\sqrt[3]{n+1}}\,\frac{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{1} = \frac{2+\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}}{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}}} = 1$

Por otro lado, tenemos que $\sqrt{n} \ge \sqrt[3]{n} \ \forall\, n\ge 1 \Rightarrow 2\sqrt{n} \ge \sqrt[3]{n} \ \forall\, n\ge 1$

$\Rightarrow 2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n} \le 3\sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt{n}} \le a_n \ \forall\, n\ge 1$. Como la serie dada por $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\sqrt{n}}$ es divergente, porque la función auxiliar $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{3x^{1/2}}$, donde $f(n) = \frac{1}{3\sqrt{n}}$ entonces $\int_1^{\infty}f(x)\,dx$ diverge porque la potencia del denominador es menor a uno.

(b) Usar criterio de la raiz: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

(d) Usar criterio del cociente: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}+n+1}{(n+1)!}\,\frac{n!}{4^n+n} = \frac{n+1+4^{n+1}}{(n+1)(4^n+n)}$

(e) Usar el criterio de comparación: $a_n \le M b_n$ con $M>0 \ \forall\, n\in\mathbb{N}$.

$b_n = \frac{1}{2n+1}$ y $a_n = \frac{1}{n}$ y usar criterio de la integral para probar divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

(f) Usar el criterio del cociente: $a_n = \frac{1}{n\log n}$ y $b_n = \frac{1}{n}$; por criterio de la integral $\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ diverge, entonces $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow L$ implica que $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ diverge.

(g) Usar el criterio de la integral: $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ y $\int_1^{\infty}f(x)\,dx$

(j) Usar el criterio de comparación: $\tan\frac{1}{2^n} \le \frac{1}{2^n} \ \forall\, n\in\mathbb{N}$.

5. Analizar si las series siguientes convergen absolutamente, condicionalmente o divergen.

- Usar el criterio de Leibnitz: $b_n = (-1)^n a_n$, con $a_n \ge 0 \ \forall\, n\in\mathbb{N}$.
$\underbrace{|b_n| \to 0 \text{ cuando } n\to\infty \text{ y } a_{n+1} \le a_n \ \forall\, n\in\mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}b_n < \infty.}_{\text{Para averiguar convergencia condicional.}}$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$: Usar criterio de la integral para mostrar que no converge absolutamente; sí converge condicionalmente.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$: Usar criterio de la integral para mostrar que no converge absolutamente; sí converge condicionalmente.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$: Usar criterio de comparación para mostrar que converge absolutamente.

$$\left|(-1)^n\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$: Mostrar que a_n no converge para mostrar que la serie diverge.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$: Usar el criterio de la raíz en $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ para mostrar convergencia absoluta.