Laboratorio 15

1. Obtener $p_n(x)$ de Taylor para:

(a) $f(x) = \operatorname{senh} x$, $x_0 = 0$.

Sabemos que $\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. De este modo, observemos que $(e^x)^{(k)}\big|_{x_0=0} = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces $\boxed{e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{A} + R_n}$ $\Rightarrow e^{-x} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k}_{B} + \tilde{R}_n$

$\Rightarrow \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(A - B) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k!} - \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^k + \bar{R}_n$, donde $\bar{R}_n = \frac{1}{2}(R_n - \tilde{R}_n)$

Tenemos que el $p_n(x)$ de $\operatorname{senh} x$ en $x_0 = 0$ está dado por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k!}\left(1 - (-1)^k\right) x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sobreviven términos con k-impar

(b) $f(x) = x^2 - x - 2$, $x_0 = -1$.

Tenemos que $f(x_0) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0$, $f'(x_0) = 2x_0 - 1 = -3$, $f''(x_0) = 2$

$\Rightarrow a_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} = 0$, $a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} = -3$, $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} = 1$ y $a_k = 0$ $\forall k \geq 3$.

$\Rightarrow p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^n = -3(x+1) + (x+1)^2 + 0 + \cdots =$ simplicar.

2. Calcular $p_2(x)$ para:

(a) $f(x) = 3 + \int_2^{2x} e^{t^2 - 4}\, dt$, $x_0 = 1$.

Sea $g(x) = e^{-4}\int_2^{x} e^{t^2}\, dt$, entonces $f(x) = 3 + g(2x)$ $\Rightarrow a_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} = 3 + \cancelto{0}{g(2)}$

$a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} = \frac{2g'(2x_0)}{1!} = 2e^{-4}e^{4} = 2$, $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} = \frac{2^{\cancelto{3}{4}}\cancel{e^{-4}}\cancelto{1}{e^4}}{\cancel{2!}} = 8$

$f'(x) = 2g'(2x) \Rightarrow f''(x) = 4g''(2x)$

$\Rightarrow g''(2x) = \left(e^{-4}e^{4x}\right)' = 4^2 e^{-4} e^{4x}$

$\Rightarrow P_2(x) = 3 + 2(x-1) + 8(x-1)^2$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

Tenemos que $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$, entonces $a_0 = 1$. De este modo, tenemos que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(h) - f(0)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} - 1\right) \underset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{h\cosh - \operatorname{sen} h}{h^2} \underset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\cos h} - h\operatorname{sen} h - \cancel{\cos h}}{2\cancel{h}} = 0 = a_1 1!$$

Es decir, tenemos que $f'(x) = \begin{cases} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}, & \text{si } x \neq 0. \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f'(h) - f'(0)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h\cosh - \operatorname{sen} h}{h^2} - 0\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\cos h - \operatorname{sen} h}{h^3} \underset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}\operatorname{sen} h}{3h^{\cancel{2}}} = -\frac{1}{3}$$

$\therefore P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 1 - \frac{1}{3}x^2$

3. A partir del $p_n(x)$ para e^x en $x_0 = 0$, determina $p_3(x)$ de las funciones $f(x)$ en $x_0 = 0$:

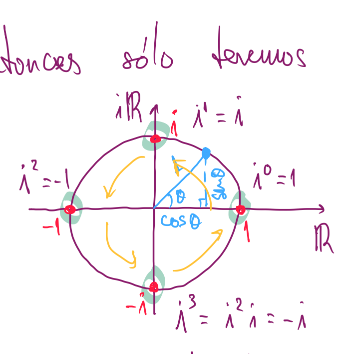
(a) $f(x) = e^{-2x}$. Dado que $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ para la función e^x en $x_0 = 0$.

$\Rightarrow \tilde{P}_3(x) = P_3(-2x) = 1 - \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} \cdots$

(b) $f(x) = e^{-x^2}$. Equivalentemente al ejercicio anterior, tenemos que

$\tilde{P}_3(x) = P_3(-x^2) = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} \cdots$

(c) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$. Tenemos la fórmula de Euler indica que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ $\forall x \in \mathbb{R}$, debido a que $e^{ix} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} + R_n$, entonces sólo tenemos que observar que:



$i^k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 4m, \\ i, & \text{si } k = 4m+1, \\ -1, & \text{si } k = 4m+2, \\ -i, & \text{si } k = 4m+3, \end{cases}$ con $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow e^{ix} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_n$

Notemos que el polinomio de Taylor de grado 3 para:

(i) $\operatorname{sen} x$: $\tilde{p}_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ y (ii) e^x: $\bar{P}_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$;

en consecuencia, el polinomio de Taylor $P_3(x)$ para $e^{\operatorname{sen} x}$ está dado por: $\boxed{P_3(x)} = \bar{P}_3(\tilde{p}_3(x)) = \boxed{1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)} + \cancel{\frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3}$

4. Obtén $P_3(x)$ para $f(x) = \arctan x$ en $x_0 = 0$ y úsalo para approximar el valor de $\frac{\pi}{4}$.

Corrección

Sabemos que $\tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{2} = \arctan 1}$. Por otro lado, la suma geométrica indica que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + R_n$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \tilde{R}_n$

$\overset{T.F.C.}{\Rightarrow} f(x) = \arctan x = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n}\, dx + \bar{R}_n =$

$= x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \bar{R}_n$

$\Rightarrow P_3(x) = x - \frac{x^3}{3}$ para $f(x)$ en $x_0 = 0$ $\Rightarrow \frac{\pi}{4} \approx \frac{2}{3}$

5. (a) Demuestra que si $|x|$ es pequeño y $0 < \alpha \leq 1$, entonces

$$(x+1)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2.$$

Sea $f(x) = (x+1)^\alpha$, la cual es diferenciable dos veces particularmente. Debido a Teo. de Taylor $f(x) = P_n(x) + R_n$; consideremos $n = 2$, entonces $a_0 = f(0) = 1$, $a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \alpha$ y $a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$

$\therefore P_2(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2.$

(b) Usa la aproximación anterior para estimar el valor de $\sqrt{1.4}$

Observemos que $\sqrt{1.4} = (1 + 0.4)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 0.4 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}(0.4)^2 \cdots$

6. (a) Determinar $P_3(x)$ de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x_0 = 2$.

Tenemos que $a_0 = f(2) = 1$, $a_1 = \frac{f'(2)}{1!} = -\frac{2}{x^2}\Big|_{x=2} = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{f''(2)}{2!} = \frac{4}{x^3}\Big|_{x=2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_3 = \frac{f'''(2)}{3!} = -\frac{12}{x^4}\Big|_{x=2} = -\frac{3}{4}$ $\therefore P_3(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{3}{4}(x-2)^3$

(b) Estima, usando el resultado anterior, el valor de $\frac{2}{2.2}$:

$\frac{2}{2.2} = \frac{2}{2+0.2} = f(2+0.2) \approx P_3(2+0.2) = 1 - \frac{1}{2}(0.2) + \frac{1}{2}(0.2)^2 - \frac{3}{4}(0.2)^3$

7. Aproximar el valor de $\sqrt{e}$ con un error menor a 0.001.

Si $f(x) = e^x$, entonces $f(1/2) = e^{1/2} = \sqrt{e}$. El Teo. de Taylor indica que $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, donde la fórmula de Lagrange para $R_n(x)$ está dada por

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}|x|^{n+1} \text{ donde } \boxed{0 \leq \xi \leq x.}$$

De este modo, tenemos que

$$|R_n(1/2)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}|1/2|^{n+1} \underset{0<e^\xi\leq e^{1/2}}{\leq} \frac{e^{1/2}}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} \underset{e^{1/2}<e}{<} \frac{e}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} \underset{e<3}{<} \frac{3}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-3} = 0.001;$$

de esta manera, la última desigualdad se satisface si $n = 3$, puesto que

$$|R_n(1/2)| < \frac{3}{4!}\frac{1}{2^4} = \frac{\cancel{3}}{2^4\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{2^7} < 10^{-3}.$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor correspondiente es

$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ en $x = 1/2$ i.e.: $e^{1/2} \approx P_3(1/2) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{(1/2)^2}{2} + \frac{(1/2)^3}{6}$

8. Determina ...

Sugerencia: usar la fórmula de Lagrange para el residuo.

9. Usando el Teorema de Taylor, demuestra que $\left|e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right| < \frac{1}{6}$ $\forall\, 0 \leq x \leq 1$.

Sabemos que $e^x = P_2(x) + R_2(x)$, donde $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ y $\underbrace{R_2(x) = \frac{e^\xi}{3!}x^3}_{\text{Fórmula de Lagrange.}}$, donde $0 \leq \xi \leq x \leq 1$.

$$\Rightarrow e^{-x} = P_2(-x) + R_2(-x) \Rightarrow |e^{-x} - P_2(-x)| = |R_2(-x)| = \frac{e^{-\xi}}{3!}|x|^3 \underset{0\leq x\leq 1,\ 0<e^{-\xi}\leq e^{-1}<1.}{<} \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

10. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ...

Sugerencia: observar que el polinomio de Taylor es de grado $m \leq n$, donde n corresponde al orden de la derivada de $f(x)$.

11. Sea $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función con segunda derivada continua en $\mathbb{R}^+$, tal que $f'(1) = 0$ y $f''(1) = -2$. Sea $\varphi(x) = f(e^x)$.

(a) Calcula $\varphi'(0)$ y $\varphi''(0)$. ¿Podría garantizarse que φ admite un extremo local en $x = 0$? ¿Máximo o mínimo?

Tenemos que $\varphi'(x) = e^x f'(e^x)$ y $\varphi''(x) = e^x\left(f'(e^x) + e^x f''(e^x)\right)$

$\Rightarrow \varphi'(0) = 0$ y $\varphi''(0) = -2$, lo cual implica que $\varphi(x)$ tiene un máximo local en $x = 0$.

(b) Escribe la fórmula de Taylor para la función φ en $x_0 = 0$ con residuo de orden 1 y utilízala para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}$$

Debido al inciso anterior, tenemos que $\varphi(x) = P_1(x) + R_1(x)$, donde

$P_1(x) = \underset{\varphi(0)}{f(1)} + \underset{\frac{\varphi'(0)}{1!}}{0}\cdot x$ y $R_1(x) = \frac{\varphi''(\xi)}{2!}x^2$, donde $\xi \in [0, x]$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(e^x) - f(1)}{x^2} + \frac{\varphi''(\xi)}{2!}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{f(e^x) - f(1)}{x^2} +$$

$$+ \lim_{x\to 0} \frac{\varphi''(\xi)}{2!} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x \cancelto{0}{f'(e^x)}}{\cancelto{0}{2x}} + \frac{-2}{2!} =$$

$$\underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2}\left(\cancelto{0}{f'(e^x)} + e^x \cancelto{-2}{f''(e^x)}\right) - 1 = -2$$

12. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $f \in C^3(I)$. Usa la fórmula de Taylor para demostrar que, para cualquier $a \in I$,

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)\right)$$

Tenemos que para $a \in I$:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + R_2(a+h)$$

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + R_2(a-h)$$

$$\Rightarrow f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = \cancel{f(a)} + \cancel{f'(a)h} + f''(a)\frac{h^2}{2} + R_2(a+h) - \cancel{2f(a)} +$$

$$+ \cancel{f(a)} - \cancel{f'(a)h} + f''(a)\frac{h^2}{2} + R_2(a-h) =$$

$$= f''(a)h^2 + R_2(a+h) + R_2(a-h).$$

$$\Rightarrow f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - \lim_{h\to 0} \frac{R_2(a+h) + R_2(a-h)}{h^2},$$

donde $\lim_{h\to 0}\left|\frac{R_2(a+h) + R_2(a-h)}{h^2}\right| \leq \lim_{h\to 0}\left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\frac{h^{\cancel{3}}}{\cancel{h^2}}\right| + \lim_{h\to 0}\left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\frac{h^{\cancel{3}}}{\cancel{h^2}}\right| = 0$

Fórmula de Lagrange y Desigualdad del triángulo

donde $|\xi - a| \leq h$