MATEMÁTICAS II

Notas de clase

Ramón Espinosa

Departamento de Matemáticas, ITAM

Resumen

El propósito de estas notas es presentar algunos temas que se ven en el curso de Matemáticas II en el ITAM. En particular se discuten las nociones de producto vectorial, rectas y planos en el espacio tridimensional, continuidad, límites y diferenciación de trayectorias y de funciones de varias variables. El orden de los temas es el orden que se sugiere que se siga en el curso. El material de estas notas suponen que el alumno está familiarizado con vectores, geometría en el plano y determinantes de orden dos y tres.

1. El producto vectorial

El **producto vectorial** de dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, se define como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1).$$

Es decir,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

O también

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Esta última expresión se puede representar como el determinante simbólico:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

El siguiente teorema establece que el producto vectorial de dos vectores es ortogonal a cada uno de esos vectores.

Teorema 1. *Sean* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$*, entonces* $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$ *y* $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

Demostración.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

porque tiene dos renglones iguales. Análogamente, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$. $\square$

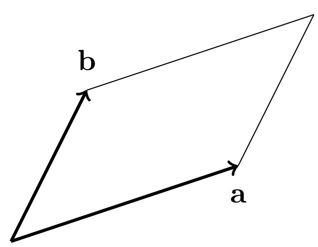
El siguiente teorema establece una importante identidad relacionando el producto vectorial con el producto escalar. La demostración se deja al lector.

Teorema 2 (Identidad de Lagrange). *Sean* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$*, entonces*

$$||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 ||\boldsymbol{b}||^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2.$$

El **paralelogramo** generado por dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ es el conjunto

$$\{\, s\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b} \;\mid\; s, t \in [0,1] \,\}.$$



Teorema 3. *Sean* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$*. El área del paralelogramo generado por* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *es igual a*

$$||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||.$$

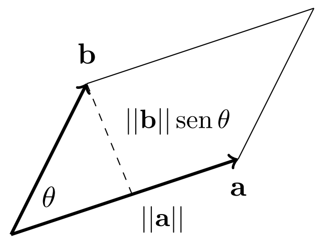
Demostración. Por la identidad de Lagrange

$$\begin{aligned} ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||^2 &= ||\mathbf{a}||^2 ||\mathbf{b}||^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= ||\mathbf{a}||^2 ||\mathbf{b}||^2 - ||\mathbf{a}||^2 ||\mathbf{b}||^2 \cos\theta \\ &= ||\mathbf{a}||^2 ||\mathbf{b}||^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{aligned}$$

De ahí que

$$||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}|| \operatorname{sen} \theta,$$

pero este número es precisamente el área del paralelogramo generado por **a** y **b**.



□

Ejemplo 1. Calcular el área del paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{a} = (2, 0, 1)$ y $\mathbf{b} = (1, 2, -1)$.

Solución.

$$(2, 0, 1) \times (1, 2, -1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 3, 4).$$

Por lo tanto el área del paralelogramo es $||(-2, 3, 4)|| = \sqrt{29}$. △

Ejemplo 2. Calcular el área del paralelogramo en el plano generado por los vectores (a, b) y (c, d).

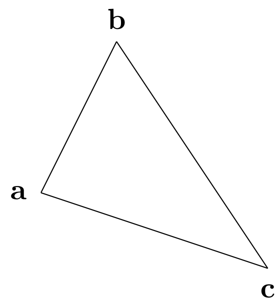
Solución. Para calcular el producto vectorial debemos ver a estos vectores como vectores en el espacio tridimensional (con la última componente igual a cero). Observemos que

$$(a, b, 0) \times (c, d, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, ad - bc),$$

y por lo tanto el área del paralelogramo es igual a $|ad - bc|$. △

El ejemplo anterior muestra que el valor absoluto del determinante de una matriz cuadrada de orden 2 es igual al área del paralelogramo generado por los vectores renglón.

Obsérvese que el área de un triángulo con vértices **a**, **b** y **c**



es igual a

$$\frac{1}{2}||\,(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})\,||,$$

porque el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo con lados $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}-\mathbf{a}$.

Ejemplo 3. Calcular el área del triángulo con vértices: $\mathbf{a} = (1, 0, -2)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 0)$ y $\mathbf{c} = (2, -1, 1)$.

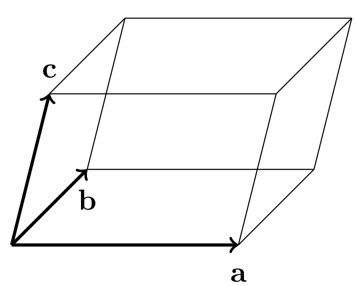
Solución.

$$(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5, 8, 1),$$

Por lo tanto el área del triángulo es $\sqrt{90}/2$. $\triangle$

El **paralelepípedo** generado por tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ es el conjunto

$$\{\, r\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{b} + t\,\mathbf{c} \;\mid\; r, s, t \in [0,1]\,\}.$$

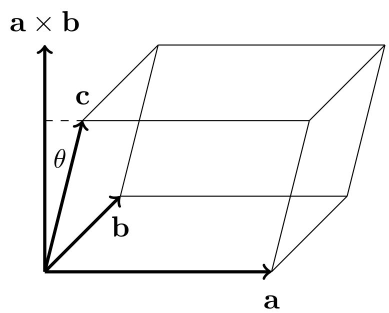


Teorema 4. *Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$. El volumen del paralelepípedo generado por $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ es igual a*

$$|\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\,|.$$

Demostración. El volumen del paralelepípedo es igual al área de la base por la altura. Ahora bien, el área de la base es el área del paralelogramo generado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, es decir, $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||$. Por otra parte, la altura del paralelepípedo es igual a $||\mathbf{c}||\,|\cos\theta|$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Por lo tanto el volumen del paralelepípedo es

$$||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\,||\mathbf{c}||\,|\cos\theta| = |\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\,|.$$



□

El número $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ es llamado el **triple producto escalar** de los vectores $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 4. Calcular el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\mathbf{a} = (2, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -1)$ y $\mathbf{c} = (3, 2, 2)$.

Solución. En el ejemplo 1 vimos que $(2, 0, 1) \times (1, 2, -1) = (-2, 3, 4)$. Por lo tanto el volumen del paralelepípedo es igual a

$$|\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\,| = |\,(-2, 3, 4) \cdot (3, 2, 2)\,| = 8.$$

△

Es fácil ver que si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, entonces

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

De modo que el valor absoluto del determinante de una matriz cuadrada de orden 3 es igual al volumen del paralelepípedo generado por los vectores renglón.

En general, el determinante de una matriz cuadrada de orden n se puede interpretar como el hipervolumen del sólido generado por los vectores renglón de la matriz. En el caso particular $n = 1$ tenemos la longitud de un segmento de recta.

2. Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

Una **recta** en $\mathbb{R}^3$ es un conjunto de la forma:

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} \ \mid \ t \in \mathbb{R}\},$$

donde $\mathbf{p}_0$ es un punto por el que pasa la recta y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es un vector dirección de la recta. La ecuación

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

es llamada **ecuación vectorial de la recta**. Si escribimos $\mathbf{p} = (x, y, z)$, $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, e igualamos componente a componente, obtenemos las **ecuaciones paramétricas de la recta**:

$$x = x_0 + t\,v_1, \quad y = y_0 + t\,v_2, \quad z = z_0 + t\,v_3, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Si además $v_i \neq 0$ para toda $i = 1, 2, 3$, podemos despejar el parámetro t e igualar para obtener las **ecuaciones simétricas de la recta**:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

Obsérvese que la recta que pasa por los puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ está descrita por la ecuación vectorial

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 5. Determinar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos $\mathbf{a} = (2, 3, 4)$ y $\mathbf{b} = (6, 2, 1)$.

Solución. $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (4, -1, -3)$, por lo tanto las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$x = 2 + 4t, \quad y = 3 - t, \quad z = 4 - 3t.$$

Las ecuaciones simétricas de la recta son

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z - 4}{-3}$$

△

Obsérvese que el conjunto de puntos descritos por la ecuación

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \qquad 0 \le t \le 1,$$

representan el **segmento de recta** que une los puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Esta ecuación es equivalente a la ecuación

$$\mathbf{p} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Obsérvese que si $t = 0$ obtenemos el punto $\mathbf{a}$, y si $t = 1$ obtenemos el punto $\mathbf{b}$. Si $t = 1/2$ obtenemos el punto medio del segmento de recta. Análogamente, los puntos correspondientes a $t = 1/3$ y $t = 2/3$, trisecan el segmento de recta.

Dos rectas son **paralelas** si sus vectores dirección lo son. A diferencia de lo que sucede en el plano, dos rectas no paralelas en $\mathbb{R}^3$ pueden no intersertarse. Dos rectas no paralelas que no se intersectan se dice que son **oblicuas**.

Ejemplo 6. Determinar si las rectas

$$\mathcal{L}_1 : \qquad x = 3 + t_1, \quad y = -1, \quad z = 7 + 4t_1,$$

$$\mathcal{L}_2 : \qquad x = 8 + 3t_2, \quad y = 1 + t_2, \quad z = -1 - 2t_2,$$

se intersectan.

Solución. Igualando cada una de las variables obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} 3 + t_1 &= 8 + 3t_2 \\ -1 &= 1 + t_2 \\ 7 + 4t_1 &= -1 - 2t_2 \end{aligned}$$

el cual es consistente y tiene solución $t_1 = -1$, $t_2 = -2$. Sustituyendo cualquiera de estos valores obtenemos el punto de intersección $\mathbf{p}_0 = (2, -1, 3)$. $\triangle$

Ejemplo 7. Determinar si las rectas

$$\mathcal{L}_1 : \qquad x = 1 + 4t_1, \quad y = 2 + t_1, \quad z = 5 - t_1,$$

$$\mathcal{L}_2 : \qquad x = 2 - t_2, \quad y = 3 + 2t_2, \quad z = 1 + t_2,$$

se intersectan.

Solución. Igualando cada una de las variables obtenemos el sistema

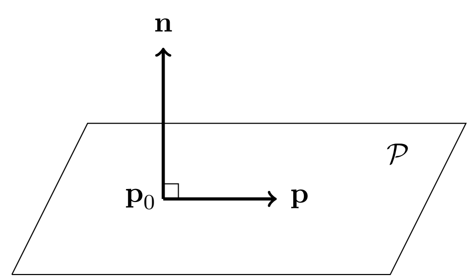
$$\begin{aligned} 1 + 4t_1 &= 2 - t_2 \\ 2 + t_1 &= 3 + 2t_2 \\ 5 - t_1 &= 1 + t_2 \end{aligned}$$

el cual es inconsistente, por lo tanto las rectas son oblicuas. $\triangle$

Un **plano** en $\mathbb{R}^3$ es un conjunto de la forma:

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0\},$$

donde $\mathbf{p}_0$ es un punto por el que pasa el plano y $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ es llamado un **vector normal** al plano.



La ecuación

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0$$

es llamada **ecuación punto-normal del plano**. Esta ecuación es equivalente a la ecuación $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_0$. Si escribimos $\mathbf{p} = (x, y, z)$, $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{n} = (a, b, c)$ y $d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_0$, obtenemos la **ecuación lineal del plano**:

$$ax + by + cz = d.$$

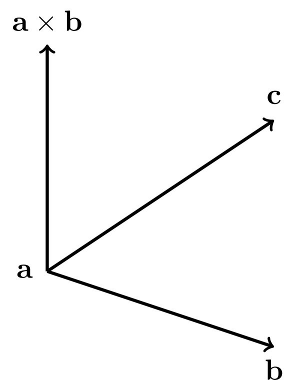
Ejemplo 8. Determinar la ecuación lineal del plano que contiene a las rectas del ejemplo 6.

Solución. El punto por el que pasa es el plano es $\mathbf{p}_0 = (2, -1, 3)$, el punto de intersección de las rectas. Ahora bien, un vector normal al plano debe ser ortogonal tanto a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 4)$, el vector dirección de $\mathcal{L}_1$ como a $\mathbf{v}_2 = (3, 1, -2)$, el vector dirección de $\mathcal{L}_2$. Es decir,

$$\mathbf{n} = (1, 0, 4) \times (3, 1, -2) = (-4, 14, 1).$$

Por lo que la ecuación lineal del plano es $-4x + 14y + z = -19$. $\triangle$

Obsérvese que si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ son no colineales, entonces existe un único plano que los contiene, el cual pasa por $\mathbf{p}_0 = \mathbf{a}$ y tiene vector normal $\mathbf{n} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})$.



Ejemplo 9. Determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos $\mathbf{a} = (4, 1, 3)$, $\mathbf{b} = (2, 0, 1)$ y $\mathbf{c} = (-1, 5, 2)$.

Solución. $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2, -1, -2)$ y $\mathbf{c} - \mathbf{a} = (-5, 4, -1)$.

$$(-2, -1, -2) \times (-5, 4, -1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ -5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (9, 8, -13),$$

Obsérvese además que $(9, 8, -13) \cdot (4, 1, 3) = 5$, por lo tanto la ecuación lineal del plano que pasa por los tres puntos es:

$$9x + 8y - 13z = 5.$$

$\triangle$

Ejemplo 10. Determinar la intersección de los planos:

$$x + 2y - z = 3 \qquad \text{y} \qquad 2x - y + 3z = 5.$$

Solución. El problema es equivalente a resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x - y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

Utilizando el método de reducción de Gauss-Jordan tenemos que

$$\left(\begin{array}{rrrcr} 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & -5 & 5 & | & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrcr} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto la intersección de los planos es la recta descrita por las ecuaciones paramétricas:

$$x = 1 - t, \qquad y = 1 + t, \qquad z = t.$$

$\triangle$

Ejemplo 11. Determinar la intersección de la recta

$$x = 3 - t, \qquad y = 1 + 2t, \qquad z = -2 + 3t.$$

con el plano

$$2x + y + 3z = 5.$$

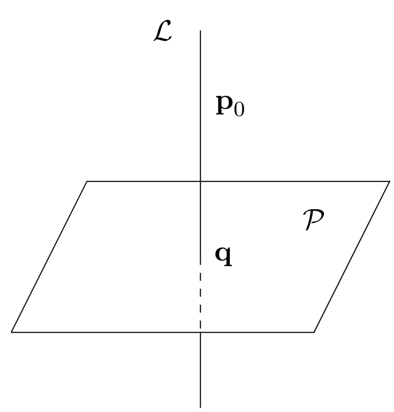
Solución. Sustituyendo las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano, tenemos que

$$2(3 - t) + (1 + 2t) + 3(-2 + 3t) = 5,$$

de ahí que $t = 4/9$ y por lo tanto el punto de intersección es $\mathbf{q} = (23/9, 17/9, -2/3)$. $\triangle$

Distancia de un punto a un plano.

Supongamos que queremos calcular la distancia de un punto $\mathbf{p}_0$ a un plano $\mathcal{P}$. Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por $\mathbf{p}_0$ y que es perpendicular al plano. Es decir, el vector dirección de $\mathcal{L}$ es el vector normal al plano. Sea $\mathbf{q}$ el punto de intersección de la recta y el plano. Entonces la distancia buscada es $d = ||\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}||$.



Ejemplo 12. Calcular la distancia del punto $p_0 = (-5, 0, 3)$ al plano

$$x + 2y - z = 7.$$

Solución. La recta que pasa por $\mathbf{p}_0$ y es perpendicular al plano es

$$x = -5 + t, \quad y = 2t, \quad z = 3 - t.$$

Al intersectar la recta con el plano tenemos que

$$(-5 + t) + 2(2t) - (3 - t) = 7,$$

de ahí que $t = 5/2$. Sustituyendo en las ecuaciones de la recta obtenemos el punto de intersección $\mathbf{q} = (-5/2,\ 5,\ 1/2)$. Por lo tanto la distancia del punto al plano es $d = ||\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}|| = ||(5/2,\ 5,\ -5/2)|| = 5\sqrt{6}/2$. $\triangle$

Dos planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ se dice que son **paralelos** si sus vectores normales lo son.

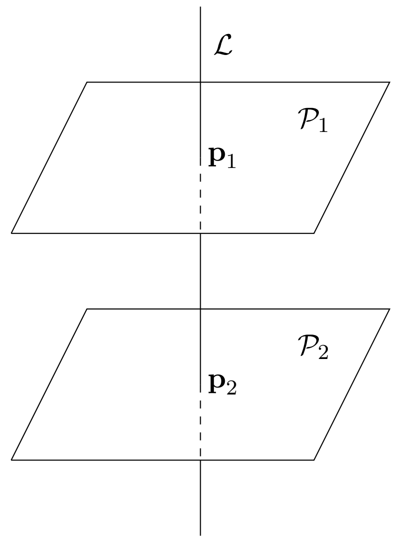
Ejemplo 13. Los planos

$$6x - 4y + 8z = 5, \qquad 3x - 2y + 4z = 7$$

son paralelos, porque $(6, -4, 8) = 2(3, -2, 4)$. $\triangle$

Distancia entre planos paralelos.

Para calcular la distancia entre dos planos paralelos basta considerar una recta $\mathcal{L}$ perpendicular a ambos planos, es decir, el vector dirección de $\mathcal{L}$ puede ser alguno de los vectores normales de los planos en consideración. La recta $\mathcal{L}$ puede pasar por cualquier punto, en particular por el origen. Sean $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ los puntos de intersección de la recta $\mathcal{L}$ con los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, respectivamente. Entonces la distancia entre los planos es $d = ||\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2||$.



Ejemplo 14. Calcular la distancia entre los planos paralelos

$$4x + y + 3z = 7, \quad \text{y} \quad 4x + y + 3z = 11.$$

Solución. La recta

$$L: \qquad x = 4t, \quad y = t, \quad z = 3t,$$

es perpendicular a los planos. Los puntos de intersección son

$$\mathbf{p}_1 = (28/26,\ 7/26,\ 21/26) \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_2 = (28/26,\ 7/26,\ 21/26).$$

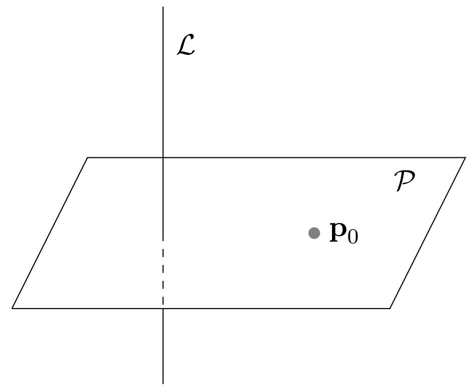
Por lo tanto la distancia entre los planos es

$$d = ||\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|| = ||(16/26,\ 4/26,\ 12/26)|| = 4/\sqrt{26}.$$

$\triangle$

Distancia de un punto a una recta.

Para calcular la distancia de un punto $\mathbf{p}_0$ a una recta $\mathcal{L}$, consideremos el plano $\mathcal{P}$ que pasa por $\mathbf{p}_0$ y cuyo vector normal es el vector dirección de $\mathcal{L}$. Sea $\mathbf{q}$ el punto de intersección de la recta y el plano, entonces la distancia del punto a la recta es $d = ||\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}||$.



Ejemplo 15. Calcular la distancia del punto $\mathbf{p}_0 = (2, 1, 3)$ a la recta $x = 2 - t, \quad y = 3 + t, \quad z = -2 - 2t.$

Solución. El plano que pasa por p_0 y que es perpendicular a la recta es:

$$-x + y - 2z = -7.$$

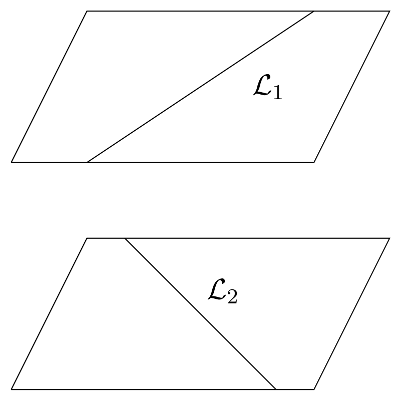
Para determinar el punto de intersección de la recta y el plano obsérvese que

$$-(2 - t) + (3 + t) - 2(-2 - 2t) = -7,$$

de ahí que $t = -2$ y por lo tanto el punto de intersección es $\mathbf{q} = (4, 1, 2)$. De ahí que la distancia del punto a la recta es $d = ||\mathbf{q} - \mathbf{p}_0|| = ||(2, 0, -1)|| = \sqrt{5}$.
$\triangle$

Distancia entre rectas oblicuas.

Supongamos que queremos calcular la distancia entre dos rectas oblicuas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, descritas por las ecuaciones vectoriales $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + t\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 + t\mathbf{v}_2$, respectivamente. Como las rectas no se intersectan, deben estar contenidas en planos paralelos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, respectivamente, como muestra la figura de abajo.



Un vector normal a dichos planos es $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Por lo que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ están descritos por las ecuaciones $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_1$ y $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_2$, respectivamente. La distancia entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es la distancia entre $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

Ejemplo 16. Calcular la distancia entre las rectas oblicuas

$$\mathcal{L}_1 : \qquad x = 1 + 4t_1, \quad y = 2 + t_1, \quad z = 5 - t_1,$$

$$\mathcal{L}_2 : \qquad x = 2 - t_2, \quad y = 3 + 2t_2, \quad z = 1 + t_2.$$

Solución. $\mathbf{n} = (4, 1, -1) \times (-1, 2, 1) = (3, -3, 9)$. Por lo que los planos que contienen a las rectas son

$$x + y + 3z = 14, \qquad x + y + 3z = 2.$$

La recta

$$\mathcal{L} : \qquad x = t, \quad y = t, \quad z = 3t,$$

es perpendicular a ambos planos.

Los puntos de intersección de la recta con los planos son

$$\mathbf{q}_1 = (14/11,\ -14/11,\ 42/11) \quad \text{y} \quad \mathbf{q}_2 = (2/11,\ -2/11,\ 6/11)$$

por lo que la distancia entre las rectas es

$$||\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|| = ||(12/11,\ -12/11,\ 36/11)|| = \frac{12}{\sqrt{11}}.$$

$\triangle$

3. Trayectorias

Una **trayectoria en el plano** es una función $\mathbf{g} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, es decir, $g(t)$ es una función de una variable, definida en un conjunto I (usualmente un intervalo), y cuyos valores son puntos en el plano cartesiano. Podemos escribir $\mathbf{g}(t) = (x, y)$, donde $x = x(t),\ y = y(t)$ son llamadas las **funciones componentes** de la trayectoria, obsérvese que estas funciones son funciones reales de variable real. El conjunto

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{g}(t) \ \mid \ t \in I\}$$

es llamado la **curva** descrita por la trayectoria.

Ejemplo 17. La trayectoria

$$\mathbf{g}(t) = (1 + 2t, 2 - 3t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

tiene componentes

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 - 3t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

las cuales corresponden a las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y tiene vector dirección $(2, -3)$. $\triangle$

Ejemplo 18. Sea $a > 0$ fijo. La curva descrita por la trayectoria

$$\mathbf{g}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

es un círculo de radio a con centro en el origen, descrito en sentido contrario a las manecillas del reloj. $\triangle$

Ejemplo 19. Sean $a > 0$ y $b > 0$, fijos. La curva descrita por la trayectoria

$$\mathbf{g}(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

es una elipse con semiejes a y b, recorrida en sentido contrario a las manecillas del reloj. $\triangle$

Sea $\mathbf{g}(t)$ una trayectoria en el plano. Supongamos que $\mathbf{g}$ está definida en un intervalo I, excepto posiblemente en $t_0 \in I$. Se dice que

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{g}(t) = \mathbf{A},$$

si $\mathbf{g}(t)$ está arbitrariamente cerca $\mathbf{A}$, si t está suficientemente cerca de t_0.

Formalmente, si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces $||\mathbf{g}(t) - \mathbf{A}|| < \varepsilon$.

El siguiente teorema establece cómo podemos calcular el límite de una trayectoria, calculando el límite de sus componentes.

Teorema 5. *Sea $\boldsymbol{g}(t) = (x, y)$ una trayectoria en el plano. Entonces*

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{g}(t) = (a_1, a_2),$$

si y sólo si

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1 \quad y \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2.$$

Ejemplo 20. Calcular

$$\lim_{t \to 0} (\operatorname{sen} t / t,\ 2 \cos t).$$

Solución. Como

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1, \qquad \lim_{t \to 0}\ 2 \cos t = 2,$$

se sigue del teorema anterior que

$$\lim_{t \to 0} (\operatorname{sen} t / t,\ 2 \cos t) = (1, 2).$$

$\triangle$

Sea $\mathbf{g}(t)$ una trayectoria definida en un intervalo I. Se dice que $\mathbf{g}$ es **continua** en $t_0 \in I$ si

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{g}(t) = \mathbf{g}(t_0).$$

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del teorema anterior.

Teorema 6. *Sea $\boldsymbol{g}(t) = (x, y)$ una trayectoria definida en un intervalo I. Entonces $\boldsymbol{g}$ es continua en $t_0 \in I$, si y sólo si $x(t)$ y $y(t)$ son continuas en t_0.*

Ejemplo 21. La trayectoria $\mathbf{g}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es continua en $\mathbb{R}$, porque las funciones componentes $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ lo son. $\triangle$

Sea $\mathbf{g}(t) = (x, y)$ una trayectoria definida en un intervalo abierto I. Se dice que g es **diferenciable** en $t_0 \in I$ si

$$\lim_{t \to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$$

existe. En este caso el valor límite se denota $g'(t_0)$ y se le llama la **derivada** de g en t_0.

El siguiente teorema muestra cómo calcular la derivada de una trayectoria.

Teorema 7. *Sea $\boldsymbol{g}(t) = (x, y)$ una trayectoria definida en un intervalo abierto I. Entonces $\boldsymbol{g}$ es diferenciable en t_0 si y sólo si $x(t)$ y $y(t)$ son diferenciables en t_0. Además $\boldsymbol{g}'(t_0) = (x'(t_0),\ y'(t_0))$.*

Ejemplo 22. Si $\mathbf{g}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, entonces $g'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Si $\mathbf{g}(t)$ es una trayectoria diferenciable en t_0 y además $g'(t_0) \neq (0, 0)$ se dice que $g'(t_0)$ es el **vector tangente** a la curva descrita por la trayectoria en el punto $g(t_0) = (x_0, y_0)$. En este caso la **recta tangente** a la trayectoria está descrita por las ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + (t - t_0)x'(t_0), \quad y = y_0 + (t - t_0)y'(t_0).$$

Obsérvese que la recta pasa por (x_0, y_0) cuando $t = t_0$.

Ejemplo 23. Determinar la recta tangente a la trayectoria $\mathbf{g}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, cuando $t = \pi/2$.

Solución. $\mathbf{g}'(\pi/2) = (-\operatorname{sen} \pi/2, \cos \pi/2) = (-1, 0)$, por lo que la recta tangente en el punto $\mathbf{g}(\pi/2) = (0, 1)$ es:

$$x = 0 - (t - \pi/2)(-1) = \pi/2 - t, \quad y = 1 + (t - \pi/2)0 = 1.$$

$\triangle$

Ejemplo 24. Consideremos la trayectoria $\mathbf{g}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$. Obsérvese que $\mathbf{g}'(t) = (1 - \cos t, \operatorname{sen} t)$, para todo número real t, sin embargo, $\mathbf{g}'(2\pi) = (0, 0)$, por lo que no existe la recta tangente en este punto. La razón de esto es que en dicho punto la curva tiene un pico. $\triangle$

Análogamente se puede definir la noción de trayectoria en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ y en general en $\mathbb{R}^n$. Las trayectorias jugarán un papel importante en los siguientes temas.

4. Funciones de varias variables

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es decir, $f(x,y)$ es una función de dos variables, definida en un conjunto Ω, que toma valores reales. Con frecuencia se describe una función $f(x,y)$ a partir de una regla de correspondencia, sin especificar el conjunto donde está definida, en este caso el **dominio natural** de $f(x,y)$ es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}^2$ donde la regla está bien definida.

Ejemplo 25. El dominio natural de la función

$$f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{y-x}},$$

es el conjunto:

$$\{(x,y) \ \mid \ y > x\}.$$

$\triangle$

La **gráfica** de $f(x,y)$ es el conjunto:

$$\{(x,y,z) \ \mid \ (x,y) \in \Omega, \ z = f(x,y)\}.$$

Obsérvese que la gráfica de $f(x,y)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

El **rango** de $f(x,y)$ es el conjunto:

$$\{f(x,y) \mid \ (x,y) \in \Omega\},$$

es decir, el rango de una función es el conjunto de todos los posibles valores de la función.

Si c es un número real, la **curva de nivel** c de $f(x,y)$ es el conjunto:

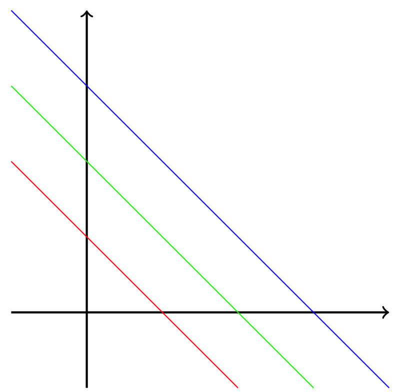
$$\mathcal{N}_c(f) = \{(x,y) \in \Omega \ \mid \ f(x,y) = c\}.$$

Las curvas de nivel son útiles para describir la gráfica de una función $f(x,y)$, pero a veces éstas no son suficientes, es necesario describir también las intersecciones de la gráfica con los planos xz y yz, estas intersecciones son llamadas las **trazas** de $f(x,y)$. Más precisamente, la intersección de la gráfica con el plano xz está descrita por la ecuación: $z = f(x,0)$, análogamente la ecuación $z = f(0,y)$, describe la traza de $f(x,y)$ en el plano yz.

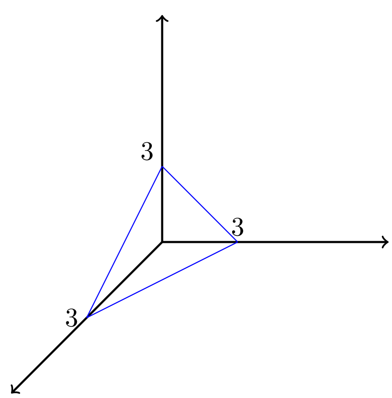
Ejemplo 26. Sea $f(x,y) = 3 - x - y$. El dominio natural es $\mathbb{R}^2$. La curva de nivel c es el conjunto descrito por la ecuación:

$$3 - x - y = c$$

por lo que las curvas de nivel son rectas paralelas.



Las trazas están definidas por las ecuaciones: $z = 3 - x$ y $z = 3 - y$ y corresponden a rectas en los planos xz y yz, respectivamente. Esto es claro si observamos que la gráfica $z = 3 - x - y$ corresponde al plano $x + y + z = 3$.

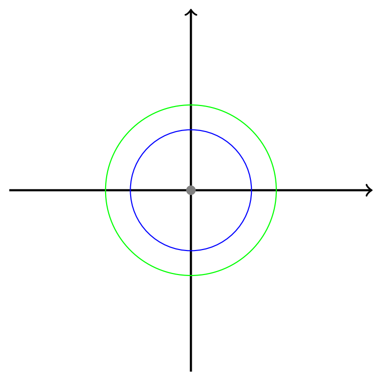


△

Ejemplo 27. La función $f(x,y) = x^2 + y^2$ está definida para todo punto en el plano. La curva de nivel c es el conjunto descrito por la ecuación:

$$x^2 + y^2 = c.$$

Si $c > 0$ la curva de nivel es el círculo de radio $\sqrt{c}$ y centro en el origen. Cuando c tiende a cero por la derecha los círculos son cada vez más pequeños. Si $c = 0$ la curva de nivel consta solamente del origen, y si $c < 0$ la curva de nivel es el conjunto vacío.

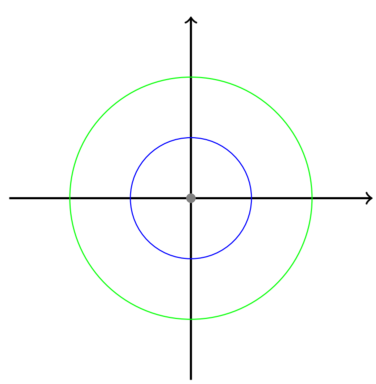


Las trazas están descritas por las ecuaciones $z = x^2$ y $z = y^2$ y corresponden a parábolas. En este caso la gráfica es un paraboloide de revolución, obtenido al girar cualquiera de las trazas alrededor del eje z. Obsérvese que el rango es el intervalo $[0, \infty)$. △

Ejemplo 28. La función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ está definida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La curva de nivel c es el conjunto descrito por la ecuación:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c.$$

Obsérvese que si $c < 0$ la curva de nivel es el conjunto vacío. Si $c = 0$ la curva de nivel consta solamente del origen. Si $c > 0$ la curva de nivel es el círculo de radio c y centro en el origen. Al igual que en el ejemplo anterior, cuando c tiende a cero por la derecha los círculos son cada vez más pequeños.



Las trazas están descritas por las ecuaciones $z = \sqrt{x^2} = |x|$ y $z = |x|$. En este caso la gráfica es un cono. Al igual que en el ejemplo anterior, el rango es el intervalo $[0, \infty)$. $\triangle$

Ejemplo 29. La función $f(x, y) = x^2 - y^2$ está definida para todo punto en el plano. La curva de nivel 0 es el conjunto descrito por la ecuación: $x^2 = y^2$, equivalentemente $y = \pm x$, es decir, la curva de nivel cero son dos rectas que pasan por el origen. La curva de nivel $c = 1$ es la hipérbola horizontal:

$$x^2 - y^2 = 1,$$

en general las curvas de nivel positivo son hipérbolas horizontales. La curva de nivel $c = -1$ es la hipérbola vertical:

$$y^2 - x^2 = 1,$$

y en general las curvas de nivel negativo son hipérbolas verticales. Las trazas están descritas por las ecuaciones $z = x^2$ y $z = -y^2$ y corresponden a una parábola hacia arriba y una parábola hacia abajo, respectivamente. La gráfica de esta función es llamada paraboloide hiperbólico, y tiene forma de silla de montar. En este caso el origen es el punto de ensilladura, o punto silla. $\triangle$

Las curvas de nivel de una función pueden recibir distintos nombres de acuerdo al contexto. Si $f(x, y)$ es una función de producción (que depende de dos insumos), las curvas de nivel se llaman isocuantas. Si $f(x, y)$ es una función de costos las curvas de nivel son llamadas curvas de isocostos. Si $f(x, y)$ es una función de utilidad las curvas de nivel son llamadas curvas de indiferencia.

Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, es una función de tres variables, la gráfica es un subconjunto de $\mathbb{R}^4$, por lo que no podemos visualizarla. Sin embargo tiene sentido definir el análogo a una curva de nivel.

La **superficie de nivel** c de una función $f(x, y, z)$ es el conjunto:

$$\mathcal{N}_c(f) = \{(x, y, z) \in \Omega \ \mid \ f(x, y, z) = c\}.$$

Ejemplo 30. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Para cada $c > 0$ la superficie de nivel c es la esfera de radio $\sqrt{c}$. La superficie de nivel cero es el origen, es decir, $\mathcal{N}_c(f) = \{(0, 0, 0)\}$, y si $c < 0$ entonces $\mathcal{N}_c(f) = \emptyset$. $\triangle$

En general, el **conjunto de nivel** c de una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define como:

$$\mathcal{N}_c(f) = \{\mathbf{x} \in \Omega \ \mid \ f(\mathbf{x}) = c\}.$$

Aquí $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$.

5. Continuidad y límites

Una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice que es **continua** en $(x_0, y_0) \in \Omega$, si $f(x, y)$ está arbitrariamente cerca $f(x_0, y_0)$, si (x, y) está suficientemente cerca de (x_0, y_0).

Formalmente, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

entonces $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Se dice que f es continua en Ω si f es continua en cada punto en Ω.

Ejemplo 31. Mostrar que la función constante $f(x, y) = c$, es continua en $\mathbb{R}^2$.

Solución. Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Obsérvese que $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |c - c| = 0$, por lo que dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar cualquier $\delta > 0$ para asegurar que $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$, si $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. △

Ejemplo 32. Mostrar que la función $P_1(x, y) = x$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

Solución. Obsérvese que

$$|P_1(x, y) - P_1(x_0, y_0)| = |x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

por lo que dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon$. △

La función $P_1(x, y)$ es llamada la primera proyección. Análogamente se puede probar que la segunda proyección $P_2(x, y) = y$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

A partir de la definición formal de continuidad se pueden probar las siguientes propiedades de funciones continuas.

Teorema 8. *Si $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son continuas en (x_0,y_0), entonces*
(1) $cf(x,y)$ es continua en (x_0,y_0), para todo $c \in R$.
(2) $f(x,y)+g(x,y)$ es continua en (x_0,y_0).
(3) $f(x,y)g(x,y)$ es continua en (x_0,y_0).
(4) Si $g(x_0,y_0) \neq 0$, entonces $f(x,y)/g(x,y)$ es continua en (x_0,y_0).

Ejemplo 33. Mostrar que la función $f(x,y) = 3-x-y$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

Solución. Como la función constante 3 es continua en $\mathbb{R}^2$, y también lo son las funciones proyección $P_1(x,y) = x$ y $P_2(x,y) = y$, se sigue de las propiedades (1) y (2) del teorema anterior que $f(x,y) = 3-x-y$ es continua en $\mathbb{R}^2$. △

Ejemplo 34. Mostrar que la función $f(x,y) = x^2+y^2$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

Solución. Hemos visto que la función $P_1(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$, de ahí que, por la propiedad (3) del teorema, $x^2 = P_1(x,y)P_1(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$. Análogamente la función y^2 es continua en $\mathbb{R}^2$, por lo que, por la propiedad (2), la función $f(x,y) = x^2+y^2$ es continua en $\mathbb{R}^2$. △

Teorema 9. *Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en $(x_0,y_0) \in \Omega$ y $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $t_0 = f(x_0,y_0) \in I$, entonces $g \circ f$ es continua en (x_0,y_0).*

Ejemplo 35. Mostrar que la función $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

Solución. Hemos visto que la función $f(x,y) = x^2+y^2$ es continua en $\mathbb{R}^2$. Además $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Por otra parte la función $g(t) = \sqrt{t}$ es continua en $[0,\infty)$, de ahí que, por el teorema anterior, la función $h(x,y) = (g \circ f)(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es continua en $\mathbb{R}^2$. △

Ejemplo 36. Mostrar que la función

$$h(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

es continua si $(x,y) \neq (0,0)$.

Solución. La función $f(x,y) = x^2$ es continua en $\mathbb{R}^2$. Por el ejemplo anterior, la función $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ también es continua en $\mathbb{R}^2$. Además si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces $g(x,y) > 0$, por lo que, por el teorema 8, $h(x,y)$ es continua si $(x,y) \neq (0,0)$. △

La función del ejemplo anterior no está definida en el punto $(x_0, y_0) = (0,0)$, sin embargo este punto tiene la propiedad de que podemos acercarnos a él tanto como queramos por puntos en el dominio de la función. Por lo que tiene sentido discutir el comportamiento de la función en este punto.

Un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se dice que es un **punto de acumulación** de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, si existen puntos en Ω distintos de (x_0, y_0) que están arbitrariamente cerca de (x_0, y_0).

Formalmente, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $(x, y) \in \Omega$, tal que

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon.$$

Obsérvese que un punto de acumulación de un conjunto no necesariamente pertenece al conjunto.

Ejemplo 37. Consideremos el conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \ \mid \ 0 < x^2 + y^2 < 1\}.$$

Obsérvese que un punto (x_0, y_0) es punto de acumulación de Ω si y sólo si $x_0^2 + y_0^2 \leq 1$. $\triangle$

Ejemplo 38. Consideremos el conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \ \mid \ x + y \neq 0\}.$$

Obsérvese que todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es punto de acumulación de Ω. $\triangle$

Sea $f(x, y)$ una función definida en un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, y sea (x_0, y_0) un punto de acumulación de Ω. Se dice que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a,$$

si $f(x, y)$ está arbitrariamente cerca de a cuando $(x, y) \in \Omega$ está suficientemente cerca de (x_0, y_0).

Formalmente, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $(x, y) \in \Omega$ satisface $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$, entonces $|f(x, y) - a| < \varepsilon$.

Obsérvese que si además $(x_0, y_0) \in \Omega$, entonces $f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0) si y sólo si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Ejemplo 39. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} x^2 - y^2.$$

Solución. La función $f(x,y) = x^2 - y^2$ es continua en $\mathbb{R}^2$, de ahí que

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} x^2 - y^2 = 2^2 - (-1)^2 = 3.$$

△

Ejemplo 40. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Solución. En este caso la función no está definida en $(0,0)$. Para calcular el límite obsérvese que

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Por lo que dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ para asegurar que

$$|f(x,y) - 0| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon,$$

si $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$. △

El siguiente teorema establece algunas propiedades de límites.

Teorema 10. *Si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a \quad y \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = b,$$

entonces

(1)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} cf(x,y) = ca, \quad \forall\ c \in \mathbb{R}.$$

(2)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = a + b.$$

(3)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = ab.$$

(4) Si $b \neq 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{a}{b}.$$

Ejemplo 41. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}.$$

Solución. Obsérvese que el dominio natural de la función

$$h(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

es el conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \mid y \neq x\}.$$

El punto $(1, 1)$ no pertenece al conjunto, pero es punto de acumulación del mismo. Ahora bien,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x - y)(x + y)}{x - y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} x + y = 2.$$

$\triangle$

El siguiente resultado es una extensión del teorema 9.

Teorema 11. *Sean $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a, \qquad y \qquad \lim_{t\to a} g(t) = b,$$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x, y)) = b.$$

Ejemplo 42. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Solución. Sean $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(t) = \operatorname{sen} t/t$. Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1,$$

se sigue del teorema anterior que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Se acostumbra simplificar el análisis anterior haciendo $t = x^2 + y^2$, observando que $t \to 0$ si y sólo si $(x, y) \to (0, 0)$ y escribiendo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

$\triangle$

Veremos ahora un resultado que nos permitirá determinar si un límite no existe o si una función no es continua en un punto.

Teorema 12. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea (x_0, y_0) punto de acumulación de Ω. Si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a,$$

entonces para toda trayectoria $\boldsymbol{g} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continua en $t_0 \in I$, tal que $\boldsymbol{g}(t_0) = (x_0, y_0)$, se tiene que

$$\lim_{t\to t_0} f(\boldsymbol{g}(t)) = a.$$

Corolario 1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea (x_0, y_0) punto de acumulación de Ω. Si $\boldsymbol{g} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una trayectoria continua en $t_0 \in I$, tal que $\boldsymbol{g}(t_0) = (x_0, y_0)$, y si*

$$\lim_{t\to t_0} f(\boldsymbol{g}(t)) \qquad \textit{no existe},$$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \qquad \textit{no existe.}$$

Ejemplo 43. Determinar si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

existe.

Solución. Consideremos la trayectoria $\mathbf{g}(t) = (t, 0)$. Obsérvese que $\mathbf{g}(t)$ es continua, $\mathbf{g}(0) = (0, 0)$ y

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbf{g}(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|},$$

no existe, pues

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{|t|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = 1,$$

pero

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{t}{|t|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{-t} = -1.$$

$\triangle$

Corolario 2. *Sea* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *y sea* (x_0, y_0) *un punto de acumulación de* Ω*. Si* $\boldsymbol{g} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *y* $\boldsymbol{h} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *son trayectorias continuas en* $t_0 \in I$*, tales que* $\boldsymbol{g}(t_0) = (x_0, y_0) = \boldsymbol{h}(t_0)$*, y si*

$$\lim_{t\to t_0} f(\boldsymbol{g}(t)) \neq \lim_{t\to t_0} f(\boldsymbol{h}(t)),$$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \qquad \textit{no existe.}$$

Ejemplo 44. Determinar si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y},$$

existe.

Solución. Consideremos la trayectoria continua $\mathbf{g}(t) = (t, 0)$. Obsérvese que $\mathbf{g}(0) = (0, 0)$ y

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbf{g}(t)) = \lim_{t\to 0} f(t, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1.$$

Si ahora consideramos la trayectoria continua $\mathbf{h}(t) = (0, t)$, entonces

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbf{h}(t)) = \lim_{t\to 0} f(0, t) = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{t} = -1 \neq 1,$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y},$$

no existe. $\triangle$

Corolario 3. *Sea* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *y sea* $(x_0, y_0) \in \Omega$*. Si* $\boldsymbol{g} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *es continua en* $t_0 \in I$*,* $\boldsymbol{g}(t_0) = (x_0, y_0)$*, y si*

$$\lim_{t\to t_0} f(\boldsymbol{g}(t)) \neq f(x_0, y_0),$$

entonces $f(x, y)$ *no es continua en* (x_0, y_0)*.*

Ejemplo 45. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \quad \text{o} \quad y = 0; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Veremos que esta función no es continua en $(0,0)$. Con este fin consideremos la trayectoria $\mathbf{g}(t)=(t,t)$. Es claro que esta trayectoria es continua, además $\mathbf{g}(0)=(0,0)$. Sin embargo,

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbf{g}(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} 0 = 0 \neq 1 = f(0,0),$$

por lo tanto $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$. $\triangle$

En general, una función $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ se dice que es **continua** en $\mathbf{p}_0\in\Omega$, si para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que si $||\mathbf{x}-\mathbf{p}_0||<\delta$, entonces $||f(\mathbf{x})-f(\mathbf{p}_0)||<\varepsilon$.

Se dice que f es continua en Ω si f es continua en cada punto en Ω.

Por otra parte, un punto $\mathbf{p}_0\in\mathbb{R}^n$ se dice que es **punto de acumulación** de $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ si para todo $\varepsilon>0$, existe $\mathbf{x}\in\Omega$ tal que $0<||\mathbf{x}-\mathbf{p}_0||<\varepsilon$. Si $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y $\mathbf{p}_0$ es punto de acumulación de Ω, se dice que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}_0} f(\mathbf{x}) = a,$$

si para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que si $0<||\mathbf{x}-\mathbf{p}_0||<\delta$, entonces $||f(\mathbf{x})-f(\mathbf{p}_0)||<\varepsilon$.

Si $n=1$ estas definiciones coinciden con las definiciones de continuidad y límite para funciones reales de variable real.

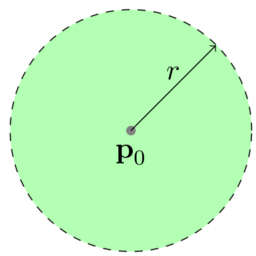
Las propiedades de límite y continuidad enunciadas en este trabajo para funciones de dos variables, siguen siendo válidas para funciones de varias variables con valores reales.

6. Derivadas parciales

La **vecindad** de radio $r>0$ con centro en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, es el conjunto:

$$\mathcal{V}_r(x_0,y_0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\mid\; \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\}.$$

Es decir, $\mathcal{V}_r(x_0,y_0)$ es el conjunto de puntos cuya distancia a (x_0,y_0) es menor que r. Este conjunto es un disco abierto con centro en $\mathbf{p}_0=(x_0,y_0)$ y radio r.

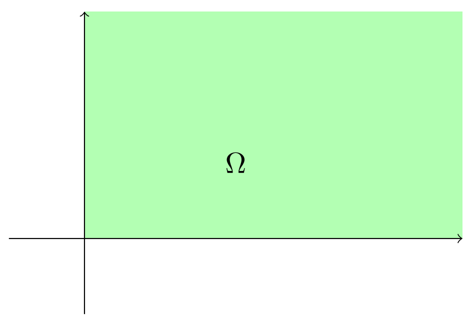


Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ se dice que es un **punto interior** de Ω, si existe $r > 0$ tal que

$$\mathcal{V}_r(x_0, y_0) \subseteq \Omega,$$

es decir, si existe un disco abierto con centro en (x_0, y_0) que está completamente contenido en el conjunto.

Ejemplo 46. Sea $\Omega = \{(x, y) \mid x \geq 0, \ y \geq 0\}$. Un punto (x_0, y_0) es punto interior de Ω si y sólo si $x_0 > 0$ y $y_0 > 0$.

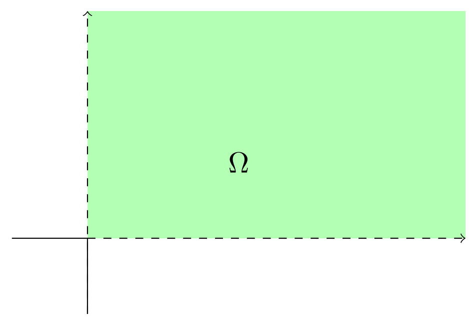


$\triangle$

Un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ se dice que es **abierto**, si todo punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ es un punto interior de Ω.

Ejemplo 47. El conjunto del ejemplo anterior no es abierto, porque los puntos de la forma $(x, 0)$, con $x \geq 0$ no son puntos interiores. Tampoco lo son los puntos de la forma $(0, y)$, con $y \geq 0$. $\triangle$

Ejemplo 48. El conjunto $\Omega = \{(x, y) \mid x > 0, \ y > 0\}$ es abierto.



△

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea (x_0, y_0) un punto interior de Ω. La **derivada parcial** de $f(x, y)$ con respecto a x en (x_0, y_0) se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

siempre y cuando el límite exista. Obsérvese que si definimos $g(x) = f(x, y_0)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0),$$

en caso de existir, de modo que calcular la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x es equivalente a derivar con respecto a x, suponiendo que y es constante. Análogamente la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a y en $\mathbf{p}_0$ se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

siempre y cuando el límite exista. También se acostumbra utilizar la notación f_x y f_y, en lugar de $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$.

Obsérvese que al ser (x_0, y_0) un punto interior de Ω, podemos asegurar que las rectas $x = x_0 + h,\ y = y_0$, y $x = x_0,\ y = y_0 + h$, están contenidas en Ω si h es suficientemente pequeño.

Ejemplo 49. Sea

$$f(x, y) = xe^{2x - 3y}.$$

Entonces

$$f_x = 2xe^{2x-3y} + e^{2x-3y} \qquad \text{y} \qquad f_y = -3xe^{2x-3y},$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. △

Ejemplo 50. Si

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},$$

entonces

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Para determinar si f_x existe en el origen, debemos recurrir a la definición de derivada parcial:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Es claro que este límite no existe, por lo tanto la derivada parcial con respecto a x en el origen no existe. Análogamente la derivada parcial con respecto a y en el origen tampoco existe. △

El ejemplo anterior muestra que una función puede ser continua en un punto, sin que las derivadas parciales existan en dicho punto.

Ejemplo 51. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \quad \text{o} \quad y=0; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Determinar si las derivadas parciales de la función existen en el punto $\mathbf{p}_0 = (0,0)$.

Solución. Obsérvese que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-1}{h} = 0,$$

por lo tanto $f_x(0,0) = 0$. Análogamente, $f_y(0,0) = 0$. △

El ejemplo anterior muestra que las derivadas parciales pueden existir en un punto, sin que la función tenga que ser continua en dicho punto.

En general, sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\mathbf{p}_0$ un punto interior de Ω. La **derivada parcial** de $f(\mathbf{x})$ con respecto a x_j en $\mathbf{p}_0$ se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p_0 + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{p}_0)}{h},$$

siempre y cuando el límite exista. Aquí $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ es el vector que tiene un uno en la posición j y cero en las demás componentes.

Si $f(\mathbf{x})$ es una función de producción, las derivadas parciales son llamadas **producciones marginales**, con respecto al insumo correspondiente. Análogamente, si $f(\mathbf{x})$ es una función de costos, las derivadas parciales son llamadas **costos marginales**.

7. Diferenciación

Recordemos que una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **diferenciable** en $x_0 \in I$, si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. En este caso el valor límite se denota $f'(x_0)$ y es llamado la **derivada** de f en x_0. Obsérvese que si f es diferenciable en x_0, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

La recta

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

es llamada **recta tangente** a la gráfica de f en x_0.

La última expresión sugiere una manera de extender la noción de diferenciabilidad a funciones de dos variables.

Una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice que es **diferenciable** en un punto interior $(x_0, y_0) \in \Omega$, si $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ existen y además

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

En este caso se dice que

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

es la ecuación del **plano tangente** a la gráfica de $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0). Se dice que f es diferenciable en Ω, si f es diferenciable en cada punto en Ω.

Ejemplo 52. Mostrar que la función

$$f(x,y) = 5 + 2x - 3y$$

es diferenciable en $(2,-1)$ y obtener la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en dicho punto.

Solución. En este caso $f_x = 2$ y $f_y = -3$. Además $f(2,-1) = 12$. Ahora bien,

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{5 + 2x - 3y - 12 - 2(x-2) + 3(y+1)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}} = 0$$

porque el numerador es igual a cero. La ecuación del plano tangente es:

$$z = 12 + 2(x-2) - 3(y+1).$$

△

Obsérvese que la gráfica de la función del ejemplo anterior es un plano, en este caso el plano tangente a la gráfica de la función coincide exactamente con la gráfica de la función.

Ejemplo 53. Consideremos la función

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

En el ejemplo 50 vimos que las derivadas parciales no existen en el origen, esto muestra que $f(x,y)$ no es diferenciable en el origen. △

Ejemplo 54. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \quad \text{o} \quad y = 0; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el ejemplo 51 vimos que $f_x(0,0) = 0$ y $f_y(0,0) = 0$, sin embargo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - 1 - 0x - 0y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

no existe, pues si nos acercamos a $(0,0)$ por medio de la trayectoria $y = x$, tenemos el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{\sqrt{2x^2}}$$

el cual tiende a $-\infty$. △

El ejemplo anterior muestra que una función puede tener derivadas parciales en un punto, sin que la función tenga que ser diferenciable en dicho punto.

El siguiente teorema relaciona la noción de diferenciabilidad con la noción de continuidad.

Teorema 13. *Si* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en un punto interior* $(x_0, y_0) \in \Omega$*, entonces* f *es continua en* (x_0, y_0)*.*

Demostración. Obsérvese que

$$\begin{aligned} 0 &\leq |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \\ &\leq |f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)| \\ &\quad + |f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)|. \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho corresponde al numerador del límite que aparece en la definición de diferenciabilidad, el cual tiende a cero cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$, pues el denominador tiende a cero. Por otra parte, es claro que el segundo término también tiende a cero cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$, de ahí que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

y por lo tanto f es continua en (x_0, y_0). □

Obsérvese que la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ es continua en $(0, 0)$, pero no es diferenciable en dicho punto. Esto muestra que el recíproco del teorema anterior es falso.

Mostrar que una función $f(x, y)$ es diferenciable a partir de la definición, puede ser muy difícil. El siguiente teorema, cuya demostración omitimos, establece una manera sencilla de verificar que una función es diferenciable en un conjunto.

Teorema 14. *Sea* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*. Si* Ω *es abierto, y si* f_x *y* f_y *existen y son continuas en* Ω*, entonces* f *es diferenciable en cada punto* $(x_0, y_0) \in \Omega$*.*

Ejemplo 55. Mostrar que la función

$$f(x, y) = x^2 y^3$$

es diferenciable en $(-1, 1)$ y obtener la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en dicho punto.

Solución. Obsérvese que

$$f_x = 2xy^3 \quad \text{y} \quad f_y = 3x^2y^2$$

existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$, por lo que, por el teorema anterior, f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Además $f(-1,1) = 1$, $f_x(-1,1) = -2$, $f_y(-1,1) = 3$, por lo que la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(-1,1,1)$ es

$$z = 1 - 2(x+1) + 3(y-1).$$

$\triangle$

Si $f(x,y)$ es diferenciable en un punto interior $(x_0,y_0) \in \Omega$, la función

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

es llamada la **aproximación lineal** de $f(x,y)$ alrededor de (x_0,y_0). Obsérvese que podemos escribir

$$f(x,y) = L(x,y) + R_1(x,y),$$

donde

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_1(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0,$$

es decir, $L(x,y)$ aproxima a $f(x,y)$ con un error menor que $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Ejemplo 56. Utilizar una aproximación lineal para estimar el valor de

$$\sqrt{(2.9)^2 + (4.1)^2}$$

Solución. Consideremos la función

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Obsérvese que

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por lo que f es diferenciable en este conjunto.

La aproximación lineal de f alrededor del punto $(3,4)$ es:

$$L(x,y) = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4),$$

de ahí que $L(2.9, 4.1) = 5.02$ es una aproximación del valor de $f(2.9, 4.1) = \sqrt{(2.9)^2 + (4.1)^2}$. $\triangle$

El vector
$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$
es llamado el vector **gradiente** de $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0). Con esta notación podemos escribir la aproximación lineal de f alrededor de (x_0, y_0) como:

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

En general, una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice que es **diferenciable** en un punto interior $\mathbf{p}_0 \in \Omega$, si

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p}_0)$$

existe para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, y si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - L(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - \mathbf{p}_0||} = 0,$$

donde
$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}_0) + \nabla f(\mathbf{p}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0).$$
Aquí
$$\nabla f(\mathbf{p}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p}_0) \right)$$
es el vector **gradiente** de $f(\mathbf{x})$ en el punto $\mathbf{p}_0$. La función $L(\mathbf{x})$ es llamada la **aproximación lineal** de f alrededor de $\mathbf{p}_0$.

Los teoremas 13 y 14 siguen siendo válidos para funciones de más de dos variables, es decir, si $f(\mathbf{x})$ es diferenciable en un punto interior $\mathbf{p}_0$ entonces es continua en $\mathbf{p}_0$, y si las derivadas parciales existen y son continuas en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces f es diferenciable en Ω.

Ejemplo 57. Mostrar que la función

$$f(x, y, z) = 2 + e^{3x} \operatorname{sen}(2y + z)$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^3$ y calcular la aproximación lineal de f alrededor del punto $\mathbf{p}_0 = (0, 1, -2)$.

Solución. Obsérvese que

$$f_x = 3e^{3x} \operatorname{sen}(2y + z), \quad f_y = 2e^{3x} \cos(2y + z), \quad f_z = e^{3x} \cos(2y + z),$$

son continuas en $\mathbb{R}^3$, por lo tanto f es diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Además $f(\mathbf{p}_0) = 2$, $f_x(\mathbf{p}_0) = 0$, $f_y(\mathbf{p}_0) = 2 \quad y \quad f_z(\mathbf{p}_0) = 1$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= 2 + 0(x - 0) + 2(y - 1) + (z + 2) \\ &= 2 + 2(y - 1) + (z + 2). \end{aligned}$$

$\triangle$

Si $f(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{p}_0$, el vector gradiente también es llamado la **derivada** de $f(\mathbf{x})$ es $\mathbf{p}_0$ y se denota $f'(\mathbf{p}_0)$. En el caso de funciones de una variable la derivada no es un vector, sino un número, representando la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

Obsérvese que esta noción de diferenciabilidad de funciones de varias variables generaliza la noción de diferenciabilidad de funciones de una variable. Es posible extender la noción de diferenciabilidad para funciones de varias variables con valores vectoriales, pero esa es otra historia.

8. Regla de la cadena

Veremos a continuación un caso especial de la regla de la cadena, involucrando a los dos tipos de funciones que hemos estudiado hasta el momento: trayectorias y funciones de varias variables.

Teorema 15 (**Regla de la cadena**). *Sea $\boldsymbol{g} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donde I es un intervalo abierto, y sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde Ω es abierto. Si $\boldsymbol{g}(t)$ es diferenciable en $t_0 \in I$, $\boldsymbol{g}(t_0) \in \Omega$ y f es diferenciable en $(x_0, y_0) = \boldsymbol{g}(t_0)$, entonces $f \circ \boldsymbol{g}$ es diferenciable en t_0, además*

$$(f \circ \boldsymbol{g})'(t_0) = \nabla f(\boldsymbol{g}(t_0)) \cdot \boldsymbol{g}'(t_0),$$

es decir,

$$(f \circ \boldsymbol{g})'(t_0) = f_x(x_0, y_0) x'(t_0) + f_y(x_0, y_0) y'(t_0).$$

Ejemplo 58. Sean $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y - 1)$ y $\mathbf{g}(t) = (t^2, 2t + 1)$. Utilizar la regla de la cadena para calcular $(f \circ \mathbf{g})'(0)$.

Solución. $f_x = e^x \operatorname{sen}(y - 1)$ y $f_y = e^x \cos(y - 1)$, son continuas en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto $f(x, y)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Por otra parte, $\mathbf{g}(t)$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ y $\mathbf{g}'(t) = (t^2, 2t + 1)$. Obsérvese que

$$\nabla f(g(0)) = \nabla(0, 1) = (0, 1).$$

Por otra parte, $\mathbf{g}'(0) = (0,2)$, de ahí que, por la regla de la cadena:

$$(f \circ \mathbf{g})'(0) = (0,1) \cdot (0,2) = 2.$$

$\triangle$

Veremos a continuación una aplicación interesante de la regla de la cadena, pero antes necesitamos una definición.

Una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se dice que es **homogénea de grado** k si

$$f(tx, ty) = t^k f(x,y),$$

para todo $(x,y) \in \Omega$.

Ejemplo 59. Una función de producción de tipo Cobb-Douglas es una función de la forma:

$$f(x,y) = \gamma\, x^\alpha y^\beta,$$

donde $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ son constantes positivas. Obsérvese que

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \gamma\, x^\alpha y^\beta \\ &= \gamma\, t^\alpha x^\alpha t^\beta y^\beta \\ &= \gamma\, t^{\alpha+\beta} x^\alpha y^\beta \\ &= t^{\alpha+\beta} f(x,y). \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x,y) = \gamma\, x^\alpha y^\beta$ es homogénenea de grado $\alpha + \beta$. $\triangle$

Teorema 16 (Euler). *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde Ω es abierto. Si $f(x,y)$ es homogénea de grado k y además es diferenciable en Ω, entonces*

$$kf(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y,$$

para todo $(x,y) \in \Omega$.

Demostración. Sea $(x,y) \in \Omega$ arbitrario, pero fijo. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por: $\mathbf{g}(t) = (tx, ty)$, y sea $h(t) = f \circ \mathbf{g}$. Por la regla de la cadena:

$$h'(1) = \nabla f(\mathbf{g}(1)) \cdot \mathbf{g}'(1) = \nabla f(x,y) \cdot (x,y).$$

Por otra parte,

$$h(t) = f(tx,ty) = t^k f(x,y),$$

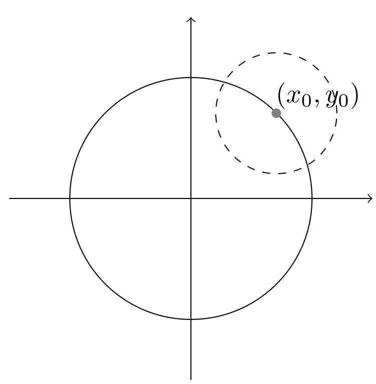
porque $f(x,y)$ es homogénea de grado k. De ahí que
$$h'(t) = kt^{k-1}f(x,y),$$
y por lo tanto
$$h'(1) = kf(x,y).$$
Igualando obtenemos el resultado deseado. $\square$

En general, sea $\mathbf{g} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo abierto, y sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde Ω es abierto. Si $\mathbf{g}(t)$ es diferenciable en $t_0 \in I$, $\mathbf{g}(t_0) \in \Omega$ y f es diferenciable en $\mathbf{p}_0 = g(t_0)$, entonces $f \circ \mathbf{g}$ es diferenciable en t_0, además
$$(f \circ \mathbf{g})'(t_0) = \nabla f(\mathbf{g}(t_0)) \cdot \mathbf{g}'(t_0).$$
Obsérvese que si escribimos f' en lugar de ∇f, entonces
$$(f \circ \mathbf{g})'(t_0) = f'(\mathbf{g}(t_0)) \cdot \mathbf{g}'(t_0).$$
De esta manera es claro que la regla de la cadena para trayectorias y funciones de varias variables extiende la regla de la cadena usual que se ve en cursos de Cálculo de una variable.

En las siguientes secciones veremos otras aplicaciones importantes de la regla de la cadena.

9. Derivación implícita

Consideremos la ecuación
$$x^2 + y^2 = 1.$$
Esta ecuación representa el círculo de radio 1 y centro en el origen. Obsérvese que si (x_0, y_0) pertenece al círculo y $y_0 > 0$, entonces y es función de x cerca de punto. Más precisamente, $y = \sqrt{1-x^2}$,

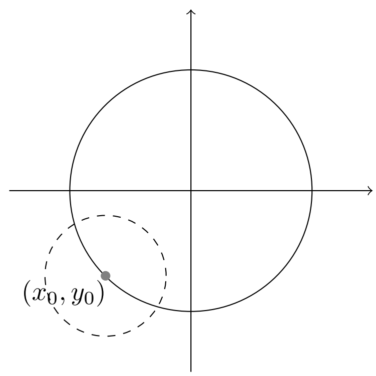


Obsérvese también que

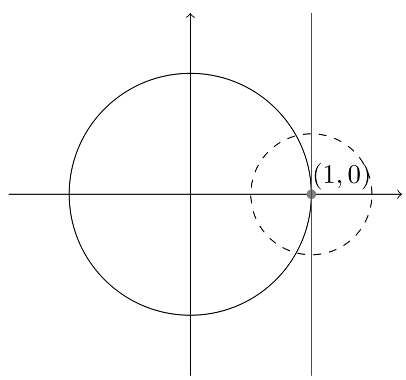
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{y}.$$

Análogamente, si $y_0 < 0$, entonces $y = -\sqrt{1-x^2}$ cerca del punto. En este caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{-y}.$$



Obsérvese también que en el punto $(1,0)$ no podemos despejar y como función de x.



Una situación similar ocurre en el punto $(-1,0)$. En estos casos la recta tangente a la curva es vertical, equivalentemente, el vector gradiente de la función $F(x,y) = x^2 + y^2$ en el punto $(\pm 1, 0)$ es horizontal, es decir $F_y = 0$.

El siguiente teorema, cuya demostración se omite, establece bajo qué condiciones una ecuación define implícitamente una variable como función de otra.

Teorema 17 (**Función implícita**). *Sea* $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto* Ω*. Si* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *satisface la ecuación*

$$F(x, y) = c,$$

y si $F_y(x_0, y_0) \neq 0$*, entonces existe un intervalo abierto* I *tal que* $x_0 \in I$*, y una función* $f(x)$ *diferenciable en* I*, tal que si* (x, y) *satisface la ecuación* $F(x, y) = c$ *cerca de* (x_0, y_0)*, entonces* $y = f(x)$*.*

El siguiente resultado muestra cómo derivar una función definida implícitamente.

Corolario 4 (**Diferenciación implícita**). *Sea* $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto* Ω*. Si* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *satisface la ecuación*

$$F(x, y) = c,$$

y si $F_y(x_0, y_0) \neq 0$*, entonces*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y}, \qquad \forall\, x \in I.$$

Demostración. Consideremos la trayectoria $\mathbf{g} : I \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $\mathbf{g}(x) = (x, f(x))$, y sea $h(x) = F(\mathbf{g}(x))$. Por lo tanto $h(x) = c$, para todo $x \in I$, de ahí que $h'(x) = 0$. Por otra parte, por la regla de la cadena,

$$h'(x) = \nabla F(\mathbf{g}(x)) \cdot \mathbf{g}'(x) = \nabla F(x, f(x)) \cdot (1, dy/dx) = F_x + F_y \frac{dy}{dx},$$

de ahí que

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Como $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, y F_y es continua, se sigue que $F_y \neq 0$ cerca de (x_0, y_0), de ahí que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y}.$$

□

Ejemplo 60. Consideremos de nuevo la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Aquí $F(x, y) = x^2 + y^2$, por lo que $F_y = 2y$, de modo que $F_y \neq 0$ si y sólo si $y \neq 0$. Por el teorema anterior, si (x_0, y_0) pertenece al círculo y $y_0 \neq 0$, entonces y es función de x cerca de punto, lo cual coincide con nuestro análisis previo.

Obsérvese además que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}.$$

Lo que también coincide con los resultados obtenidos previamente. $\triangle$

Ejemplo 61. Si y está definida implícitamente por la ecuación

$$x^4 - x^2y^2 + y^3 = 1,$$

calcular dy/dx.

Solución. Aquí $F(x, y) = x^4 - x^2y^2 + y^3$, por lo que $F_x = 4x^3 - 2xy^2$, y $F_y = -2x^2y + 3y^2$. De ahí que, por el corolario anterior,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3 + 2xy^2}{-2x^2y + 3y^2},$$

si $-2x^2y + 3y^2 \neq 0$. $\triangle$

10. Derivadas direccionales

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea (x_0, y_0) un punto interior de Ω. Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ un vector unitario. La **derivada direccional** de $f(x, y)$ en la dirección de u en (x_0, y_0) se define como:

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t},$$

siempre y cuando el límite exista.

Obsérvese que $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ mide la razón de cambio de $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0), en la dirección del vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. El hecho de que $\mathbf{u}$ sea unitario asegura que la derivada direccional depende solamente de la dirección del vector $\mathbf{u}$ y no de su magnitud. Obsérvese también que si $\mathbf{u} = (1, 0)$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$ y si $\mathbf{u} = (0, 1)$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$, de modo que las derivadas parciales son un caso especial de las derivadas direccionales.

El siguiente teorema establece cómo calcular las derivadas direccionales cuando la función es diferenciable en el punto en consideración.

Teorema 18. *Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto interior $(x_0, y_0) \in \Omega$, entonces $D_{\boldsymbol{u}} f(x_0, y_0)$ existe para todo vector unitario $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$. Además*

$$D_{\boldsymbol{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (u_1, u_2).$$

Demostración. Consideremos la trayectoria $g(t) = (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)$ y sea $h(t) = f(g(t))$. Obsérvese que

$$h'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t} = D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0).$$

Por otra parte, por la regla de la cadena,

$$h'(0) = \nabla f(g(0)) \cdot g'(0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (u_1, u_2).$$

Igualando tenemos que $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (u_1, u_2)$. □

Ejemplo 62. Calcular la derivada direccional de $f(x, y) = 2x^2y^3$ en el punto $\mathbf{p}_0 = (2, -1)$, en la dirección del vector $\mathbf{a} = (3, -1)$.

Solución. $||\mathbf{a}|| = \sqrt{10}$, por lo que el vector no es unitario. El vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{a}$ es:

$$u = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}} \right).$$

Las derivadas parciales de la función son:

$$f_x = 4xy^3, \quad f_y = 6x^2y^2,$$

por lo que $\nabla f(2, -1) = (-8, 24)$, de ahí que, por el teorema anterior,

$$D_u f(2, -1) = (-8, 24) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}} \right) = \frac{-48}{\sqrt{10}}.$$

△

Teorema 19. *Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto interior $(x_0, y_0) \in \Omega$, y $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de $f(x, y)$ a partir de (x_0, y_0) y $-\nabla f(x_0, y_0)$ apunta en la dirección en la que $f(x, y)$ decrece más rápidamente a partir de (x_0, y_0).*

Demostración. Sea $\mathbf{u}$ un vector unitario. Por el teorema anterior,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (u_1, u_2) \\ &= \cos\theta \, ||\nabla f(x_0, y_0)|| \, ||\mathbf{u}|| \\ &= \cos\theta \, ||\nabla f(x_0, y_0)||. \end{aligned}$$

Este valor es máximo si $\cos\theta = 1$, es decir, si el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\nabla f(x_0, y_0)$ es cero, por lo tanto

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{||\nabla f(x_0, y_0)||}.$$

Análogamente, $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ es mínimo si $\cos\theta = -1$, es decir, si el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\nabla f(x_0, y_0)$ es π, de ahí que

$$\mathbf{u} = \frac{-\nabla f(x_0, y_0)}{||\nabla f(x_0, y_0)||}.$$

□

Ejemplo 63. Determinar el vector unitario $\mathbf{u}$ para el cual la función $f(x, y) = ye^{2x}$ crece más rápidamente a partir del punto $\mathbf{p}_0 = (0, 1)$ y calcular la tasa máxima de crecimiento.

Solución. Las derivadas parciales son:

$$f_x = 2ye^{2x}, \quad f_y = ye^{2x},$$

por lo tanto $\nabla f(0, 1) = (2, 1)$. De ahí que

$$\mathbf{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

La tasa máxima de crecimiento es:

$$D_u f(0, 1) = (2, 1) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \sqrt{5}.$$

△

El siguiente teorema establece que si el gradiente de una función en un punto es distinto de cero, entonces es ortogonal a la curva de nivel que pasa por el punto.

Teorema 20. *Si* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en un punto interior* $(x_0, y_0) \in \Omega$, *y supongamos que* $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. *Sea* $c = f(x_0, y_0)$, *y sea* $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una trayectoria diferenciable en* I *tal que* $g(t_0) = (x_0, y_0)$ *y* $f(g(t)) = c$ *para toda* $c \in I$, *entonces* $\nabla f(x_0, y_0) \cdot g'(t_0) = 0$.

Demostración. Sea $h(t) = f(g(t))$. Por hipótesis $h(t) = c$ para todo $t \in I$, de ahí que $h'(t) = 0$ para todo $t \in I$. por otra parte, por la regla de la cadena,

$$h'(t_0) = (f \circ g)'(t_0) = \nabla f(g(t_0)) \cdot g'(t_0).$$

Por lo tanto $\nabla f(g(t_0)) \cdot g'(t_0) = 0$. □

Ejemplo 64. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$xy = 1$$

en el punto $\mathbf{p}_0 = (1, 1)$.

Solución. La curva dada es la curva de nivel 1 de la función $f(x, y) = xy$. Obsérvese que $f_x = y$ y $f_y = x$, por lo que $\nabla f(1, 1) = (1, 1)$. Por el teorema anterior este vector es ortogonal a la curva de nivel en el punto indicado, de ahí que la ecuación de la recta tangente a la curva es:

$$(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1) = 0,$$

es decir:

$$x + y = 2.$$

△

En general, sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\mathbf{p}_0$ un punto interior de Ω. Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario. La **derivada direccional** de $f(\mathbf{x})$ en la dirección de $\mathbf{u}$ en $\mathbf{p}_0$ se define como:

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{p}_0 + tu) - f(\mathbf{p}_0)}{t},$$

siempre y cuando el límite exista. Se puede demostrar que si f es diferenciable en $\mathbf{p}_0$, entonces $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}_0) = \nabla f(\mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{u}$, para cualquier vector unitario $\mathbf{u}$. Si $\nabla f(\mathbf{p}_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(\mathbf{p}_0)$ apunta en la dirección donde f crece más rápidamente y $-\nabla f(\mathbf{p}_0)$ apunta en la dirección donde f decrece más rápidamente a partir de $\mathbf{p}_0$.

El análogo del teorema 20 para funciones de tres variables establece que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto interior $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, entonces $\nabla f(g(t_0)) \cdot g'(t_0) = 0$ para cualquier trayectoria diferenciable $g(t)$ contenida en la superficie de nivel $c = f(x_0, y_0, z_0)$, de $f(x, y, z)$. Este hecho justifica la siguiente definición.

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, y sea

$$S = \{(x, y, z) \in \Omega \ \mid \ f(x, y, z) = c\},$$

la superficie de nivel c de $f(x, y, z)$. Si $(x_0, y_0, z_0) \in S$, $f(x, y, z)$ es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, el **plano tangente a la superficie de nivel** S en el punto (x_0, y_0, z_0), está definido por la ecuación.

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Ejemplo 65. Determinar el plano tangente a la superficie de nivel:

$$\operatorname{sen}(xz + yz) = 0$$

en el punto $\mathbf{p}_0 = (1, -1, 2)$.

Solución. Las derivadas parciales de la función $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(xz + yz)$ son:

$$f_x = z\cos(xz + yz), \qquad f_y = z\cos(xz + yz), \qquad f_z = (x + y)\cos(xz + yz),$$

por lo tanto $\nabla f(1, -1, 2) = (2, 2, 0)$. De ahí que la ecuación del plano tangente es:

$$2(x - 1) + 2(y + 1) + 0(z - 2) = 0,$$

equivalentemente, $x + 2y = 0$. $\triangle$

11. Polinomio de Taylor

Recordemos que si $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in I$, la aproximación lineal de f alrededor de x_0, es la función

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Sin embargo, puede suceder que dos funciones cualitativamente distintas tengan la misma aproximación lineal. Consideremos por ejemplo la función

$f(x) = x^2$ y la función $g(x) = -x^2 + 4x - 2$. En el punto $x_0 = 1$ la aproximación lineal de ambas funciones es:

$$L(x) = 1 + 2(x - 1),$$

pero la función f es cóncava hacia arriba y la función g es cóncava hacia abajo.

Con el fin de tener una aproximación más precisa de una función $f(x)$ alrededor de un punto x_0, consideremos un polinomio de la forma

$$P(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2$$

Quisiéramos que $P(x_0) = f(x_0)$, $P'(x_0) = f'(x_0)$, $P''(x_0) = f''(x_0)$, estas condiciones nos conducen a que $a = f(x_0)$, $b = f'(x_0)$ y $c = f''(x_0)/2$, de modo que

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

El siguiente teorema, cuya demostración se omite, establece que $P(x)$ es una buena aproximación de $f(x)$ cerca de x_0.

Teorema 21. *Si $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función tal que f'' es continua en I, entonces para todo $x_0 \in I$,*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x),$$

donde

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|R_2(x)|}{(x - x_0)^2} = 0.$$

El polinomio

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

es llamado **polinomio de Taylor de orden dos** de $f(x)$ alrededor de x_0. Obsérvese que

$$P_2(x) = L(x) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

donde $L(x)$ es la linealización de $f(x)$ alrededor de x_0. La función $L(x)$ también es llamada el **polinomio de Taylor de orden uno** de $f(x)$ alrededor de x_0. Obsérvese también que cerca de x_0 el error $R_2(x)$ en la aproximación cuadrática es menor que el error $R_1(x)$ en la aproximación lineal, pues $(x-x_0)^2 < |x-x_0|$ si la distancia al punto es menor que 1. Veremos ahora cómo extender el teorema anterior a funciones de dos variables.

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que las derivadas parciales de orden dos existen y son continuas en Ω. El **Hessiano** de f en $(x_0, y_0) \in \Omega$ es la función cuadrática:

$$Hf(x_0,y_0)(x,y) = f_{xx}(x_0,y_0)x^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)xy + f_{yy}(x_0,y_0)y^2.$$

Ejemplo 66. Calcular el Hessiano de

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

en el punto $(3,4)$.

Solución. Se deja al lector verificar que

$$f_{xx} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad f_{xy} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad f_{yy} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Por lo que

$$f_{xx}(3,4) = \frac{16}{125}, \qquad f_{xy}(3,4) = \frac{-12}{125}, \qquad f_{xx}(3,4) = \frac{9}{125}.$$

En conclusión:

$$Hf(3,4) = \frac{16}{125}x^2 - \frac{24}{125}xy + \frac{9}{125}y^2.$$

$\triangle$

El siguiente teorema, cuya demostración se omite, extiende el teorema anterior a funciones de dos variables.

Teorema 22 (Polinomio de Taylor de orden dos). *Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que las derivadas parciales de orden dos existen y son continuas en Ω, entonces para todo $(x_0, y_0) \in \Omega$,*

$$f(x,y) = P_2(x,y) + R_2(x,y),$$

donde

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) + \frac{1}{2}Hf(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0),$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|R_2(x,y))|}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = 0.$$

El polinomio $P_2(x,y)$ que aparece en el teorema anterior es llamado el **polinomio de Taylor de orden dos** de $f(x,y)$ alrededor de (x_0,y_0).

Ejemplo 67. Calcular el polinomio de Taylor de orden dos de

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

alrededor del punto $(3,4)$, y utilizarlo para aproximar el valor de

$$\sqrt{(2.9)^2+(4.1)^2}.$$

Solución. Utilizando el resultado del ejemplo anterior y la linealización de la función alrededor del punto, tenemos que

$$P_2(x,y)=5+\frac{3}{5}(x-3)+\frac{4}{5}(y-4)+\frac{1}{2}\left(\frac{16}{125}(x-3)^2-\frac{24}{125}(x-3)(y-4)+\frac{9}{125}(y-4)^2\right).$$

De ahí que

$$P_2(2.9,4.1)=\frac{299}{12500}=5.02196$$

es una aproximación del valor de $f(2.9,4.1)=\sqrt{(2.9)^2+(4.1)^2}$. △

En general, sea $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tal que las derivadas parciales de orden dos existen y son continuas en Ω. El **Hessiano** de f en $\mathbf{p}_0\in\Omega$ es la función cuadrática:

$$Hf(\mathbf{p}_0)(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right|_{\mathbf{p}_0}x_i^2\;+\;\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial f^2}{\partial x_i x_j}\right|_{\mathbf{p}_0}x_ix_j.$$

El polinomio de Taylor de orden dos de f alrededor de $\mathbf{p}_0$ es la función:

$$P_2(x)=f(\mathbf{p}_0)+\nabla f(\mathbf{p}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{p}_0)\;+\frac{1}{2}Hf(\mathbf{p}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{p}_0).$$

12. Máximos y mínimos

Sea $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Un punto $\mathbf{p}_0=(x_0,y_0)\in\Omega$ se dice que es un **máximo local** de f, si existe $r>0$ tal que

$$f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$$

para todo $(x,y)\in\Omega$, tal que $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$.

Análogamente, $\mathbf{p}_0$ es un **mínimo local** de f, si existe $r > 0$ tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

para todo $(x, y) \in \Omega$, tal que $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$.

Un punto $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ se dice que es un **extremo local** de f, si $\mathbf{p}_0$ es un máximo o un mínimo local de f.

Recordemos que si una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un extremo local en x_0 y la función es diferenciable en dicho punto, entonces $f'(x_0) = 0$. El siguiente teorema extiende este resultado para funciones de dos variables.

Teorema 23. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ es un extremo local de f, y si f es diferenciable en $\boldsymbol{p}_0$, entonces*

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0),$$

es decir, $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ es un máximo local de f. Sea

$$g(t) = p_0 + t\nabla f(x_0, y_0)$$

y consideremos la función $h(t) = f(g(t))$. Obsérvese que $h(t) \leq h(0) = f(p_0)$ si $|t|$ es pequeño, de modo que $t_0 = 0$ es un máximo local de h, de ahí que $h'(0) = 0$. Por otra parte, por la regla de la cadena tenemos que

$$h'(0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot g'(0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = ||\nabla f(x_0, y_0)||^2.$$

Por lo tanto $||\nabla f(x_0, y_0)||^2 = 0$, y de ahí que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. $\square$

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Un punto $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ se dice que es un **punto crítico** de f si $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ o si f no es diferenciable en $\mathbf{p}_0$. Un punto crítico que no es ni máximo local ni mínimo local se dice que es un **punto silla**.

Ejemplo 68. La función $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Obsérvese además que $f_x = -2x$ y $f_y = -2y$, por lo que el único punto crítico es $(0, 0)$. Este punto corresponde a un máximo local, porque $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 \leq 1 = f(0, 0)$. $\triangle$

Ejemplo 69. La función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Obsérvese que

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \forall\ (x,y) \neq (0,0),$$

por lo que $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Por lo que el único punto crítico es $(0,0)$, donde la función no es diferenciable. Este punto corresponde a un mínimo local, porque $f(0,0) = 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} = f(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\triangle$

Ejemplo 70. La función $f(x,y) = x^2 - y^2$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Obsérvese que $f_x = 2x$ y $f_y = -2y$, por lo que el único punto crítico es $(0,0)$. Este punto no es máximo local, porque $f(0,0) = 0 < f(x,0) = x^2$, si $x \neq 0$. Tampoco es mínimo local, porque $f(0,y) = -y^2 < 0 = f(0,0)$, si $y \neq 0$, por lo tanto $(0,0)$ es un punto silla. $\triangle$

En los ejemplos anteriores fue sencillo determinar por inspección la naturaleza de los puntos críticos, pero no siempre es el caso. Es necesario contar con un criterio que nos permita identificar si un punto crítico es un máximo local, un mínimo local o un punto silla. Recordemos que para funciones de una variable una manera de hacer esto era a partir del signo de $f''(x_0)$. Veremos a continuación cómo tener un criterio similar para funciones de dos variables.

Recordemos que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que las derivadas parciales de orden dos existen y son continuas en Ω, el Hessiano de f en $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ es la función cuadrática:

$$Hf(x_0,y_0)(x,y) = f_{xx}(x_0,y_0)x^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)xy + f_{yy}(x_0,y_0)y^2.$$

Se dice que $Hf(x_0,y_0)$ es **definida positiva**, si $Hf(x_0,y_0)(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Análogamente, $Hf(x_0,y_0)$ es **definida negativa**, si $Hf(x_0,y_0)(x,y) < 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

El siguiente lema establece condiciones suficientes para asegurar que el Hessiano de una función sea definida positiva o definida negativa.

Lema 1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que las derivadas parciales de orden dos existen y son continuas en Ω. Sea $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ y sea*

$$D(\boldsymbol{p}_0) = (f_{xx}(\boldsymbol{p}_0))(f_{yy}(\boldsymbol{p}_0)) - (f_{xy}(\boldsymbol{p}_0))^2.$$

1. *Si* $D(\boldsymbol{p}_0) > 0$ *y* $f_{xx}(\boldsymbol{p}_0) > 0$, *entonces* $Hf(x_0, y_0)$ *es definida positiva.*

2. *Si* $D(\boldsymbol{p}_0) > 0$ *y* $f_{xx}(\boldsymbol{p}_0) < 0$, *entonces* $Hf(x_0, y_0)$ *es definida negativa.*

3. *Si* $D(\boldsymbol{p}_0) < 0$ *entonces* $Hf(x_0, y_0)$ *no es ni definida positiva ni definida negativa.*

Demostración. Para simplificar la demostración escribamos:

$$a = f_{xx}(\mathbf{p}_0), \quad b = f_{xy}(\mathbf{p}_0), \quad c = f_{yy}(\mathbf{p}_0),$$

de modo que $Hf(x_0, y_0)(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Si además $a \neq 0$, podemos escribir

$$Hf(x_0, y_0)(x, y) = a\left(x^2 + \frac{2b}{a}xy + \frac{b^2y^2}{a^2}\right) + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2$$

$$= a\left(x + \frac{by}{a}\right) + \left(\frac{ac - b^2}{a}\right)y^2$$

Obsérvese que si $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$, entonces $Hf(x_0, y_0)(x, 0) \geq 0$, además $Hf(x_0, y_0)(x, 0) = 0$ si y sólo si $x = -by/a$ y $y = 0$, lo cual se cumple si y sólo si $(x, y) = (0, 0)$, de modo que en este caso $Hf(x_0, y_0)$ es definida positiva. Análogamente, si $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$, entonces $Hf(x_0, y_0)(x, 0) \leq 0$ y además $Hf(x_0, y_0)(x, 0) = 0$ si y sólo si $(x, y) = (0, 0)$, por lo que $Hf(x_0, y_0)$ es definida negativa. Por último, si $ac - b^2 < 0$, entonces $Hf(x_0, y_0)(x, 0) > 0$ y $Hf(x_0, y_0)(-by/a, y) > 0$, para todo $x > 0, y > 0$, por lo que $Hf(x_0, y_0)$ no es ni definida positiva ni definida negativa. $\square$

El número $D(\mathbf{p}_0)$ es llamado el **discriminante** de f en el punto crítico $\mathbf{p}_0$. Obsérvese que

$$D(\mathbf{p}_0) = det \begin{pmatrix} f_{xx}(\mathbf{p}_0) & f_{xy}(\mathbf{p}_0) \\ f_{xy}(\mathbf{p}_0) & f_{yy}(\mathbf{p}_0) \end{pmatrix}.$$

El siguiente teorema establece un criterio de segundas derivadas parciales, para identificar si un punto crítico es un máximo local, un mínimo local o un punto silla.

Teorema 24. *Sea* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que las derivadas parciales de orden dos existen y son continuas en* Ω. *Sea* $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ *tal que* $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, *entonces*

1. *Si* $D(\boldsymbol{p}_0) > 0$ *y* $f_{xx}(\boldsymbol{p}_0) > 0$*, entonces* $\boldsymbol{p}_0$ *es mínimo local.*
2. *Si* $D(\boldsymbol{p}_0) > 0$ *y* $f_{xx}(\boldsymbol{p}_0) < 0$*, entonces* $\boldsymbol{p}_0$ *es máximo local.*
3. *Si* $D(\boldsymbol{p}_0) < 0$ *entonces* $\boldsymbol{p}_0$ *es punto silla.*

Demostración. Podemos escribir $f(x,y) = P_2(x,y) + R_2(x,y)$, donde

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) + \frac{1}{2}Hf(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0),$$

es el polinomio de Taylor de orden dos de f alrededor de $\mathbf{p}_0$. Como además $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$, tenemos que

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}Hf(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) + R_2(x,y).$$

Si $D(\mathbf{p}_0) > 0$ y $f_{xx}(\mathbf{p}_0) > 0$, se sigue del lema anterior que $Hf(x_0,y_0)$ es definida positiva. Como además $|R_2(x,y)|$ es pequeño, se puede demostrar que $\frac{1}{2}Hf(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)+R_2(x,y) > 0$, de ahí que $f(x,y) > f(x_0,y_0)$, por lo que $\mathbf{p}_0$ es mínimo local.

Análogamente se prueba que si $D(\mathbf{p}_0) > 0$ y $f_{xx}(\mathbf{p}_0) < 0$, entonces $Hf(x_0,y_0)$ es definida negativa, y de ahí que $f(x,y) < f(x_0,y_0)$, por lo que $\mathbf{p}_0$ es máximo local.

Por último, si $D(\mathbf{p}_0) < 0$, entonces $Hf(x_0,y_0)$ no es ni definida positiva, ni negativa, lo cual implica que $\mathbf{p}_0$ no es ni mínimo, ni máximo local, es decir, $\mathbf{p}_0$ es punto silla. $\square$

13. Multiplicador de Lagrange

En ocasiones se desea maximizar o minimizar una función $f(x,y)$ sujeta a una restricción de la forma $g(x,y) = b$. El siguiente teorema, debido al matemático italiano *Joseph Louis Lagrange*, establece una condición necesaria para que este problema tenga solución cuando las funciones involucradas son diferenciables.

Teorema 25 (Lagrange). *Sean* $f,g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *diferenciables en un conjunto abierto* Ω*, y sea* $(x_0,y_0) \in \Omega$ *un extremo local de* $f(x,y)$ *sujeto a la restricción* $g(x,y) = b$*. Si* $\nabla g(x_0,y_0) \neq (0,0)$*, entonces existe* $\lambda \in \mathbb{R}$*, tal que*

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda\,\nabla g(x_0,y_0).$$

Demostración. Sea $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una trayectoria diferenciable, tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ y $g(\gamma(t)) = b$, para toda $t \in I$. Como $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, se sigue del teorema 20 que

$$\nabla g(x_0, y_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Por otra parte, $(x_0, y_0) \in \Omega$ es un extremo local de $f(x, y)$ sujeto a la restricción:

$$g(x, y) = b.$$

Sin pérdida de generalidad supondremos que es un máximo local. Sea $h(t) = f(\gamma(t))$. Por hipótesis,

$$h(t_0) = f(x_0, y_0) \geq f(\gamma(t)) = h(t),$$

cerca de t_0, por lo tanto t_0 es un máximo local de $h(t)$, de ahí que $h'(t_0) = 0$. Por otra parte, por la regla de la cadena

$$h'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \gamma'(t_0),$$

de ahí que

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Como tanto $\nabla g(x_0, y_0)$ como $\nabla f(x_0, y_0)$ son ortogonales a $\gamma'(t_0)$, se sigue que estos vectores son paralelos, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

□

El número λ que aparece en el teorema anterior se llama **multiplicador de Lagrange**. Obsérvese que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ es equivalente a que $f_x(x_0, y_0) = \lambda g_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0) = \lambda g_y(x_0, y_0)$.

Ejemplo 71. Hallar el valor máximo de $f(x, y) = 2x + 3y$, en el círculo $x^2 + y^2 = 40$.

Solución. La condición que aparece en el teorema de Lagrange nos conduce al sistema:

$$\begin{aligned} 2 &= \lambda(2x) \\ 3 &= \lambda(2y) \end{aligned}$$

Obsérvese que necesariamente $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Despejando λ e igualando obtenemos que $y = 3x$. Sustituyendo en la restricción obtenemos $x^2 + 9x^2 = 40$, y de ahí que $x^2 = 4$, es decir, $x \pm 2$. De modo que los puntos que satisfacen la condición de Lagrange son: $\mathbf{a} = (2, 6)$ y $\mathbf{b} = (-2, -6)$. Como $f(2, 6) = 22$ y $f(-2, -6) = -22$, se sigue que 22 es el valor máximo, y se alcanza en el punto $\mathbf{a} = (2, 6)$. $\triangle$

Veremos a continuación una interpretación económica del multiplicador de Lagrange. Sea $f(x, y)$ una función de producción que depende de dos insumos, sea $g(x, y)$ una función de costos que depende de los mismos insumos, y sea b un presupuesto. Sea (x_0, y_0) el máximo de la función de producción $f(x, y)$ sujeta a la restricción presupuestal $g(x, y) = b$. Por el teorema de Lagrange existe un número λ, tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$. Supongamos ahora que queremos pedir un préstamo $\triangle b$ al banco con el fin de incrementar nuestro presupuesto, incrementando también la producción. Sea (x_1, y_1) el máximo de $f(x, y)$ sujeta a la nueva restricción $g(x, y) = b + \triangle b$. Como $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), sabemos que

$$f(x_1, y_1) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) + R_1(x_1, y_1),$$

donde $R_1(x_1, y_1)$ es pequeño si estamos cerca de (x_0, y_0). Esto nos permite escribir:

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) \approx \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0).$$

El símbolo $\approx$ significa aproximadamente igual a. Análogamente,

$$g(x_1, y_1) - g(x_0, y_0) \approx \nabla g(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0),$$

pero además

$$g(x_1, y_1) - g(x_0, y_0) = (b + \triangle b) - b = \triangle b.$$

De modo que

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) &\approx \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \\ &= \lambda \nabla g(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \\ &\approx \lambda \left(g(x_1, y_1) - g(x_0, y_0) \right) \\ &= \lambda \triangle b. \end{aligned}$$

Es decir, si el presupuesto se incrementa en $\triangle b$ unidades monetarias, la producción se incrementa en $\lambda \triangle b$ unidades monetarias, de modo que el multiplicador λ es lo que los economistas llaman un **precio sombra** asociado con la restricción presupuestal.

Una manera alternativa de interpretar las condición de Lagrange es por medio de la noción de Lagrangiano. El Lagrangiano del problema de optimizar $f(x,y)$ sujeta a la restricción $g(x,y)=b$, es la función:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda(g(x,y)-b).$$

Obsérvese que

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(g(x,y)-b),$$

de modo que (x_0,y_0,λ_0) satisface la condición de Lagrange si y sólo si es punto crítico del Lagrangiano. Es posible tener un criterio de segundas derivadas parciales para determinar si estos puntos corresponden a un máximo o un mínimo local, pero esa es otra historia.

En general, si $f,g:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ son diferenciables en un conjunto abierto Ω, $\mathbf{p}_0\in\Omega$ es un extremo local de $f(\mathbf{x})$ sujeto a la restricción $g(\mathbf{x})=b$, y $\nabla g(\mathbf{p}_0)\neq 0$, entonces existe un número λ tal que

$$\nabla f(\mathbf{p}_0)=\lambda\,\nabla g(\mathbf{p}_0).$$

Ejemplo 72. Se desea construir una caja rectangular con tapa, cuya área sea de 5400 cm^2, de modo que el volumen encerrado sea máximo. Utilizar el método del multiplicador de Lagrange para hallar las dimensiones de la caja.

Solución. Sean x,y,z las dimensiones de los lados de la caja. El volumen está dado por $V(x,y,z)=xyz$ y el área es igual a $2xy+2yz+2xz$ y queremos que $xy+2yz+2xz=5400$, equivalentemente $xy+yz+xz=2700$. La condición de Lagrange nos conduce al sistema:

$$yz=\lambda(y+z)$$
$$xz=\lambda(x+z)$$
$$xy=\lambda(x+y)$$

Despejando λ de las dos primeras ecuaciones e igualando, obtenemos

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z},$$

lo cual implica que $y = x$. Análogamente, a partir de las últimas dos ecuaciones tenemos que $y = z$. Sustituyendo en la restricción obtenemos: $3x^2 = 2700$, y de ahí que $x = 30$. Como $y = z = x$, tenemos que la caja de volumen máximo es un cubo de lado 30 cm. $\triangle$

Es posible extender el teorema de Lagrange para optimizar una función sujeta a varias restricciones, para cada una de esas restricciones tendríamos un multiplicador de Lagrange, con su respectiva interpretación económica. Pero de nuevo, esa es otra historia.