CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
GUÍA DE EJERCICIOS
Primavera 2022

1 La integral definida

1.1 Sumas de Riemann. La integral de Riemann

1. Escribe la suma en la notación $\sum_{k=1}^{n} a_k$:

   (a) $\dfrac{2}{1} - \dfrac{4}{3} + \dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{7} + \dfrac{10}{9}$.

   (b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{50}$.

   (c) $-\dfrac{3}{5} + \dfrac{5}{5} - \dfrac{7}{5} + \dfrac{9}{5} - \dfrac{11}{5}$.

   (d) $x^{-2} + x^{-1} + x^{0} + x^{1}$.

2. En cada inciso indica si la afirmación es verdadera o falsa:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k + 2 = \sum_{k=1}^{100} k + \sum_{k=1}^{100} 2$.

   (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{99} (i+1)^2 = \sum_{i=3}^{102} (i-2)^2$.

   (c) $\dfrac{\sum_{k=1}^{100} k}{\sum_{k=1}^{100} k^2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{100} 2 = 200$.

   (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} k^4 = \sum_{k=1}^{100} k^4$.

   (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} (2+k) = 2 + \sum_{k=0}^{100} k$.

   (g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} k^3 = \left(\sum_{i=1}^{100} k\right)\left(\sum_{i=1}^{100} k^2\right)$.

   (h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} k^3 = \left(\sum_{i=1}^{100} k\right)^3$.

3. (a) Demuestra que para todo $r \neq 1$ y $n \geq 1$ se cumple

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r}. \qquad \text{(suma geométrica)}$$

   (b) Usa el resultado anterior para calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} \frac{2^k}{(-3)^k}$.

4. Utiliza los valores dados de a y b para expresar los liguientes límites como integrales (no calcules las integrales):

   (a) $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} 3c_k(1-2c_k)\,\Delta x_k \qquad a=1, b=4.$

   (b) $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{sen}^2 c_k\right)\,\Delta x_k \qquad a=0, b=\frac{\pi}{2}.$

5. Expresa la integral como el límite de una suma de Riemann (no calcules la integral):

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx.$

   (b) $\displaystyle\int_1^3 \left(2x^2-x\right)\,dx.$

6. Escribe la integral de Riemann $\int_0^1 (1+x)^2\,dx$ como el límite de sumas de Riemann $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,(x_k - x_{k-1})$, en donde

$$P = \left\{0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\}, \quad c_k = \frac{k}{n} \ \text{ y } \ f(x) = (1+x)^2.$$

7. Expresa el límite como una integral definida (no calcules la integral):

   (a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\left(2+\frac{4(1)}{n}\right)^{1/2} + \left(2+\frac{4(2)}{n}\right)^{1/2} + \ldots + \left(2+\frac{4(n)}{n}\right)^{1/2}\right].$$

   (b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{1\cdot 3}{n}\right)^5 + \left(\frac{2\cdot 3}{n}\right)^5 + \left(\frac{3\cdot 3}{n}\right)^5 + \ldots + \left(\frac{n\cdot 3}{n}\right)^5\right].$$

8. Evalúa la integral $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ como el límite de una suma de Riemann. Sugerencia: usa la partición de $[0,1]$ en donde

$$x_k = c_k = \frac{k^2}{n^2}$$

y, correspondientemente,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

9. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, si

$$S_n = \frac{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2}{n^3}.$$

Nota que $\dfrac{(n-k)^2}{n^3} = \left(1 - \dfrac{k}{n}\right)^2 \dfrac{1}{n}$.

10. En cada inciso argumenta si en el intervalo dado la función es: (i) continua, (ii) acotada, (iii) integrable:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,0) \\ 5, & x = 0 \\ -2, & x \in (0,1] \end{cases}$ en $[-1,1]$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ en $[-10\pi, 10\pi]$.

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ en $[0,1]$.

1.2 Propiedades de la integral definida

1. Escribe cada una de las sumas o restas que siguen como una sola integral de la forma $\int_a^b f(x)\,dx$:

(a) $\int_2^{10} f(x)\,dx - \int_2^7 f(x)\,dx$

(b) $\int_{-3}^5 f(x)\,dx - \int_{-3}^0 f(x)\,dx + \int_5^6 f(x)\,dx$

(c) $2\int_{-1}^5 f(x)\,dx + \int_5^6 f(x)\,dx + \int_5^{-1} f(x)\,dx$

2. Calcula:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 |2x+1|\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2x+1+|2x+1|)\,dx$.

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x-2\,|x|)\,dx$.

(d) $\displaystyle\int_{0}^{3} (|x-1|+|x-2|)\,dx$.

(e) $\displaystyle\int_{0}^{8} f(x)dx$, en donde $f(x)=|2-|x-3||$.

3. Determina $\int_{-2}^{a} |x|\;dx$. Analiza los casos $a\leq 0$ y $a>0$.

4. Calcula $\int_{a}^{b} |x|\;dx$ en los siguientes tres casos: (a) $a<b<0$, (b) $0<a<b$, y (c) $a<0<b$. Muestra entonces que

$$\int_{0}^{x} |t|\;dt=\frac{1}{2}x\,|x|\,,\quad \text{para todo } x\in\mathbb{R}.$$

5. Utiliza las propiedades de la integral definida para comprobar cada una de las siguientes desigualdades (sin evaluar las integrales):

(a) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^4 x\,dx\geq\frac{\pi}{8}$.

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1+\csc x}\,dx\leq\sqrt{2}$.

(c) $\displaystyle 2\leq\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx\leq 2\sqrt{2}$.

(d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \sqrt{5-x}\,dx\geq\int_{1}^{2} \sqrt{x+1}\,dx$.

(e) $\displaystyle\left|\int_{0}^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(2x)\,dx\right|\leq\int_{0}^{2\pi} |\,f(x)|\;dx$

(f) $\displaystyle 0\leq\int_{(\sqrt{\pi})/2}^{\sqrt{\pi}} \cos^2\left(x^2\right)dx\leq\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

6. Prueba que el valor de $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\,dx$ no puede exceder $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ ni ser menor que $\dfrac{\pi}{2}$.

7. Usando propiedades de la integral definida, establece cotas inferior y superior para la integral en cada inciso:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$.

(b) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x^3+1}\, dx.$

(c) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} sen^2 x\, dx.$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{x^4+1}\, dx.$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{3+x^6}}.$

(f) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2+\cos^2 x} dx.$

8. Prueba que $\dfrac{x^6}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^6$, si $x \in [0,1]$. Concluye que

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \leq \frac{1}{7}.$$

9. A partir de las desigualdades

$$1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1,$$

obtén cotas superior e inferior para $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx$.

10. Demuestra que si f es integrable en $[a,b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

Sugerencia: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

11. Sea f continua en $[a,b]$ y sea $|f(x)| \leq M$. Demuestra que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq M(b-a).$$

12. Sea $f > 0$ continua. Demuestra que

$$\left| \int_0^\pi f(x)\text{sen}(2x) dx \right| \leq \int_0^\pi f(x)\, dx.$$

13. Sea $f > 0$ continua. Demuestra que

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x)\text{sen}(x) dx \right| \leq \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$$

14. Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $0 < x \leq 1$ y $f(0) = 0$. Demuestra que

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{3}.$$

15. Prueba que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} x \operatorname{sen} x\, dx = 0.$$

Sugerencia: $0 \leq \operatorname{sen} x \leq x$, para todo $x \geq 0$.

16. Decide si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, y en caso de ser falsas proporciona un contraejemplo:

(a) Si $\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$, entonces $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

(b) Si $f(x) \geq 0$ y $\int_a^b f(x)\ dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

(c) Si f y g son continuas y $f(x) > g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| > \left| \int_a^b g(x)\ dx \right|$.

(d) Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\ dx = \left(\int_a^b f(x)\ dx \right) \left(\int_a^b g(x)\ dx \right).$$

(e) Si f integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$, entonces

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\ dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\ dx}.$$

(f) Si $\int_a^b f(x)\ dx > \int_a^b g(x)\ dx$, entonces $\int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx\ >\ 0$.

1.3 Teorema del Valor Medio para integrales

1. Sean $0 \leq a < b$ y $f(x) = x^2$.

   (a) Muestra que el valor promedio de f en $[a, b]$ es $\frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

   (b) Muestra que existe un número $c \in [a, b]$ tal que $c^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

2. Sea $f(x) = |2x + 1|$. Encuentra el valor de c que satisface las hipótesis del TVM para f en $[-1, 0]$.

3. Sea $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ continua. Supón que $\int_1^3 f(x)\, dx = 4$. Prueba que existe $c \in [1, 3]$ tal que $f(c) = 2$.

4. Sabiendo que $\int_{-1}^8 3\sqrt{x+1}\, dx = 54$, encuentra un número real c que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio.

5. Supón que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son continuas ($a < b$) y que $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = 0$. Prueba que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$. (Usa el TVM para integrales).

6. Si $f(x) = (1 + x)^2$ y $[a, b] = [0, 1]$, exhibe explícitamente $c \in [a, b]$ tal que
$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a).$$

7. Demuestra que si f es continua en $[a, b]$, $a \neq b$, y si $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

8. Sean $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Supón que $\int_0^1 f(x)\, dx \geq 1 + \int_0^1 g(x)\, dx$. Prueba que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) \geq 1 + g(c)$. (Aplica el TVM para integrales a la función continua $h = f - g$).

9. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable no negativa. Demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que
$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$
Sugerencia: para el caso $\int_a^b g(x)\, dx \neq 0$, encuentra cotas inferior y superior para el cociente $\int_a^b f(x)g(x)\, dx / \int_a^b g(x)\, dx$ y luego utiliza el TVI.

10. Prueba que
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{t}{x^2 + t^2} dx = 1.$$

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Prueba que
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx = f(0).$$
Ayuda: Considera el cambio de variable $u = x/t$.

1.4 Teorema Fundamental del Cálculo

1. Sin efectuar la integral, halla la derivada de la función en cada inciso:

   (a) $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1 + \sqrt{t}}$.

   (b) $G(x) = \displaystyle\int_x^1 \sqrt{1 + t^4}\, dt$.

   (c) $G(x) = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^4}\, dt$.

(d) $G(x) = \left(\int_0^x \sqrt{1+s^4}\, ds\right)^2.$

(e) $G(x) = \int_0^1 x^2\sqrt{1+t^4}\, dt.$

(f) $G(x) = \int_0^x x^2\sqrt{1+t^4}\, dt.$

(g) $G(x) = \int_0^1 x^2\left(\frac{1}{1+s^3}\right) ds.$

(h) $G(x) = \int_0^x x^2\left(\frac{1}{1+s^3}\right) ds.$

(i) $G(x) = \operatorname{sen}\left[\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3(t)\, dt\right) dy\right].$

2. Determina la ecuación de la recta tangente a

$$f(x) = \int_{\pi/2}^x \frac{x \operatorname{sen} t}{t} dt.$$

en $x = \frac{\pi}{2}$. Utiliza este resultado para estimar el valor de $f\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right)$.

3. Obtén una función f y un número a tal que

$$27 + \int_a^x \frac{f(t)}{t}\, dt = 3x^{1/2}, \quad \text{para todo } x > 0.$$

4. Sea f una función tal que

$$f(x) = \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt.$$

Muestra que $f'''(x) = 2f(x)$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$g(x) = (x+1) \int_{-1}^x f(t)\ dt.$$

(a) Demuestra que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Justifica que g es diferenciable en $\mathbb{R}$ y entonces calcula $g'(x)$.

6. Sea f continua en $[a,b]$. Demuestra que existe un número $x \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^x f(t)\, dt = \int_x^b f(t)\, dt.$$

Sugerencia: Considera la función $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt - \int_x^b f(t)\, dt$.

7. Sea $F(x) = \int_0^x x^3 \operatorname{sen}\left(t^2\right) dt$. Determina: (a) $F(3)$, (b) $F'(x)$.

8. Demuestra que si f es una función diferenciable verificando la condición

$$\int_0^x f(t)dt = xf(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces f es constante.

9. Sea $T(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{ds}{1+s^2}$. Demuestra que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y que $(0,0)$ es su único punto de inflexión.

10. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t-3}{t^2+7}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de F.
    (b) Encuentra el punto x en donde F alcanza su valor mínimo.
    (c) Encuentra los intervalos en donde F es convexa (cóncava hacia arriba) y cóncava (cóncava hacia abajo).
    (d) Esboza la gráfica de F.

11. Supón que $f(x)$ tiene una derivada positiva para todos los valores de x, y que $f(1) = 0$. Sea $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos para $g(x)$?

    (a) g es una función diferenciable de x.
    (b) g es una función continua de x.
    (c) La gráfica de g tiene una tangente horizontal en $x = 1$.
    (d) g tiene un máximo local en $x = 1$.
    (e) La gráfica de $\dfrac{dg}{dx}$ cruza el eje x en $x = 1$.

12. Supón que x y y están relacionadas mediante la ecuación

$$x = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} dt.$$

Demuestra que $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ es proporcional a y y determina la constante de proporcionalidad.

13. En cada inciso encuentra el límite (sin L'Hopital):

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{t^4+1}\, dt \right)$.

    Sugerencia: $F'(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1}$.

(b) $\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_{4}^{4+h}\sqrt{9+t^2}\,dt\right)$.

Sugerencia: Identifica la derivada y aplica el TFC. No intentes integrar.

14. Sin efectuar la integral, halla la derivada de la función en cada inciso:

    (a) $G(x)=\int_{-2x}^{2x}\sqrt{1+t^4}\,dt$.

    (b) $G(t)=\int_{t^2}^{t^4}\frac{t^2}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

    (c) $G(t)=\int_{0}^{t^3}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

    (d) $G(x)=\int_{0}^{x^2}\sqrt{\frac{t^4+1}{9-t^2}}dt$.

    (e) $G'(2)$, si $G(x)=\int_{8/x}^{x^2}\frac{t}{1-\sqrt{t}}dt$.

15. Sea $G(x)=\int_a^x f(t)\ dt$, con a una constante. Encuentra una expresión para: a) $dG(x)/dx$, b) $G\left(x^2\right)$, c) $dG(x^2)/dx$.

16. Para $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$ define

$$S(\theta)=\int_0^{\operatorname{sen}\theta}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Usa la regla de Leibniz para probar que $S'(\theta)=1$ para todo $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$. Concluye que $S(\theta)=\theta$ para todo $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$.

17. Sin resolver la integral, demuestra que la siguiente función es constante:

$$f(x)=\int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

18. Calcula $f(2)$, si f es continua y satisface la fórmula dada para todo $x\geq 0$:

$$\int_0^{x^2}f(t)dt=x^2(1+x).$$

19. Calcula $f(2)$, si f es continua y satisface la fórmula dada para todo $x\geq 0$:

$$\int_0^{x^2(1+x)}f(t)dt=x$$

20. (a) Supón que $\int_1^x f(t)dt = x^2 - 2x + 1$. Determina $f(x)$.

    (b) Determina $f(4)$, si $\int_0^{x^2} f(t)dt = x\cos(\pi x)$.

    (c) Determina $f(4)$, si $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x\cos(\pi x)$.

21. Sea $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \left(1+t^2\right)^{1/2} dt$, con $x \in \mathbb{R}$. Encuentra la ecuación de la recta tangente a $F(x)$ en el punto $x = 1$.

22. Calcula las siguientes integrales definidas:

    (a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(x - \frac{5}{x^3}\right) dx.$

    (b) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\csc x}.$

    (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec x\, \tan x\, dx$

    (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^5 x\right) dx.$

1.5 Integral por sustitución

1. Determina las siguientes integrales indefinidas:

    (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}.$

    (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x\ \left(2+\tan x\right)^5}.$

    (c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}dx.$ Sugerencia: $\displaystyle\sqrt{\frac{x-1}{x^5}} = \frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$

    (d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\, dx.$

    (e) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}}dx.$

    (f) $\displaystyle\int x^7\sqrt{x^4-1}\, dx.$

    (g) $\displaystyle\int (z^5+4z^2)(z^3+1)^{12}\, dz.$

    (h) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x^3-3}{x^4}}dx.$

    (i) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}dx.$

2. Calcula las siguientes integrales (haz una sustitución y cambia los límites de integración):

   (a) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}|\pi - 2x| \; dx.$

   (b) $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} x\sqrt{2x+1}\, dx.$

   (c) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{t}{\sqrt{1+t}}\, dt.$

   (d) $\displaystyle\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\cos(2\theta)}{\operatorname{sen}^3(2\theta)}\, d\theta.$

   (e) $\displaystyle\int_{1}^{x} \frac{t^2}{\sqrt{t^3+3}}\, dt$, con $x \geq 1$.

   (f) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{5 \operatorname{sen} x \cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)^2}\, dx.$

   (g) $\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{t}{\sqrt{1+t}}\, dt$, con $x \geq 0$.

   (h) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

   (i) $\displaystyle\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{y}}{\left(\sqrt{y}\right)-1}\, dy.$

   (j) $\displaystyle\int_{0}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\, dx.$

3. Calcula el valor de la integral definida para $\alpha = -\pi$ y $\alpha = 0$:

$$\int\limits_{\alpha}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(u)}{(1+\cos(u))^2} du$$

4. Demuestra que si f es continua en el intervalo $[a,b]$ y $\lambda \neq 0$ es una constante, entonces:

   (a) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x-\lambda) dx.$

   (b) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\, dx.$

5. Sea f continua en $[a,b]$. Demuestra que

   (a) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\, dx.$

(b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\, dx.$

6. Sea f una función continua en $[-a,a]$. Demuestra que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\, dx.$$

7. Sea f una función continua y supón que $\int f(x)dx = G(x)+C$.

   (a) Demuestra que $\int f(ax+b)dx = \dfrac{G(ax+b)}{a} + C$ para cualquier valor de $a \neq 0$ y cualquier valor de b.

   (b) Usa la parte (a) para determinar $\int \operatorname{sen}(\,ax+b)dx$.

8. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función par y diferenciable y sea G dada por:

$$G(x) = f(ax)\int_0^{x/b} f(t)dt. \quad a=4, b=2;\; a=6, b=3.$$

   (a) Demuestra que G es una función impar. O bien, determina si G es una función par, impar o ninguna de éstas.

   (b) Justifica que G es diferenciable y calcula su derivada.

9. Sea $a>0$ y f continua en $[0,a]$.

   (a) Usa la sustitución $u=a-x$ para demostrar que

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)}du.$$

   (b) Usa la parte (a) para demostrar que

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \frac{a}{2}.$$

   (¡El valor de la integral no depende de f!)

   (c) Usa la parte (b) para obtener el valor de

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^4+(1-x)^4}dx.$$

10. Sin efectuar la integral, demuestra la siguiente igualdad:

$$\int_a^b 1/x\; dx = \int_1^{b/a} 1/x\; dx.$$

Ofrece una interpretación gráfica de este cambio de variable.

11. Sean $m, n \in \mathbb{Z}^{+}$. Demuestra que

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx.$$

12. Sea f continua, tal que $\int f(x)dx = F(x) + C$. Sean a, b constantes, con $a \neq 0$. Usa el teorema del cambio de variable para demostrar que

$$\int_{-b/a}^{0} f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\left[F(b) - F(0)\right].$$

Sugerencia: Sea $u = ax + b$.

13. Sea f continua, tal que $\int f(x)dx = F(x)+C$, $C \in \mathbb{R}$. Sean a, b constantes, con $a \neq 0$. Usa el teorema del cambio de variable para demostrar que

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Sugerencia: Sea $u = ax + b$.

14. Sea $p \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x+p) = f(x)$. Prueba que

$$\int_0^p f(u)du = \int_x^{x+p} f(u)du, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

15. Sean g diferenciable en $\mathbb{R}$, f continua en $\mathbb{R}$ y

$$h(x) = x^2 \int_{g(x)}^{g(x^3)} f(t)dt.$$

   (a) Justifica que h es diferenciable y calcula su derivada.
   (b) Si f y g son impares, justifica si h es una función par, una función impar, o ninguna de éstas.

16. Sea f continua en $\mathbb{R}^{+}$ y sea $H(x) = \int_1^x \frac{1}{t} f\left(t + \frac{1}{t}\right) dt$. Demuestra que $H(1/x) = -H(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^{+}$.

17. Usando un cambio de variable, demuestra que

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$$

18. Sea f continua en $\mathbb{R}^{+}$ y sea

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} f\left(t + \frac{1}{t}\right) dt, \quad x \geq 1.$$

Demuestra que $g(1/x) = -g(x)$.

19. Considera las funciones

$$F(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt, \quad G(x)=\int_b^{bx}\frac{1}{t}dt$$

con $b>0$. Sin efectuar la integral, demuestra que $F(x)=G(x)$. Luego, usa este hecho para demostrar que si $a,b>0$, entonces

$$\int_1^a \frac{1}{t}dt+\int_1^b \frac{1}{t}dt=\int_1^{ab}\frac{1}{t}dt.$$

20. Encuentra todas las funciones diferenciables $f(x)$ tales que satisfacen la ecuación integral

$$\operatorname{sen}[f(x)]=\int_0^x \frac{u\sqrt{1-\operatorname{sen}^2[f(u)]}}{1+u^2}du, \quad |x|<\pi/2.$$

21. Encuentra todas las funciones diferenciables $y=f(x)$ que satisfacen la ecuación

$$\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\right)y'=1.$$

1.6 Función logaritmo natural

1. A partir de la gráfica de $y=\ln x$ bosqueja la gráfica de:

   (a) $y=\ln(1/x)$.

   (b) $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

   (c) $y=\ln|x|$.

   (d) $y=|\ln x|$.

2. Decide si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

   (a) $\ln\dfrac{a}{b}=\dfrac{\ln a}{\ln b}, \quad a,b>0,\ b\neq 1.$

   (b) $\ln(a-b)=\dfrac{\ln a}{\ln b}, \quad a>b>0,\ b\neq 1.$

   (c) $\ln(a-b)=\ln\dfrac{a}{b}, \quad a>b>0,\ b\neq 1.$

   (d) $\sqrt{\ln x}=\dfrac{1}{2}(\ln x), \quad x>0.$

   (e) $\ln(x^2)=2\ln x, \quad x\neq 0.$
   Sugerencia: analiza los dominios de las funciones $\ln(x^2)$ y $2\ln x$.

   (f) $\ln(x^2)=2\ln|x|$, para todo $x\neq 0$.

3. Proporciona el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

   (a) $f(x) = (\ln x) \ln (\operatorname{sen} x)$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} + \ln (1/x)$.

   (c) $f(x) = \ln \left(\sqrt{-\ln x}\right)$.

   (d) $y = [\ln (\ln x)]^3$.

   (e) $f(x) = \ln^2 \left(\dfrac{3x+2}{x^4}\right)$.

   (f) $f(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{x \ln x}$.

   (g) $y = \ln \sqrt{\dfrac{x^2+1}{\operatorname{sen}\,(x)}}$.

   (h) $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \ln \left(x^2 - 1\right) \sqrt{\cos (t) + 1} dt$.

4. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$. Halla los puntos <u>del dominio de f</u> tales que $f'(x) < 0$.

5. Usa derivación implícita para calcular dy/dx, si $y = \ln(xy^2)$.

6. Halla <u>todas</u> las funciones diferenciables f que satisfacen la ecuación

$$[f(x)]^2 = \int_0^x \frac{uf(u)}{3+u^2}\, du, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

7. Determina una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea par, con $f(0) = 0$ y tal que

$$\ln (1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1 + f(\sqrt{t})}\, dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

8. Proporciona el dominio de cada función y luego encuentra su derivada usando derivación logarítmica:

   (a)
$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{(x^2+1)^{5/2} \sqrt{2 + \operatorname{sen} x}}.$$

   (b)
$$y = \frac{\left(x^2+5\right) \cos^2 \left(x^3+2\right)}{\sqrt{x\,(x^3+3)}}.$$

9. Usa logaritmos para obtener $g'(0)$ si

$$g(x) = \frac{x^4\,(x-1)}{(x+2)\,(x^2+1)}.$$

10. Determina las siguientes integrales indefinidas:

    (a) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}-2x}$.

    (b) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,dx$.

    (c) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sqrt{x-1}}\,dx$, $x > 2$.

    (d) $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x+2}dx$.

    (e) $\int \dfrac{1}{3+x^{1/3}}\,dx$. Sugerencia: Utiliza la sustitución $u = 3 + x^{1/3}$.

    (f) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x+4x\ln^2(x)}\,dx$.

    (g) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$.

    (h) $\displaystyle\int \frac{1}{x+x\operatorname{sen}(\ln(x))}\,dx$.

    (i) $\displaystyle\int (1+\ln x)\cot(x\ln x)dx$.

    (j) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x\tan x}\,dx$. Sugerencia: Utiliza la sustitución $u = x\operatorname{sen} x + \cos x$.

11. Calcula las siguientes integrales, usando el método de sustitución para integrales definidas:

    (a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$. (Observa que $\ln e = 1$.)

    (b) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

    (c) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dt}{3+\sqrt{t+8}}$.

12. Sean $a < b \in (0,\infty)$ fijos. Define $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, con

$$g(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\,dt.$$

Usa la regla de Leibniz para probar que g es constante. ¿Cuál es la constante?

13. (a) Prueba que si $t \geq 1$, entonces $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$, y de aquí obtén que

$$0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2, \quad \text{para toda } x \geq 1.$$

(b) Concluye que $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. (Usa el teorema del sandwich).

14. Usando el cambio de variable $u = 1/v$ halla el valor de $f(x) - f(1/x)$ para todo $x > 0$, en donde

$$f(x) = \int_1^x \frac{(\log u)^2}{1+u} du.$$

15. Sea $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

y

$$\lim_{t\to 0} \frac{L(1+t)}{t} = 1. \quad (*)$$

Prueba que $L(x) = \ln x$, para todo $x > 0$. (Sugerencia: Prueba que $L(1) = 0$ y usa (*) para demostrar que $L'(x) = 1/x$.)

16. Por medio del teorema del valor medio para integrales y la propiedad de aditividad de la integral, sin evaluar explícitamente muestra que

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 [\ln x]^n \, dx = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \int_2^3 [\ln x]^n \, dx = \infty.$$

2 Funciones inversas. Formas indeterminadas

2.1 Funciones inversas

1. Determina si la función dada en cada inciso tiene una inversa. Si existe, da el dominio y la imagen de la inversa, y luego grafica f y f^{-1}.

   (a) $f(x) = \sqrt[6]{x}$.
   (b) $f(t) = \sqrt{1-t^2}$.
   (c) $f(x) = x + |x|$.
   (d) $f(x) = \ln(x^2)$.

2. En cada inciso muestra que la función es su propia inversa y esboza su gráfica:

   (a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$.
   (b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$.

3. Supón que f posee una inversa f^{-1}, que $f(2) = -3$ y $f'(2) = 2/3$. Si $g(x) = \dfrac{1}{f^{-1}}$, ¿cuál es el valor de $g'(-3)$?

4. En cada inciso, encuentra un intervalo en el que f tenga una inversa (no es necesario encontrar f^{-1}):

   (a) $f(t) = t^4 + 2t^2 + 1$.

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   (d) $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \ln t \, dt, \;\; 0 < x < 1$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}^4(t^2)dt$. Muestra que f tiene inversa.

6. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$.

   (a) Muestra que f es creciente y diferenciable en $\mathbb{R}$.

   (b) Calcula $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(9)$. (Observa que $f(2) = 9$.)

7. Sea g la función inversa de $f(x) = x^7 + 5x^5 + 2x - 2$. Calcula $g'(-2)$.

8. Encuentra la derivada de la función inversa f^{-1} de $f(x) = \ln(x) + 2x + 1$ en el punto $a = 3$, sin buscar la fórmula de f^{-1}.

9. Demuestra que f tiene una función inversa f^{-1} y determina la recta tangente a f^{-1} en el punto P :

$$f(x) = 2 - x - x^3, \quad P(-8, 2).$$

10. Sea $f(x) = 2 + \int_0^x \sqrt{3 + 2t^4 + t^6}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Demuestra que f posee una inversa f^{-1}.

    (b) Encuentra $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

11. Sea $F(x) = \int_0^{3x^3} \sec^2\left(t^2\right) dt$.

    (a) Encuentra un subintervalo de $[0, 2\pi]$ para el cual $F(x)$ tenga inversa. Justifica tu respuesta.

    (b) Sea $c = F\left(\sqrt{\pi/3}\right)$. Encuentra $\left(F^{-1}\right)'(c)$.

12. Muestra que si f y g poseen inversas f^{-1} y g^{-1}, entonces $g \circ f$ posee una inversa, y

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

13. Supón que f posee una inversa y sea a una constante. Sea $g(x) = f(x+a)$, para toda x tal que $x + a$ está en el dominio de f. Muestra que g tiene una inversa y que
$$g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - a.$$

14. Supón que f posee una inversa y sea a una constante. Sea $g(x) = f(ax)$, para toda x tal que ax está en el dominio de f. Muestra que g tiene una inversa y que
$$g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x)}{a}.$$

15. Sea g una función diferenciable en todo $\mathbb{R}$ tal que $xg(x) > 0$. Dada la función
$$f(x) = \int_{-g(x)}^{g(x)} \frac{u^8}{1+u^4} du,$$
determina: (i) su dominio, (ii) si $f(x)$ es par, impar o ninguna de las dos, (iii) calcula su derivada y (iv) el conjunto en donde f^{-1} existe.

2.2 Función exponencial natural

1. A partir de la gráfica de $y = e^x$ bosqueja la gráfica de:

   (a) $y = -e^x$.
   (b) $y = e^{-x}$.
   (c) $y = e^{-|x|}$.

2. Simplifica las expresiones dadas:

   (a) $\ln(\ln e^e)$
   (b) $\ln\left(x^2 e^{-2x}\right)$.
   (c) $e^{x+2\ln x}$.
   (d) $e^{\ln x - 2\ln y}$.

3. En cada una de las siguientes expresiones despeja y:

   (a) $x = \dfrac{e^y}{e^y+1}$.
   (b) $z = \dfrac{3e^y - 2}{e^y + 4}$.
   (c) $\ln(y-1) - \ln 2 = x + \ln x$.
   (d) $\ln\left(y^2 - 1\right) = \ln x + \ln(y+1)$.
   (e) $e^{2\ln x - \ln y} - 1 = e^x$.
   (f) $\sqrt{\ln y} = \ln\sqrt{y}$.

4. Encuentra el valor de x, si:

   (a) $\dfrac{3e^{-x} - 2e^{x}}{5} = 1.$

   (b) $\dfrac{e^{-x} + 3\,e^{x}}{5} = 1.$

   (c) $2e^{x} + 3e^{-x} = 4.$

5. Encuentra el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

   (a) $y = \ln(a - \ln x).$

   (b) $y = \ln\left(\ln\left(5 + 3x\right)\right).$

6. Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $y = \dfrac{1}{e^{2x}\ln x}.$

   (b) $y = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}.$

   (c) $y = \left(e^{\sqrt{\ln x}}\right)^{2}.$

   (d) $f(x) = x^{3x} e^{x^{\operatorname{sen}(x)}}.$

   (e) $y = \int_{1}^{e^{(x^2)}} \ln^2\left(\sqrt{t}\right)\, dt$. Simplifica la respuesta.

   (f) $F(x) = \int_{0}^{3x} e^{t^2 - 9x^2} dt$. Simplifica el resultado.

   (g) $f(x) = \int_{1}^{e^{(x^2)}} \ln\left(\sqrt{t}\right)\, dt$. Simplifica el resultado.

   (h) $F(x) = \displaystyle\int_{e}^{e^{\sqrt{x}}} \frac{1}{\ln\left(t^2\right)} dt, \;\; x > 0$. Simplifica el resultado.

7. Usa diferenciación implícita para calcular dy/dx :

   (a) $e^{xy} + y = 2.$

   (b) $\ln(y/x) = e^{x+y}.$

   (c) $xe^{y} + 2x = \ln y.$

8. ¿En qué intervalo es creciente la función

$$f(x) = \int_{0}^{x} \left(1 - t^2\right) \exp\left(t^2\right) dt?$$

9. La concentración y de una droga en la sangre t minutos después de haber sido inyectada está dada por

$$y = \frac{c}{a - b}\left(e^{-bt} - e^{-at}\right),$$

   en donde a, b y c son constantes positivas, con $a > b$.

(a) Encuentra el valor máximo de y.

(b) ¿Qué sucede con el valor de y a medida que t se hace muy grande?

10. Obtén el punto $(c, f(c))$ en la gráfica de $f(x) = e^{x^2-4}$ en donde la recta tangente es $y = -4x - 7$.

11. Obtén el valor promedio de la función $f(x) = \dfrac{1+e^x}{x+e^x}$ en el intervalo $[0,1]$.

12. Sea $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

    (a) Encuentra el dominio de f.

    (b) Encuentra $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to(-\infty)} f(x)$.

    (c) Determina f', f'', intervalos de crecimiento y decrecimiento, posibles valores extremos y puntos de inflexión, y luego esboza la gráfica de la función f, indicando las asíntotas.

13. Sea $f(x) = 6/\left(1 + 2e^{-x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Prueba que $f'(x) = \dfrac{12e^{-x}}{\left(1+2e^{-x}\right)^2}$.

    (b) Prueba que $f''(x) = \dfrac{12e^{-x}(-1+2e^{-x})}{\left(1+2e^{-x}\right)^3}$.

    (c) Esboza la gráfica de la función f, indicando el punto de inflexión y las asíntotas. Esta curva se conoce como la curva logística.

14. Encuentra la función derivable $f(x)$ que satisface la ecuación $f(x) = e^{\frac{1}{f(x)}}$.

15. Usando propiedades de la integral definida, encuentra cotas máxima y mínima para el valor de $\int_{\pi}^{2\pi} e^{\operatorname{sen}(x)} dx$.

16. Prueba que:

    (a) $\displaystyle\int_0^1 e^{x-x^2} dx \leq \sqrt[4]{e}$.

    (b) $\displaystyle\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x}\, dx \leq 2e^2$.

    (c) $\displaystyle e^{-1} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\operatorname{sen}(x^2+1)} dx \leq e$.

17. Sea $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} e^{t+(1/t)}\, dt$, $x \in \mathbb{R}^+$. Mediante un cambio de variable adecuado demuestra que $F(1/x) = -F(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

18. Sea $g(x) = \int_0^{2\ln x} \ln\left(e^t + e^{-t}\right) dt, \;\; x \geq 1.$

    (a) Sin resolver la integral, demuestra que $g(1/x) = -g(x)$.

    (b) Justifica que g es diferenciable en su dominio, y determina $g'(x)$.

19. Sea $F(t) = \int_{-3\ln t}^{3\ln t} \ln\left(e^\theta + e^{-\theta}\right) \, d\theta, \, t > 0.$

    (a) Justifica que F es diferenciable

    (b) Halla la derivada F' y simplifica el resultado.

20. Considera $g(x) = \int_0^{\ln(x)} \frac{e^t - 1}{e^t + 1} dt.$

    (a) Determina el intervalo donde g es diferenciable.

    (b) Demuestra que g tiene inversa en $(1, \infty)$.

    (c) Encuentra $(g^{-1})'(0)$.

21. Determina una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea par, con $f(0) = 0$ y tal que

$$\ln(1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{e^t}{1 + f(\sqrt{t})} \, dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

    Sugerencia: Utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo.

22. Sea f continua en $\mathbb{R}^+$ y sea

$$g(\alpha) = \int_{1/(e^{2\alpha})}^{e^{2\alpha}} f(u) \, f\left(\frac{1}{u}\right) du, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

    (a) Justifica que g es diferenciable en $\mathbb{R}$.

    (b) Determina $g'(0)$.

23. Encuentra el valor de a y la función $f(x)$ que satisfacen

$$a + \int_a^{x^2} \frac{f(t)}{t} dt = e^x + x^2 - e, \quad \text{con } x > 0.$$

24. Determina f'', si

$$f(x) = \int_1^x \sqrt[3]{\frac{(3t+7)(t^2-1)^2}{t^2 e^{2t}}} dt.$$

25. Halla valores de a y b (uno en función del otro) tales que $e^x = a + \int_b^x e^t dt$.

26. Utiliza la linealización de $f(x) = \displaystyle\int_{2\,\mathrm{sen}\,x}^{0} e^{t^2}\,dt$ en $x_0 = 0$ para estimar el valor de $f(0.1)$.

27. Encuentra la inversa f^{-1} de $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

28. Obtén $\left(f^{-1}\right)'(c)$, si $f(x) = x \ln x,\ c = 2e^2$.

29. Sea $f(x) = 2e^{3x} + \displaystyle\int_0^x \sqrt{3 + 2t^4 + t^6}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$.

    (a) Justifica que f es diferenciable.

    (b) Demuestra que f es creciente, y por tanto posee una inversa f^{-1}.

    (c) Encuentra $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

30. Sea $f(x) = x^3 \ln x$, $x > 0$.

    (a) Halla los valores de x para los que f es creciente.

    (b) Si f^{-1} es la función inversa de f, obtén $\left(f^{-1}\right)'(3e^9)$.

31. Sea $f(x) = \dfrac{e^{-3x}}{x^2 + 1}$.

    (a) Demuestra que f es monótona y por tanto posee una inversa f^{-1}

    (b) Calcula $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

32. Determina las siguientes integrales indefinidas:

    (a) $\displaystyle\int \ln\left(e^{2x-1}\right) dx$.

    (b) $\displaystyle\int \frac{e^{3/x}}{x^2}\,dx$.

    (c) $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$.

    (d) $\displaystyle\int \frac{\cos(5x)}{e^{\mathrm{sen}(5x)}}\,dx$.

    (e) $\displaystyle\int \frac{\tan(e^{-3x})}{e^{3x}}\,dx$.

33. Calcula las siguientes integrales definidas:

    (a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

    (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^z + 1}{e^z + z}\,dz$.

(c) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} \sqrt{e^x}\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 3} e^{x-e^x}\,dx.$

(e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^{-3|x-2|}\,dx.$

(f) $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^{x+1}e^{|x+1|}dx.$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{e^{1+\ln x}}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

(h) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1}dx.$

(i) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{2x}}{1-e^x}dx.$ Utiliza la sustitución $u = e^x$.

34. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \displaystyle\int_{0}^{2x} \left(x^2+1\right) e^{t^2} dt.$

(a) Determina si g es una función par, impar o ninguna de éstas.

(b) Encuentra $g'(x)$.

35. Demuestra que $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{(1-x)a} e^{xb} dx = \frac{e^b - e^a}{b-a}$, $a \neq b$.

36. Sea $f(x) = e^{(2-x)a} e^{xb}$, $a \neq b$. Demuestra que existe $c \in [0,2]$ tal que

$$f(c) = \frac{e^{2b} - e^{2a}}{2b - 2a}.$$

37. Sea $k \in \mathbb{R}$ y considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} + 2k - \dfrac{1}{2}, & \text{si } x > 0 \\ k, & \text{si } x = 0 \\ \left(k^2 + \dfrac{k}{2}\right) \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(a) Determina k de modo que f sea continua en $x = 0$.

(b) Demuestra que para todo $x > 0$, $e^{-1/x^2} \in (0,1)$.

(c) Para $k = 1/2$ define la inversa de la restricción de f a $\mathbb{R}^+$.

38. Considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} + 2k - \dfrac{1}{2}, & \text{si } x > 0 \\ k, & \text{si } x = 0 \\ (2k^2 + k)\left(\dfrac{1 - \cos x}{x^2}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}.$$

   (a) Determina $k \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$.

   (b) Demuestra que para todo $x < 0$, $e^{-1/x^2} \in (0, 1)$.

   (c) Suponiendo que $k = 1/2$, define la inversa de la restricción de f a $\mathbb{R}^+$.

39. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - \alpha| e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2}}$, en donde α es una constante real.

   (a) Determina el dominio de diferenciabilidad de f y calcula f'.

   (b) Estudia la monotonía y extremos relativos de f.

   (c) Indica, justificando, si f admite máximos y mínimos absolutos.

   (d) Justifica que f restringida al intervalo $(\alpha + 1, +\infty)$ es invertible e indica el dominio de la respectiva función inversa. Calcula la derivada de la función inversa en el punto $f(\alpha + 2)$.

40. Sea $f > 0$ una función continua en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y diferenciable en (a, b). Demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

41. (a) Obtén las coordenadas del máximo absoluto de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ en $(0, \infty)$.

   (b) Usando el inciso anterior, demuestra que $x^e \leq e^x$ para todo $x > 0$, y $x^e = e^x$ si y sólo si $x = e$.

42. Sea f una función que satisface $f(0) = 1$ y $f(a + b) = f(a)f(b)$ para cualesquiera reales a y b. Supón que f es diferenciable en 0, con $f'(0) = 1$.

   (a) Usando la definición de derivada demuestra que f es diferenciable en $(-\infty, \infty)$ y que $f'(x) = f(x)$ para todo x.

   (b) Demuestra que $\dfrac{d}{dx}\left[e^{-x} f(x)\right] = 0$ para todo x.

   (c) Usa el inciso b para demostrar que $f(x) = e^x$ para todo x.

43. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Supón que $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que $f(x) = Ce^x$ para alguna $C \in \mathbb{R}$. Sugerencia: Calcula $\left(e^{-x} f(x)\right)'$.

44. Grafica la función (dominio, intervalos de monotonía, extremos locales, concavidad,...):

   (a) $f(x) = e^{|x|}$.
   (b) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.
   (c) $f(x) = xe^{-x}$. Sugerencia: $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x} \; = \; 0$.
   (d) $f(x) = xe^{-x^2}$. Sugerencia: $\lim\limits_{|x|\to\infty} xe^{-x^2} \; = \; 0$.
   (e) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(t^2 + 1)dt, \;\; x \in \mathbb{R}$.
   (f) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln \frac{(t+1)^2}{4} dt, \;\; x \geq 0$.

45. Sea $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

   (a) Encuentra el dominio de f.
   (b) Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.
   (c) Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
   (d) Estudia la concavidad y convexidad de f.
   (e) Esboza la gráfica de f.

46. Sea $f(x) = \ln(-\ln x)$.

   (a) Encuentra el dominio de f.
   (b) Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.
   (c) Determina los intervalos de monotonía, extremos, concavidades y puntos de inflexión de f.
   (d) Dibuja la gráfica de f.

47. Encuentra todas las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{4 - e^x}$. Justifica con límites.

48. Sea $f(x) = \dfrac{e^x}{4 - e^x}$. Determina $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\ln 4^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\ln 4^-} f(x)$.

49. En cada inciso encuentra el límite (sin L'Hopital):

   (a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$.
   (b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - e^{-h}}{h}$.

2.3 Logaritmo y exponencial en otras bases

1. Simplifica las siguientes expresiones:

   (a) $4^{\log_2 x}$.

   (b) $2^{\log_4 x}$.

   (c) $\log_3(1/9)$.

   (d) $\log_{121}(11)$.

   (e) $\ln(\log_4(2e^x))$.

   (f) $\log_3(100) - \log_3(18) - \log_3(30)$.

2. Despeja x:

   (a) $x^{2+\log_2 x} = 8$.

   (b) $z = \dfrac{2^x + 1}{2^x - 3}$.

   (c) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(\log_3 x)) = -1$.

3. En cada una de las siguientes expresiones despeja y:

   (a) $\log_3(1-y) - \log_3(y) - x = 0$.

   (b) $\dfrac{5^y - 5^{-y}}{2} = 3$.

   (c) $2^{-\log_2 y} = 5e^{-\ln y} - 4^{\log_2 3}$.

4. Si $\log_2 x = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{t}dt$, entonces $x = e^{\frac{a^2}{a-1}}$, en donde $a =$ __.

5. Encuentra el dominio y la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $y = (\log_3 r)(\log_9 r)$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(\log_2 x)}$.

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(1 - 3\log_2 x)}$.

   (d) $y = \log_3\left(\dfrac{3^x}{1-3^x}\right)$.

   (e) $y = \log_3\left(\dfrac{3^x}{3^x+1}\right)$. Simplifica.

   (f) $y = \log_7\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{e^\theta\, 2^\theta}\right)$.

   (g) $y = 5^{\sqrt{x}}$.

   (h) $y = k_0(1+r)^{nt}, \quad k_0, n > 0$ constantes.

6. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$, si

$$f(x) = \int_3^{1+2^x} \frac{\log_2(t-1)}{t-1} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7. Sea $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(3^x - \dfrac{1}{3^x}\right)$. Prueba que f es invertible en todo $\mathbb{R}$ y calcula el valor de $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{8}{9}\right)$.

8. Sea $f(x) = 5 - 3x + 2^{-x}$.

   (a) Demuestra que f es monótona y por tanto posee una inversa f^{-1}.

   (b) Calcula $\left(f^{-1}\right)'(6)$.

9. Considera la función $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{\log_2 x}} \frac{2^{t^2}}{1+2^{t^2}}\, dt$.

   (a) Determina el intervalo $I \subseteq D$ en donde g es diferenciable. Justifica.

   (b) Demuestra que g posee una inversa g^{-1} en el intervalo I.

   (c) Encuentra $(g^{-1})'(0)$.

10. Sea $f(x) = \log_{1/3}(x) - 3x + 5, \quad x \in (0, \infty)$. Encuentra los intervalos en donde f es invertible, y demuestra que $\left(f^{-1}\right)'(2) = -\dfrac{\ln 3}{\ln(27e)}$.

11. Determina las siguientes integrales indefinidas:

    (a) $\displaystyle\int e^x\, 10^x\, dx$.

    (b) $\displaystyle\int \frac{3^{2x}}{\sqrt{1-3^x}} dx$.

    (c) $\displaystyle\int \frac{2^{-1/x^2}}{x^3} dx$.

    (d) $\displaystyle\int 3^{2^x}\, 2^x dx$.

    (e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2^{\tan x}}}{\cos^2 x} dx$.

    (f) $\displaystyle\int \frac{3^x}{3-3^x} dx$.

    (g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \log_8 x}$.

12. Calcula las siguientes integrales definidas:

   (a) $\displaystyle\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(x)}{x} dx$. Simplifica la respuesta.

   (b) $\displaystyle\int_{4}^{16} \frac{1}{x} \log_4\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

   (c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} 3^{|x+1|}\, dx$.

   (d) $\displaystyle\int_{3}^{9} \frac{dx}{x\left(\log_3 x\right)^2}$.

   (e) $\displaystyle\int_{-2}^{-16} \frac{dx}{x \log_2\left(|x|^3\right)}$.

   (f) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan(t)} \sec^2 t\, dt$.

   (g) $\displaystyle\int_{0}^{\log_3 2} \frac{1}{1+3^x} dx$. Simplifica la respuesta.

13. Prueba que si $x > 0$ y $x^{(x)^x} = (x^x)^x$, entonces $x = 1$ o $x = 2$.

14. Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $y = x^{x^{x^4}}, \ x > 0$.

   (b) $y = \left(2^x + 1\right)^{1/x}, \ x > 0$.

   (c) $y = \dfrac{1}{\left(4^{1/x} + 1\right)^x}, \ x > 0$.

   (d) $f'(1)$, si $f(x) = \left(\dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}\right)^x$.

   (e) $y = x^{\sqrt{x}} \left(\ln x\right)^{\ln x}, \ x > 1$.

   (f) $f'(e)$, si $f(x) = (\ln x)^x \left(1 + \ln x\right)$. Simplifica el resultado.

   (g) $f(x) = \dfrac{\ln 5}{(\ln x)^{3 \ln x}}, \ x > 1$.

   (h) $g(x) = \dfrac{2^{\log_7 3}\, x^{\ln x}}{(\ln x)^x \sqrt{2^x + 1}}, \ x > 1$.

   (i) $f(x) = \left(\displaystyle\int_{1/2}^{1/x} \frac{dt}{t}\right)^{\int_1^x \frac{dt}{t}}, \ x > 0$.

   (j) $y = (\ln x)^x + 2^{1/x}, \ x > 1$.

   (k) $f'(e)$, si $f(x) = 2^{\frac{1}{\ln x}} + x^{\ln x}$. Simplifica el resultado.

2.4 Funciones hiperbólicas

1. Simplifica $\cosh\left[\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$.

2. Resuelve en $\mathbb{R}$ la ecuación

$$2^{\ln[\text{senh}(x)]+\ln[\cosh(x)]} = 4^{\ln\left(\sqrt{e}\right)}.$$

3. Muestra que $\cosh(x) > \dfrac{e^{|x|}}{2}$ para todo x.

4. Muestra que $\cosh(x) \geq 1$ para todo x. Usa el hecho de que $z + \dfrac{1}{z} \geq 2$ para todo $z > 0$.

5. Demuestra que para todo x:

   (a) $e^x = \cosh(x) + senh(x)$.

   (b) $(\cosh(x) + \text{senh}(x))^n = \cosh(nx) + senh(nx)$.

6. (a) Demuestra la siguiente identidad:

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \text{senh}(x)\text{senh}(y).$$

   (b) Sean $\alpha, \beta > 0$. Si $\text{senh}(x) = \dfrac{\alpha}{\beta}$ y $\text{senh}(y) = \dfrac{\beta}{\alpha}$, demuestra que

$$\cosh(x+y) = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha\beta}.$$

7. (a) Demuestra la siguiente identidad:

$$\text{senh}(x+y) = \text{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\text{senh}(y).$$

   (b) Sean $\alpha, \beta > 0$. Si $\text{senh}(x) = \dfrac{\alpha}{\beta}$ y $\text{senh}(y) = \dfrac{\beta}{\alpha}$, demuestra que

$$\text{senh}(x+y) = \frac{(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha\beta}.$$

8. Utiliza la definición de las funciones hiperbólicas para determinar los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh(x)$.

   (b) $\lim\limits_{x\to(-\infty)} \tanh(x)$.

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} senh(x)$.

   (d) $\lim\limits_{x\to(-\infty)} senh(x)$.

(e) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sech}(x)$.

(f) $\lim_{x\to 0^+} \coth(x)$.

(g) $\lim_{x\to 0^-} \coth(x)$.

(h) $\lim_{x\to\infty} \coth(x)$.

(i) $\lim_{x\to(-\infty)} \operatorname{csch}(x)$.

9. Determina el dominio y la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \coth(\ln x)$.

   (b) $f(x) = \cosh^2(\sqrt{2-e^x})$.

   (c) $f(x) = \operatorname{sech}(\sqrt{x})$.

   (d) $f(x) = \operatorname{senh}^2(\sqrt{1-x^2})$.

10. Determina la derivada de las siguientes funciones:

    (a) $L(\theta) = \displaystyle\int_1^{\cosh(\theta)} \frac{e^{\cosh^{-1}(x)}}{\operatorname{senh}(\theta)}\,dx$, $\theta > 0$. Simplifica la respuesta.

    (b) $g(\theta) = \displaystyle\int_{\operatorname{senh}^{-1}\theta}^{0} \frac{e^{\operatorname{senh} x}}{x+1}\,dx$, $\theta \geq 0$. Simplifica el resultado.

11. Sean

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + \int_{\cos(\theta)}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

y

$$B(x) = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(x)\cosh(x) - \int_{1}^{\cosh(x)} \sqrt{s^2-1}\,ds, \quad x \geq 0.$$

Prueba que $A(\theta) = \frac{\theta}{2}$ para todo θ y $B(x) = \frac{x}{2}$ para todo x. Sugerencia: $A'(\theta) = \frac{1}{2}$ y $B'(x) = \frac{1}{2}$ por la regla de Leibniz.

12. Encuentra $S'(x)$, si

$$S(x) = \int_0^{\operatorname{senh}(x)} \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

13. Comprueba que $y = a\cosh(cx) + b\operatorname{senh}(cx)$ satisface la ecuación

$$y'' - c^2 y = 0.$$

14. Demuestra que
$$\left(\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right)^2 + (\tanh x)' = 1.$$

15. Encuentra una función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ positiva y diferenciable, tal que
$$\ln\left[f(x)\right] = \int_0^x \frac{\cosh^2(t)}{f(t)}\, dt.$$

16. Halla los valores de a tales que
$$\int_0^a 2\operatorname{senh}(2x)\, dx = 1.$$

17. Construye la gráfica (con todo detalle) de la función:

    (a) $f(x) = (x-1)\cosh(x) - \operatorname{senh}(x)$.

    (b) $f(x) = \sec\mathrm{h}\left(\sqrt[3]{x^2(x-3)}\right)$.

18. Determina las siguientes integrales indefinidas:

    (a) $\displaystyle\int 6\cosh\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right)\, dx.$

    (b) $\displaystyle\int e^t \operatorname{csch}(t)\, dt.$ Sugerencia: usa la definición de $\operatorname{csch}(t)$.

    (c) $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{senh} x - 5\cosh x}\, dx.$
    Sugerencia: usa las definiciones de $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$.

19. Calcula las siguientes integrales definidas:

    (a) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} e^{-x}\operatorname{senh}(x)\, dx.$

    (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 10} 4\, sen\mathrm{h}^2\left(\frac{x}{2}\right)\, dx.$

    (c) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \sqrt{1+\cosh(x)}\, dx.$

    (d) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} e^{-x}\cosh(x)\, dx.$

    (e) $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} e^t \operatorname{sech}(t)\, dt.$ Simplifica la respuesta.

    (f) $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{-\ln\sqrt{2}} e^t \operatorname{csch}(t)\, dt.$ Simplifica la respuesta.

(g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\,\mathrm{senh}(\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta\; d\theta$.

20. Demuestra que
$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

21. Caracteriza la función inversa del coseno hiperbólico y demuestra que:

    (a) $\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

    (b) $\left(\cosh^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

22. Encuentra detalladamente el dominio de $f(x) = \sqrt{\mathrm{arcsenh}\,(x^2-1)}$.

23. Dado $x \neq 0$, encuentra $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{\mathrm{senh}(t)} = x$.

24. Demuestra que $\coth^{-1}(x) = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\ (x \neq 0)$.

25. Simplifica
$$\cosh\left(\mathrm{senh}^{-1}(x)\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

26. Resuelve la siguiente ecuación (valor explícito de x) o justifica si la ecuación no tiene solución:
$$\mathrm{senh}^{-1}(x) + \cosh^{-1}(x+2) = 0.$$

27. Considera la función $f(x) = 1 + \cosh^{-1}(3 - \ln(2x))$.

    (a) Determina el dominio y la imagen de f.

    (b) Demuestra que f es monótona y por tanto posee una inversa.

    (c) Caracteriza la función inversa de f (dominio, imagen y forma funcional).

28. Considera la función $f(x) = \mathrm{sech}^{-1}(4-x^2)$.

    (a) Justifica el dominio de la función sech^{-1} y después determina el dominio de $f(x)$.

    (b) Deduce la derivada de la función $f(x)$ a partir de la derivada de la función inversa y la función recíproca.

29. Las funciones $\tanh^{-1}(x)$ y $\coth^{-1}(x)$ tienen la misma derivada, $\dfrac{1}{1-x^2}$. ¿Por qué no difieren en una constante?

30. Determina la derivada de las siguientes funciones:

    (a) $y = \cosh^{-1}(2\sqrt{x+1})$.

(b) $y = \tanh^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$.

(c) $y = \left(1-t^2\right)\coth^{-1}(t)$.

(d) $y = \ln(x) + \sqrt{1-x^2}\,\operatorname{sech}^{-1}(x)$.

(e) $y = \operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$.

(f) $L\,(x) = \displaystyle\int_1^{\operatorname{senh}(x)} \frac{e^{\operatorname{arcsenh}(t)}}{\cosh(x)}\,dt,\;\; x \geq 0$. Simplifica la respuesta.

(g) $f\,(t) = \displaystyle\int_{\operatorname{senh}^{-1}(t)}^{0} \sqrt{t^2+1}\; e^{\operatorname{senh}(x)}\,dx$. Simplifica la respuesta.

31. Demuestra que si $f(x) = \operatorname{arctanh}\!\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$, entonces $f'(x)\cos x = 1$.

32. Determina las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{x - \operatorname{senh}^{-1}(2x)}{\sqrt{1+4x^2}}dx$.

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}}dx$.

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx$, usando $x = 3\,\cosh\,(t)\,,\; t \geq 0$.

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$, $0 < x < 2$, usando $x \;=\; 2\operatorname{sech}(u)$, $u > 0$.
Expresa la respuesta en términos de funciones algebraicas.

33. Calcula las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{16x^2+9}}dx$.

(b) $\displaystyle\int_5^{5+\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{28-10x+x^2}}$.

(c) $\displaystyle\int_5^{10} \frac{1}{\sqrt{9x^2-25}}dx$.

(d) $\displaystyle\int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x-5}}$.

(e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$.

(f) $\displaystyle\int_{1/5}^{3/13} \frac{dx}{x\sqrt{1-16x^2}}$.

(g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1-\ln x}}{\sqrt{4+x^2}}dx$.

(h) $\displaystyle\int_1^{\cosh(4)} \sqrt{x^2-1}\,dx$, usando $u = \cosh^{-1}(x)$, $x \geq 1$.

(i) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\frac{3}{2}\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-2}}$.

(j) $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{2}} \frac{e^{2x}}{\sqrt{4+e^{4x}}}dx$.

(k) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x\sqrt{16+\ln^4 x}}dx$.

(l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x\,\cos x}{\sqrt{4+\operatorname{sen}^4 x}}dx$.

(m) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$.

34. Determina una primitiva de cada una de las siguientes funciones, efectuando el cambio de variable indicado:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x \;=\; \cosh(t)$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x = \cosh(u)$.

(c) $f(x) = x^2\sqrt{x^2-1}$, $x = \cosh(u)$, $u \geq 0$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = \operatorname{senh}(u)$.

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{senh}(x)}$, $u = \cosh(x)$.

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, $x = \cosh(u)$.

(g) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+4)^{3/2}}$, $x = 2\operatorname{senh}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
Da la respuesta en términos de funciones algebraicas.

35. Llevando a cabo la integración, utiliza la sustitución $x = 4\cosh(t)$, $t \geq 0$, para demostrar que

$$\int \sqrt{x^2-16}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-16}}{2} - 8\operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{4}\right) + C.$$

36. Llevando a cabo la integración, utiliza la sustitución $x = 3\operatorname{senh}(t)$ para demostrar que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2+9} - \frac{9}{2}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

37. Usando la sustitución $x = \cosh(u)$, demuestra que para $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^{\cosh(t)} x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{32}\operatorname{senh}(4t) - \frac{t}{8}.$$

38. Demuestra que para $t > 0$,

$$\int_1^{\cosh(t)} \sqrt{x^2-1}\,dx = \operatorname{senh}(2t) - \frac{t}{2}.$$

39. (a) Usando el cambio de variable $u = \operatorname{senh}^{-1} x$ demuestra que

$$\int_0^{\operatorname{senh}(t)} \sqrt{x^2+1}\,dx = \int_0^t \cosh^2(u)du, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Usa la parte (a) para demostrar que

$$\int_0^{\operatorname{senh}(t)} \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{\operatorname{senh}(2t)}{4} + \frac{t}{2}.$$

40. (a) Usando el cambio de variable $u = \cosh^{-1} x$ demuestra que

$$\int_1^{\cosh(t)} \sqrt{x^2-1}dx = \int_0^t \operatorname{senh}^2(u)du, \quad t > 0.$$

(b) Usa la parte (a) para demostrar que

$$\int_1^{\cosh(t)} \sqrt{x^2-1}dx = \frac{\operatorname{senh}(2t)}{4} - \frac{t}{2}.$$

2.5 Funciones trigonométricas inversas

1. Simplifica la expresión $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}\right)$.
2. Simplifica la expresión $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}(x/5)\right)$.
3. Calcula:
   (a) $\tan\left(\sec^{-1}\sqrt{2}\right)$.
   (b) $sen^{-1}(\cos(\pi/6))$.
4. Halla el valor exacto de $\operatorname{sen}\left(\arctan\frac{1}{2} + \arccos\frac{4}{5}\right)$.

5. Prueba que

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{sen}^{-1}(x), \quad \text{si } |x| < 1.$$

(Sugerencia: Deriva ambos lados. Verifica, dibujando el triángulo).

6. Prueba que

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right), \quad \text{si } 0 < |x| \leq 1.$$

(Sugerencia: Dibuja un triángulo o deriva ambos lados de la igualdad).

7. Demuestra que:

   (a) $\operatorname{sen}(2 \operatorname{sen} x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

   (b) $\cos\left(2\cos^{-1} x\right) = 2x^2 - 1$.

8. Sea $f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$, $x > 0$.

   (a) Demuestra que f es constante en su dominio.

   (b) Encuentra el valor de la constante.

9. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}} \cos\left(\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

   (a) Encuentra detalladamente el dominio D.

   (b) Determina la derivada de f. Sugerencia: puedes utilizar derivación logarítmica.

10. Sea

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{a+x}{1-ax}\right), \quad x \neq \frac{1}{a}, \quad a \neq 0.$$

Demuestra que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

11. Demuestra que $\left(\operatorname{arccot}(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 0$ para todo $x \neq 0$.

12. Sea $y = f(x)$ una función diferenciable no lineal, tal que

$$\arctan\frac{y}{x} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0.$$

Prueba que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \quad \text{para } y \neq x, \ x \neq 0.$$

13. Determina el dominio de la función en cada inciso, y luego encuentra su derivada:

    (a) $f(x) = \sec^{-1}(\ln x)$.
    (b) $f(x) = 3\,\mathrm{sen}^{-1}(\sqrt{x^2-1})$.
    (c) $f(x) = \cot^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.
    (d) $y = \ln\sqrt{\dfrac{x^5 \mathrm{senh}(x^2+2)}{\arctan(x)}}$.
    (e) $f(x) = \mathrm{arcsen}\left[\coth\left(2^{x^3}\right)\right]$.
    (f) $f(x) = \dfrac{2^x\,\mathrm{arcsen}^2(x)}{x^x}$. Usa diferenciación logarítmica.
    (g) $f(x) = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\,e^{x^2} + \displaystyle\int_0^{\mathrm{arcsen}\,x} \sqrt{1+\mathrm{sen}^6 t}\,dt$.
    (h) $g(\theta) = \displaystyle\int_{\tan\theta}^{0} \frac{\cos\theta\, e^{\tan^{-1}x}}{\sqrt{x^2+1}}dx,\ \theta \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right)$. Simplifica el resultado.
    (i) $g(\theta) = \displaystyle\int_{\tan\theta}^{0} \frac{e^{\tan^{-1}x}}{\sqrt{x^2+1}}dx,\ \theta \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right)$. Simplifica el resultado.
    (j) $f'(0)$, si $f(x) = e^{-x}\int_0^{\tan^{-1}(x)} e^{\tan(t)}\,dt$.

14. Considera la función $G(x) = F(\mathrm{sen}\,x) - F(-\cos x)$, en donde

    $$F(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\ ,\ \text{para } |x| < 1.\ \ (x \neq 0; \text{yo diría } 0 < x < 1).$$

    Muestra que G es constante y determina su valor.

15. Sea $f(x) = 2^{-x} - \displaystyle\int_0^{\mathrm{arcsen}\,x} \sqrt{1+\mathrm{sen}^6 t}\,dt,\ \ x \in [-1,1]$.

    (a) Justifica que f es diferenciable en su dominio.
    (b) Determina la derivada de f.
    (c) Justifica que f es invertible en el intervalo $(-1,1)$.
    (d) Sea g la función inversa de f. Demuestra que $g'(1) = -\dfrac{1}{\ln(2e)}$.

16. Considera la función $f(x) = \pi - 3\,\mathrm{arcsen}(2 - 5^{4x})$.

    (a) Determina el dominio y la imagen de f.
    (b) Encuentra la derivada f' y justifica que f es inyectiva.
    (c) Caracteriza la función inversa f^{-1} de f (regla de correspondencia, dominio e imagen).

17. Considera la función definida por

$$f(x) = -\pi + \cos^{-1}(1 - \ln x).$$

(a) Determina: (i) el dominio de f, (ii) la imagen (rango) de f, (iii) los ceros de f, (iv) las soluciones de la ecuación $f(x) = -\pi$.

(b) Demuestra que f es inyectiva.

(c) Caracteriza la función inversa de f (dominio, imagen y regla de correspondencia).

18. Sea $f(x) = -\pi + \operatorname{sen}^{-1}(2 - \log_3 x)$.

(a) Demuestra que f es una función monótona.

(b) Determina el dominio y la imagen de f.

(c) Caracteriza la función inversa f^{-1} de f (dominio, imagen y regla de correspondencia.

19. Sea $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sec(-x + \pi)$.

(a) Demuestra que f es inyectiva.

(b) Determina en dónde f es creciente y en dónde es decreciente.

(c) Da el conjunto B de tal manera que $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to B$ sea biyectiva.

(d) Di formalmente si f es invertible en todo su dominio.

(e) Di para qué valores f^{-1} es derivable y para qué valores no lo es. Justifica.

(f) Calcula $\left(f^{-1}\right)'(-2)$.

20. Sea $f(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

(a) Muestra que $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$, $x \neq 1$.

(b) Encuentra una fórmula para f''.

(c) Muestra que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

(d) Esboza la gráfica de f.

21. Construye la gráfica (con todo detalle) de la función:

(a) $f(x) = \pi - 3\cos^{-1}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)$.

(b) $f(x) = \left|\frac{\pi}{4} - \operatorname{arccot}(x-1)\right|$.

22. (a) Utiliza la sustitución $u = 1/t$, para demostrar que

$$\int_1^{1/x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad 0 < x < 1.$$

(b) Utiliza la parte (a) para deducir la siguiente identidad

$$\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1}(x) = \cos^{-1}(x), \quad 0 < x < 1.$$

23. (a) Utiliza la sustitución $u = 1/t$, para demostrar que

$$\int_{1/x}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_1^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}, \quad x > 1.$$

(b) Utiliza la parte (a) para deducir la siguiente identidad

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}(x) = \csc^{-1}(x), \quad x > 1.$$

24. (a) Usando un cambio de variable, demuestra que

$$\int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2} = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}, \quad x > 0.$$

(b) Usa la parte a) para demostrar la identidad

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(x), \quad x > 0.$$

25. Sea

$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\, dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\, dt, \quad \text{con } x > 0.$$

(a) Sin efectuar la integral, demuestra que f es constante.

(b) Efectuando la integral, demuestra que la constante es $\pi/2$. Sugerencia: $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}(1/x)$.

26. (a) Demuestra que, para todo número real a,

$$\int_0^1 \frac{a}{1+a^2x^2} dx = \int_0^a \frac{1}{1+x^2} dx.$$

(b) Calcula la integral.

27. Prueba que

$$\int_0^{\pi/6} f(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \int_0^{1/2} f(u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du.$$

28. Determina las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{x-\arctan(2x)}{1+4x^2}dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^7-1}}{x}\,dx.$ Sugerencia: $u=\sqrt{x^7-1}$.

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1}\,dx.$ ($u=\sqrt{2x+1}$.)

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}.$

(e) $\displaystyle\int \frac{\arctan(3x)-1}{1+9x^2}dx.$

(f) $\displaystyle\int \frac{3dr}{\sqrt{-4r^2+8r-3}}.$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-9}}dx.$

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$

(i) $\displaystyle\frac{1}{2}\int \sqrt{e^x-9}dx$, <u>usando la sustitución</u> $u=\sqrt{e^x-9}$.

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+2x+1}.$

(k) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}\,dx}{\sqrt{1-e^{6x}}}.$

(l) $\displaystyle\int \frac{x^{n-1}\,dx}{1+x^{2n}},\ \ n\in\mathbb{Z}^+.$

(m) $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan(x)}+x\ln\left(1+x^2\right)+1}{1+x^2}dx.$

(n) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(9+9x^2)\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|}}.$

29. Calcula la integral definida:

(a) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx}e^{\cos^{-1}x}\right)dx.$

(b) $\displaystyle\int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

(c) $\displaystyle\int_{4\sqrt{3}/3}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

(d) $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{\cos\left(\sec^{-1} x\right)\ dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(e) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

(f) $\displaystyle\int_{1/9}^{1/3} \frac{3}{\sqrt{t}+9t\sqrt{t}}\,dx$.

(g) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} \frac{e^{x/2}}{1+e^x}dx$.

(h) $\displaystyle\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{e^{1+\ln x}}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.

(i) $\displaystyle\int_{-2}^{2\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

(j) $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{dx}{2x^2+2x+1}$.

(k) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x^2+8x+13}$.

(l) $\displaystyle\int_{-b}^{-b/2} \frac{dx}{\sqrt{-2bx-x^2}},\ \ b>0.$

(m) $\displaystyle\int_{1}^{1+\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

(n) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{\ln x+1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$.

30. Encuentra los valores de $a \in \mathbb{R}^+$ tales que $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x(1+\ln^2(x))} = \frac{\pi}{3}$.

31. Obtén el área bajo la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en el intervalo $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

32. Usando el método de sustitución en integral definida evalúa:

$$\int_{\ln(1/\sqrt{3})}^{0} \frac{e^t}{e^{2t}+1}dt. \text{ Simplifica la respuesta.}$$

33. Sean $a, b > 0$. Haciendo la sustitución $u = \tan x$ determina

$$\int \frac{1}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x}\, dx.$$

34. (a) Prueba que

$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \tan^{-1}(\operatorname{senh}(x)) + C.$$

(b) Prueba también que

$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh(x)) + C. \quad \text{(Derivar.)}$$

35. Determina una primitiva de la función $f(x) = \sec(x)$, efectuando el cambio de variable $t = \operatorname{sen}(x)$. (Sugerencia: Integra usando la sustitución indicada y luego utiliza la identidad $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$.

36. Demuestra que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{t}{x^2 + t^2}\, dx = 1.$$

2.6 Formas indeterminadas. Regla de L'Hopital y Teorema de Cauchy

1. (a) Prueba que $e^t \geq 1 + t$, para todo $t \in [0, \infty)$.

(b) Generaliza el resultado anterior probando que

$$e^t \geq 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}, \quad \text{para todos } t \in [0, \infty),\, n \in \mathbb{N}.$$

Sugerencia: Define $\phi_n(t) = e^t - \left(1 + \dfrac{t}{1!} + \dfrac{t^2}{2!} + \cdots + \dfrac{t^n}{n!}\right)$. Prueba que ϕ_n es creciente en $[0, \infty)$ y usa inducción.

(c) Prueba que $0 < \dfrac{t^n}{e^t} \leq \dfrac{(n+1)!}{t}$ para todo $t > 0$ y, por tanto,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^t} = 0.$$

2. Sin utilizar la regla de L'Hopital encuentra los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2.8)^h - 1}{h}$. Sugerencia: Usa la definición de derivada.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} \int_1^x e^{-t^2}\, dt$.

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\,(7x) - \text{sen}\,(4x)}{\ln(1+x)}$.

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{7^x - 5^x}{x}$.

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{9^x - 7^x}{8^x - 6^x}$.

3. (a) Demuestra que si $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ y $\lim_{x\to x_0} \varphi(x)g(x)$ existe, entonces

$$\lim_{x\to x_0} (1+\varphi(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} \varphi(x)g(x)}.$$

Ayuda: $g(x) = \dfrac{\varphi(x)g(x)}{\varphi(x)}$.

(b) Usa el inciso anterior para calcular $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-4}{x+1}\right)^{x-2}$.

4. Sin utilizar la regla de L'Hopital prueba que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}(x)}{x} = 1 \quad \text{(cambia variable)}.$$

5. Calcula, si existen, los siguientes límites:

(a) $\lim_{\theta\to\pi/2} \dfrac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)}$.

(b) $\lim_{t\to\infty} \dfrac{1 - \sqrt{\frac{t}{t+1}}}{1 - \sqrt{\frac{4t+1}{t+2}}}$.

6. Justifica que se trata de una forma indeterminada. Luego calcula, si existe, el límite:

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\text{sen}(\pi x)}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x + x^2/2}{x^3}$.

(c) $\lim_{a\to 1} \dfrac{x^{1-a} - 1}{1-a}$, $x > 0$.

(d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2^x + 4^x}{5^x - 2^x}$.

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{(-1/x^2)}}{x}$.

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - e^{-x^2}}{x\int_0^x e^{-t^2}dt}$.

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\int_0^x e^{-t^2}\,dt}{1-e^{-x^2}}$.

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{6^x-5^x}$.

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{e^{-\csc(x)}}$.

(j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{e^{-\sec(x)}}{\cos(x)}$.

(k) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$.

(l) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{a^2-ax}{a-\sqrt{ax}}\right)$.

(m) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt}$.

(n) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sec^{-1}(x)}$.

(o) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\int_2^{2x} e^{(4-t^2)}\,dt}{x-1}$.

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tanh(x)}{e^{2x}-1}$.

(q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x\operatorname{sen}(x)}$.

(r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^x-3^x}{x}$.

(s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{senh}(x)}{\operatorname{sen}(x)}$.

(t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\operatorname{sen}(x)}$.

(u) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\int_1^x \frac{1}{t}\,dt}{\int_1^x \frac{1}{2t+1}\,dt}$.

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\operatorname{sen}(x)+x}{\tan(x)-\operatorname{sen}(x)}$.

(w) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^{-1}(\operatorname{sen}^{-1}(x^2))}{(e^{2x}-1)\ln(1+2x)}$.

7. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}}, & \text{si } x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \\ \\ -\frac{1}{\pi}, & \text{si } x = \pm\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Demuestra que f es continua en $\pm\frac{\pi}{2}$.

8. Calcula el siguiente límte y muestra formalmente si existe o no:

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{1 - e^{-2|x|}}{3x} \right|.$$

9. Determina el siguiente límite, o justifica si no existe:

$$\lim_{x\to(-a)} \frac{1 - e^{-|x+a|}}{x + a}.$$

10. Muestra cuál debe ser el valor de a para que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\operatorname{sen} x}}{x^3} = 2$.

11. Sea $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado $k > 10$ y $a_i > 0$ para todo $0 \leq i \leq k$. Calcula

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(p(x))}{\ln(p'(x))}.$$

12. Sean $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$ y $G(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$. Verifica que se puede aplicar la regla de L'Hopital y calcula $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{F(x)}{G(x)}$.

13. Sea $f(x)$ una función diferenciable con inversa $g(x)$, tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) \neq 0$. Demuestra que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [f'(0)]^2$.

14. Justifica que puedes aplicar la regla de L'Hopital al siguiente límite y calcúlalo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x \left(\frac{1 - e^{-t}}{t} \right) dt}{x^2}.$$

15. Justifica que puedes aplicar la regla de L'Hopital al siguiente límite y encuentra el valor de las constantes a y b de modo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{bx - \operatorname{sen}(x)} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a + t}}\, dt = 1.$$

16. Supón que f y g son continuas en una vecindad de α y que $g(\alpha) \neq 0$. Muestra que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\int_\alpha^x f(t)\,dt}{\int_\alpha^x g(t)\,dt} = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}.$$

17. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_1 \operatorname{senh}\left(\dfrac{x}{1-x}\right), & \text{si } x < 0 \\ \alpha_2 + \tan^{-1}(x), & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

en donde α_1 y α_2 son constantes reales. Determina α_1 y α_2 de modo que la función f sea continua y diferenciable en $\mathbb{R}$.

18. Explica si es correcto usar las reglas de L'Hopital para calcular los siguientes límites:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3\,(x - \operatorname{sen}(x))}{x + \operatorname{sen}(x)}$.

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{5\operatorname{sen}(x)}$.

19. Justifica que se trata de una forma indeterminada. Luego calcula, si existe, el límite:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(2\sqrt{x}\left[\pi - 2\tan^{-1}(\sqrt{x})\right]\right)$.

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}\int_3^{3x} e^{9-t^2}\,dt\right)$.

    (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \; x\int_{\pi/2}^{\arctan x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$.

    (d) $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \left[z\,\tan^{-1}\left(\frac{3}{z}\right)\right]$.

    (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left[x^{1/2}\ln(x)\right]$.

    (f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}\int_0^x e^{u^2}\,du = 0$.

    (g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\left(\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}(3x)\right)}$.

    (h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left[x\ln(1 + 3/x)\right]$.

    (i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left[e^x\ln(1 + e^{-x})\right]$.

    (j) $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} \left[y\ln\left(1 + a^{b/y}\right)\right]$.

(k) $\lim_{x\to\infty} \left[x \operatorname{sen}(1/x)\right].$

(l) $\lim_{x\to\infty} \left[x^2 \left(\cos(1/x) - 1\right)\right].$

20. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demuestra que F es continua en el punto $x = 0$.

(b) ¿En qué condiciones se puede garantizar que F es diferenciable en el punto $x = 0$?

21. Justifica que se trata de una forma indeterminada. Luego calcula, si existe, el límite:

(a) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right).$

(b) $\lim_{x\to\infty} \left[\ln(1+6x) - \ln(4+3x)\right].$

(c) $\lim_{x\to\infty} \left(x - \ln(3e^x + 1)\right).$

(d) $\lim_{x\to\infty} \left(x3^{2/x} - x\right).$

(e) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln 2}{2^x - 1}\right).$

(f) $\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\sec^3\theta - \tan^3\theta\right).$

(g) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right).$

(h) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)} - \dfrac{1}{x}\right).$

22. Efectuando el límite, encuentra un valor $a \in \mathbb{R}^+$ que cumpla la igualdad, o justifica si esto no es posible:

$$\lim_{x\to\infty} \left(x3^{a/x} - x\right) = \pi.$$

23. Justifica que se trata de una forma indeterminada. Luego calcula, si existe, el límite:

(a) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(x))^{\cot(x)}.$

(b) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x}{5x+7}\right)^x.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (1-2\cos(x))^{3\tan(x)}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{1/x}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (2^x+5)^{1/x}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (1+3x)^{\left(\frac{1}{3\ln x}\right)}$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(\alpha x)}{x}\right)^{1/x^2}$, $\alpha\neq 0$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\tan(2x)}$.

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+ax)^{1/x}$.

(k) $\displaystyle\lim_{y\to 0} \left[1+\int_0^{2y}\cos\left(t^2\right)dt\right]^{1/y}$.

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$.

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{1/x}$.

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+a\operatorname{sen} x)^{b/x}$.

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(3^{1/x}+1\right)^x$.

(q) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(2x))^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

(r) $\displaystyle\lim_{x\to(-\infty)} \left[\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}(x)\right]^{1/x}$.

(s) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(x)\right]^{1/\ln(x)}$.

(t) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \left[\frac{2x}{\pi}+\cos(x)\right]^{1/\cos(x)}$.

(u) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left[x^{(x^x)}-1\right]$.

24. Sean $a,b>0$. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{4}{5}a^x+\frac{1}{5}b^x\right)^{1/x} = \sqrt[5]{a^4b}.$$

25. Lleva a cabo el siguiente límite para encontrar un valor de $a \in \mathbb{R}$ que satisfaga la igualdad, o justifica si esto no es posible:

$$\lim_{x\to\infty} \left(a^{1/x} + \frac{1}{x} \right)^x = 3.$$

26. Deduce cuál es el valor de la constante c tal que se cumple la siguiente igualdad (en este ejercicio no es necesario justificar el uso de la Regla de L'Hopital):

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{cx}{cx+1} \right)^x = 9.$$

27. Encuentra un valor positivo de c tal que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 9.$$

28. Efectuando el límite, encuentra el valor de $c \in \mathbb{R}$ que cumpla la igualdad, o justifica si esto no es posible:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+c} \right)^x = e^3.$

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(3^{cx} + x\right)^{1/x} = \pi$

    (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(3^{c/x} + \tfrac{1}{x}\right)^x = \pi.$

29. Encuentra el valor de c que hace a la siguiente función continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} (e^x + x)^{1/x}, & \text{si } x \neq 0, \\ c, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

30. Demuestra que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = A_0 e^{rt}.$

31. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \int_0^{1/x} f(t)dt \right)^x = e^{f(0)}.$$

32. Calcula, si existe, el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \left[1 + \int_0^{2x} \cosh\left(t^2 + \ln 3\right)\, dt \right]^{1/x}.$$

    Simplifica tu respuesta.

33. Determina el valor de $a \in \mathbb{R}^+$ de modo que

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\int_0^{2x}\cosh\left(t^2+\ln a\right)dt\right]^{1/x}=e^{5/2}.$$

34. Sea $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=xe^{1/x}$.

    (a) Determina $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

    (b) Determina los intervalos de monotonía, extremos, concavidades y puntos de inflexión de f.

    (c) Dibuja la gráfica de f.

35. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x\geq 0\\ \tan^{-1}(x), & x<0.\end{cases}$$

    (a) Demuestra que f es diferenciable en $x=0$.

    (b) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

    (c) Determina los extremos locales y los intervalos de monotonía de f.

    (d) Grafica f.

36. Grafica la función (pedir dominio, límites, extremos locales, concavidad,...):

    (a) $f(x)=xe^x$.

    (b) $f(x)=xe^{-x^2}$.

    (c) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

3 Técnicas de integración

3.1 Integración por partes

1. Determina las siguientes integrales indefinidas:

    (a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}dx$.

    (b) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$.

    (c) $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{5x+3}\right)\, dx$.

    (d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1}(3x)\, dx$.

(e) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx.$

(f) $\displaystyle\int \frac{xe^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}\, dx.$

(g) $\displaystyle\int x \operatorname{sen}(x) \cos(x)\, dx.$

(h) $\displaystyle\int x^2 \ln^2(x) dx.$

(i) $\displaystyle\int x \arctan x\, dx.$

(j) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\, dx.$

(k) $\displaystyle\int a^x \cos(kx)\, dx.$

(l) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}} dx.$

(m) $\displaystyle\int 2x^3 \arctan(x)\, dx.$

(n) $\displaystyle\int x \tan^{-1}(x)\, dx.$

(o) $\displaystyle\int \frac{x}{4^x} dx.$

(p) $\displaystyle\int x^5 \cos\left(x^3\right) dx.$

(q) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\, dx.$

(r) $\displaystyle\int \tan^{-1}(\sqrt[3]{x})\, dx.$

(s) $\displaystyle\int x^{3/2} \tan^{-1}(x^{1/2})\, dx.$

(t) $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x)^2\, dx.$

(u) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}(\sqrt{x}) dx.$

(v) $\displaystyle\int x^2 e^{-2x}\, dx.$

(w) $\displaystyle\int e^{ax} \cos(kx)\, dx.$

(x) $\displaystyle\int (\ln x)^2\, dx.$

(y) $\displaystyle\int \sec^2\left(\sqrt{y}\right)\, dy.$

(z) $\displaystyle\int (4x+6)\sec^2(2x)\, dx.$

2. Calcula las siguientes integrales definidas:

   (a) $\displaystyle\int_0^a \frac{t}{e^{t/a}} dt, \quad a > 0.$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\, dx.$

   (c) $\displaystyle\int_0^a te^{-t/a}\, dt, \quad a > 0.$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} 2x \operatorname{arcsen}\left(x^2\right)\, dx.$

   (e) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^1 2x \arccos\left(x^2\right)\, dx.$

   (f) $\displaystyle\int_1^e \cos(\ln x)\, dx.$

   (g) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{4x}\, dx.$

   (h) $\displaystyle\int_1^b x^2 (\ln x)^2\, dx$, con $b > 0$.

   (i) $\displaystyle\int_1^{a^2} e^{\sqrt{x}}\, dx.$

   (j) $\displaystyle\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx.$

3. Considera la integral indefinida $\displaystyle\int e^{Ax}\cos(Bx)\, dx$. ¿Qué relación deben satisfacer A y B de tal modo que la integral valga $-\dfrac{1}{5}$ cuando $x = 0$ y la constante de integración es $C = 0$?

4. Sea a una constante positiva. Demuestra que

$$\int_0^{\pi/(4a)} \frac{x}{\cos^2(ax)}\, dx = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right).$$

5. Sea $f(x)$ una función que admite derivada continua hasta el orden 2, tal que $f(1) = 1, f'(1) = 1$ y $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 4$. Haciendo uso de esta información, calcula el valor de $\displaystyle\int_0^1 x^2 f''(x)\, dx$.

6. (a) Utilizando la definición de la función $\tanh(x)$ demuestra que

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \text{ si } |x| < 1.$$

   (b) Halla la derivada de la función $\tanh^{-1}(x)$.

   (c) Halla una primitiva para la función $\tanh^{-1}(x)$.
   Ayuda: integra por partes y usa el inciso (b).

7. (a) Si $f(x)$ es diferenciable, demuestra que

$$\int e^x\left[f(x) + f'(x)\right] dx = e^x f(x) + C.$$

   (b) Determina $\int e^x [\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos x]\, dx$.

   (c) Determina $\int e^x [\ln(\operatorname{sen} x) + \cot x]\, dx$.

8. Supón que $|x| < 1$. Obtén $\int \tanh^{-1}(x)dx$.
   Sugerencia: integra por partes.

9. Utilizando una integración por partes demuestra las siguientes fórmulas de reducción de grado:

   (a)

$$\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\, dx, \; a \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   (b)

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\, dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   (c)

$$\int x^n e^{-x^2}\, dx = -\frac{x^{n-1}e^{-x^2}}{2} + \frac{n-1}{2}\int x^{n-2}e^{-x^2}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   (d)

$$\int \left(x^2 + a^2\right)^n dx = \frac{x\left(x^2+a^2\right)^n}{1+2n} + \frac{2na^2}{1+2n}\int \left(x^2+a^2\right)^{n-1} dx, \quad a \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   (e)

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}.$$

(f)

$$\int (\ln x)^n \; dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \; dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(g)

$$\int_1^e x^n (\ln x)^m \, dx = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{m}{n+1} \int_1^e x^n (\ln x)^{m-1} \, dx.$$

(h)

$$\int x^m (\ln x)^n \; dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} \; dx.$$

10. Usa inducción y las fórmulas de reducción de grado para obtener:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}(x) \, dx &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \frac{\pi}{2}, , \\ \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1}(x) \, dx &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}. \end{aligned}$$

11. Demuestra que

$$\int_a^b \left(\int_x^b f(t) dt \right) dx = \int_a^b (x-a) \, f(x) dx.$$

12. Demuestra que

$$\int_a^b \left(\int_x^b e^{-t^2} dt \right) dx = \int_a^b (x-a) \, e^{-x^2} dx.$$

13. (a) Demuestra que

$$\int f^{-1}(x) \, dx = x f^{-1}(x) - \int f(y) dy, \quad \text{con } y = f^{-1}(x).$$

(b) Utilizando el inciso anterior, determina: (i) $\int \cos^{-\mathbf{1}}(x) dx$, (ii) $\int \log_{\mathbf{2}}(x) dx$.

14. (a) Demuestra que

$$\int f(x) \, dx = x f(x) - \int x f'(x) dx.$$

(b) Si f y g son funciones inversas, y si f' es continua, demuestra que

$$\int_a^b f(x) \, dx = b f(b) - a f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy.$$

(c) Aplica el resultado del inciso anterior para evaluar $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \operatorname{sen}^{-1}(x)\ dx$.

15. (a) Verifica que
$$\int \cos^{-1}(x)\, dx = x\cos^{-1}(x) - \operatorname{sen}\left(\cos^{-1}(x)\right) + C.$$

(b) En general, prueba que
$$\int f^{-1}(x)\ dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)\, dy, \quad \text{con } y = f^{-1}(x).$$

16. (a) Demuestra que$\int f^{-1}(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)dy,$ con $y = f^{-1}(x)$.

(b) Utilizando el inciso anterior, determina: (i) $\int \ln(x)dx$, (ii) $\int \log_2(x)dx$, (iii) $\int \cos^{-\mathbf{1}}(x)dx$, (iv) $\int \tan^{-\mathbf{1}}(x)dx$.

17. (a) Demuestra que
$$\int f^{-1}(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)dy, \quad \text{con } y = f^{-1}(x).$$

(b) Utiliza el inciso anterior para determinar $\int \log_3(5x)dx$ / $\int \log_5(3x)dx$.

18. Usando el método de integración por partes demuestra que
$$\int f^{-1}(x)\ dx = xf^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d\, f^{-1}(x)}{dx}\right) dx.$$

19. Utiliza los métodos de los ejercicios 16a y 18 para determinar: (i) $\int \cos^{-\mathbf{1}}(x)dx$, (ii) $\int \tan^{-\mathbf{1}}(x)dx$. ¿Pueden ser correctos los resultados que se obtienen al aplicar cada uno de los dos métodos? Justifica.

20. Sea $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable, tal que
$$f''(x) = -\frac{3}{x^4}\cosh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^5}\operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right)$$
para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'(1) = \cosh(1)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Demuestra que
$$f(x) = -\frac{1}{x}\operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right) + \cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$

3.2 Integrales trigonométricas

1. Determina las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \cos^2\left(\sqrt{y}\right)\ dy$.

(b) $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\ dx.$

(c) $\int \operatorname{senh}^3(x)\cosh^2(x)\ dx.$

(d) $\int \tan^5(x)\sec^4(x)\ dx.$

(e) $\int \tan^3(x)\sec^5(x)\ dx.$

(f) $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\, dx.$

(g) $\int \csc^3(x)\ dx.$

(h) $\int \operatorname{sen}^5(x)\ dx.$

(i) $\int \sec^3(x)\ dx.$

(j) $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x)\ dx.$

(k) $\int \sqrt{\sec^3(2x)}\ \tan^5(2x)\, dx.$

(l) $\int \cos^2(nx)\, dx,\quad n\in\mathbb{N}.$

(m) $\int \cos^4(x)\ dx.$

(n) $\int \operatorname{sen}^n(x)\cos^3(x)\ dx.$

(o) $\int \cos^4(kt)\operatorname{sen}^3(kt)\, dt.$

(p) $\int 4\operatorname{sen}^6(4\theta)\cos^3(4\theta)\ d\theta.$

(q) $\int \dfrac{\cos^5\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}\, d\theta.$

(r) $\int e^x\tan^3(e^x)\, dx.$

2. Calcula las siguientes integrales definidas:

(a) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3(x)\, dx.$

(b) $\int_0^{2\pi} \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{2}}\, dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{1+\cosh(2x)}\, dx.$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4a} \sec^3(ax)\, dx, \quad a=5, a=3.$

(e) $\displaystyle\int_0^{1/2} \cos(\pi x)\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi x\right)\, dx.$

(f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\operatorname{sen}(x)}.$

(g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \csc^3(2x)\, dx.$

(h) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan(x)\, \sec^{3/2}(x)\, dx.$

(i) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos(x)}.$

(j) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^3(x)\, dx$ o $\int_{-\pi/4}^{0} \tan^3(x)\, dx.$

(k) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2(x)}\, dx.$

(l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen}(x)}\cos^5(x)\, dx.$

(m) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan(x)}\sec^6(x)\, dx.$

(n) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(3\theta)\cos^2(3\theta)\, d\theta.$

(o) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(2\theta)\cos^2(\theta)\, d\theta.$

3. Obtén el valor del área entre la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ y el eje X de $x=0$ a $x=\pi$.

4. Obtén
$$\int \sec(x)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right| + C.$$

5. Discute cómo calcular integrales de la forma:

   (a) $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\, dx, \quad m,n\in\mathbb{N}.$

   (b) $\int \operatorname{sen}^n(x)\, dx, \quad n\in\mathbb{N}.$

   (c) $\int \cos^n(x)\, dx, \quad n\in\mathbb{N}.$

6. Demuestra que para $m, n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = 0.$

   (b) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m. \end{cases}$

7. Si $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > 1$, demuestra que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n, \\ 0, & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

8. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m > 1$. Demuestra que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n, \\ 0, & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

9. Encuentra una fórmula de reducción para $\int x^k \operatorname{sen} x\,dx$.

3.3 Sustitución trigonométrica

1. Usando una sustitución trigonométrica, determina la integral:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}.$

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}.$

   (c) $\int \dfrac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{2}{x^4\sqrt{x^2-25}}\,dy, \quad x < -5.$

   (e) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+9}\,dx.$

   (f) $\displaystyle\int x^3\sqrt{4-x^2}dx.$

   (g) $\displaystyle\int x^3\left(x^2+4\right)^{3/2}\,dx.$

   (h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx.$

   (i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^2}dx.$

   (j) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^4}\,dx.$

   (k) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

(l) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}\ dx.$

(m) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{3/2}} dx.$

(n) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+4)^{3/2}}\ dx.$

(o) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+9)^{3/2}}\ dx.$

(p) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx.$

(q) $\displaystyle\int \frac{\left(x^2-1\right)^{3/2}}{x} dx.$

(r) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}} dx.$

(s) $\displaystyle\int x\sqrt{10x-x^2}\, dx.$

(t) $\displaystyle\int \sqrt{2x^2+2x+5} dx.$

(u) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4+2x^2+1}\ dx.$

(v) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+2x+10)^{5/2}}\ dx.$

(w) $\displaystyle\int \frac{2}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}\ dx.$

(x) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}} dx.$

2. Usando una sustitución trigonométrica, determina la integral:

(a) $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^{-1}(x)\ dx.$

(b) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}^{-1}(x)\ dx.$

(c) $\displaystyle\int x^2\ \tan^{-1}(x)\ dx.$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{e^{2x}-3}\, dx.$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-16}},\ a^2 = 4, 9.$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x\ (4+e^{2x})} dx.$

3. Usando una sustitución trigonométrica, calcula la integral:

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\ dx.$

(b) $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\ dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\, dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}.$

(d) $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^{2} x^3\sqrt{x^2+4}\, dx.$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\ dx.$

(f) $\displaystyle\int_8^9 \sqrt{\frac{x}{x-4}}\, dx.$ Sugerencia: $u = \sqrt{x-4}.$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+e^{2t}}\, dt.$

(h) $\displaystyle\int_0^{a/\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx, \ \ a > 0.$

(i) $\displaystyle\int_{a^2/3}^{3a^2} \frac{dx}{\sqrt{x\,(a^2+x)}}, \ \ a > 0.$

(j) $\displaystyle\int_{a^2/3}^{3a^2} \sqrt{\frac{a^2+x}{x}} dx, \ \ a > 0.$

(k) $\displaystyle\int_{a^2/3}^{3a^2} \sqrt{x\,(a^2+x)} dx, \ \ a > 0.$

(l) $\displaystyle\int_{a^2/3}^{3a^2} \sqrt{\frac{x}{a^2+x}} dx, \ \ a > 0.$

(m) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\ dx.$

(n) $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\ dx.$

(o) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2+3)^{3/2}}.$

(p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{(4-x^2)^{3/2}}\ dx.$

(q) $\displaystyle\int_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$. Usa $x = 2\,\mathrm{sen}^2 u$.

4. Utilizando una sustitución trigonométrica, demuestra que para $x > 2$:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{16}\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sqrt{x^2-4}}{8x^2} + C.$$

5. Usa una sustitución trigonométrica para obtener

$$\int \sqrt{a-bx^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a-bx^2}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\mathrm{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right) + C, \quad 0 < b < a.$$

6. (a) Demuestra que

$$g(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0,$$

es una antiderivada de

$$f(x) = \sqrt{a^2-x^2}.$$

(b) Usa el resultado de (a) para calcular

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

7. Usa una sustitución trigonométrica para demostrar que

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

8. (a) Usa integración por partes para demostrar que

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

(b) Calcula el valor de la última integral, utilizando sustitución trigonométrica.

9. Demuestra que

$$\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi+2}{8a^3}, \qquad \text{para todo } a \neq 0.$$

10. Usando la sustitución $u = \sec(x)$ demuestra que

$$\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C.$$

11. Calcula el siguiente límite

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{3}}{n} \frac{1}{\sqrt{9c_k^2+1}},$$

en donde $P = \left\{x_0 = 0, x_1, \ldots, x_n = \sqrt{3}\right\}$ y c_k es un punto cualquiera del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, para $k = 0, \ldots, n$.

3.4 Fracciones parciales

1. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^4}{1-x^2}\,dx.$

   (b) $\displaystyle\int \frac{4x-2}{3(x^2-2x+1)}\,dx.$

   (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2-2x}.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^3-8x}\,dx.$

   (e) $\int \dfrac{dx}{x^2-x^3}.$

   (f) $\displaystyle\int \frac{a+x^3}{x^2-x^3}\,dx.$

   (g) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx.$

   (h) $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2-4x+4)}dx.$

   (i) $\displaystyle\int \frac{(a+1)x+1}{x^2(ax+1)}dx.$

   (j) $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x+1}{x^4-1}\,dx.$

   (k) $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2-3}{x^3+3x}\,dx.$

   (l) $\displaystyle\int \frac{5x+3}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx.$

   (m) $\displaystyle\int \frac{4x^2+2x}{(3x-1)(x^2+1)}\,dx.$

   (n) $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{(x^2+9)^2}\,dx.$

   (o) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx.$

   (p) $\displaystyle\int \frac{x+5}{(x^2+4x+5)^3}\,dx.$

2. Utiliza una sustitución y luego efectúa la integral:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-x^{r+1}}.$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left[4-\ln^2 x\right]}$.

(c) $\displaystyle\int \frac{2}{x\left(\ln^2(2x)-9\right)}dx$.

(d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x-3}dx$.

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{-x}-e^x}dx$.

(f) $\displaystyle\int \frac{xe^{x^2}}{16-e^{2x^2}}dx$.

(g) $\displaystyle\int \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)-2\operatorname{sen}(\theta)-8}d\theta$.

(h) $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta\ (\tan\theta-1)}\,d\theta$.

(i) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x+\operatorname{sen} x}dx$.

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(\tan^2 x-\tan^3 x\right)}$. Sugerencia: $u=\tan x$.

(k) $\displaystyle\int \frac{2}{1-\tan x}dx$. Sugerencia: $u=\tan x$.

(l) $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx$.

3. Calcula las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2+1}{x^3+3x}\,dx$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1}dx$.

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{2dx}{1+\tan x}$. Sugerencia: $u=\tan x$.

(d) $\displaystyle\int_{1/3}^{e/3} \frac{dt}{t\left(\ln^2(3t)-4\right)}$.

4. (a) Determina $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

(b) Usando el inciso anterior, determina $\int \frac{2-x+x^2-x^3}{(x^2+1)^2}dx$.

5. Obtén una primitiva F de la función

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{x}},$$

definida en el intervalo $(0,\infty)$ y tal que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Usa la sustitución $u = e^{x}$.

6. Usando el cambio de variable indicado, determina la primitiva de cada una de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad u = \cosh x.$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)}, \quad u = \cos x.$

7. Usa fracciones parciales para obtener

$$\int \frac{dx}{ax(bx+c)}, \qquad a, b, c > 0.$$

Ahora obtén

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_1^{\beta} \frac{dx}{ax(bx+c)}.$$

8. Determina

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-e^{x}}. \quad \text{(Cambia variables y usa fracciones parciales).}$$

Ahora obtén

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_1^{\beta} \frac{dx}{e^{2x}-e^{x}}.$$

9. (a) Determina

$$\int \frac{3x-1}{2x^3-x^2}\, dx. \quad \text{(Verifica el resultado)}$$

   (b) Usa el resultado de (9a) para calcular

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{3x-1}{2x^3-x^2}\, dx.$$

10. Sea $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Muestra que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

y encuentra la familia de primitivas de la función

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}.$$

11. Sea $u = u(t)$ una población de personas que conocen un chisme al tiempo $t > 0$. Si $r > 0$ es la razón constante a la cual el chisme se propaga y $K > 0$ es la población total en una determinada región, entonces se tiene que la razón instantánea de propagación del chisme satisface la ecuación

$$\frac{du}{dt} = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right).$$

(a) Si $u(0) = u_0$, $0 < u_0 < K$, por medio del teorema de la función inversa encuentra el tiempo t como función de u.

(b) A partir del inciso anterior, encuentra la población u como función de t y demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} u(t) = K.$$

3.5 Integrales impropias

1. Evalúa la integral impropia de primera especie, o muestra que diverge:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^x dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty (x-a)\,e^{-x/a}dx, \;\; a > 0.$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{x/2}\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx.$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^3\,e^{-x^2}\,dx.$

(f) $\displaystyle\int_3^\infty e^{-\sqrt{2x-6}}dx.$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos(x)\;dx.$

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}dx.$

(i) $\displaystyle\int_{\ln 2}^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}}dx.$

(j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx.$

(k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{e^x+e^{2x}}dx.$

(l) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{4-e^{2x}}dx.$

(m) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^3}$.

(n) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$.

(o) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+5x^2}$.

(p) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{(2x-3)\,(x-1)}$.

(q) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x+3)(x+1)^2}$.

(r) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2-x^2}{x^4+x^2}\,dx$.

(s) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{10}+x}$. Sugerencia: $x^{10}+x = x^{10}\left(1+x^{-9}\right)$.

(t) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

(u) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3-1}$.

(v) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2x}{1+x^4}dx$.

(w) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$. Sugerencia: utiliza una sustitución trigonométrica.

2. Evalúa la integral impropia de primera especie, o muestra que diverge:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,e^{-x^2}dx$.

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x-2|}\,dx$.

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+9}\,dx$.

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(2\,|x|+1)^2}dx$.

3. Evalúa la integral impropia de segunda especie, o muestra que diverge:

(a) $\displaystyle\int_0^{1} x\ln(x)dx$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\operatorname{sen}(x)}$.

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx.$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4r}{\sqrt{1-r^4}}dr.$

(e) $\displaystyle\int_1^{\cosh(t)} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},\ t \geq 0.$

(f) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x-1}dx.$

(h) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{4-x^2}.$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x-e^{-x}}.$

(j) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^3}.$

(k) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(-x)}}.$

(l) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx.$

(m) $\displaystyle\int_{1/2}^3 \frac{dt}{\sqrt{-3+4t-t^2}}.$

(n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cot^3(2x)}{\sqrt[3]{\csc(2x)}}\,dx.$

(o) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}}, \quad a<b$ dados.

(p) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}.$

(q) $\displaystyle\int_{e^{-1}}^e \frac{dx}{x(\ln(x))^3}.$

(r) $\displaystyle\int_{-2}^{31} \frac{dx}{(x+1)^{3/5}}.$

(s) $\int_{-4}^2 \frac{dx}{(4+2x)^3}.$

(t) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{(x^2-4)^2}dx.$

(u) $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x}{(x^2-4)^3} dx.$

4. Evalúa la integral impropia de tercera especie, o muestra que diverge:

   (a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$

   (b) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}} dx.$

   (c) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}.$

   (d) $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad a > 0.$

   (e) ¿Para qué valores de p converge $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^p}$? ¿$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$?

5. Demuestra que:

   (a) $\int_1^{\infty} \frac{4x+1}{x^2(3x+1)} dx = \ln\left(\frac{4e}{3}\right).$

   (b) $\int_1^{\infty} \frac{x}{(x+1)^2(2x+1)} dx = \ln\left(\frac{3e^{1/2}}{4}\right).$

6. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$.

   (a) Determina el dominio D de f y justifica que $\int_2^4 f(x)dx$ es una integral impropia.

   (b) Demuestra que

$$\lim_{\alpha \to 2} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x)dx = 1.$$

7. Determina los valores de $a > 0$ y c de tal modo que

$$\int_1^{+\infty} \frac{(c-a)x+a}{x(2x+a)} dx = 1.$$

8. Deduce cuál debe ser el valor de la constante A para el cual converge la siguente integral impropia. ¿A qué converge la integral?:

$$\int_2^{\infty} \left(\frac{x}{2x^2+1} - \frac{A}{x+1}\right) dx.$$

9. Encuentra el valor de C para el cual la siguiente integral converge:

$$\int_2^{\infty} \left(\frac{x}{2x^2+C} - \frac{C}{x+1} \right) dx.$$

10. Sea $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$. Utiliza que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \sqrt{\pi}$ para calcular $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$.

11. (a) Demuestra que $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{2x}} = \ln(1+e^x) - x - e^{-x} + C, \; C \in \mathbb{R}$.

    No derives ambos lados. Deduce por integración.

    (b) Usando el inciso (a) Calcula $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{2x}}$ o justifica si la integral diverge.

12. (a) Demuestra que

$$\int \frac{1}{2e^x - e^{2x}} dx = \frac{1}{4} \ln e^x - \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{4} \ln|2-e^x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

    (b) Usando el inciso anterior, calcula

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2e^x - e^{2x}} dx.$$

13. Demuestra que

$$\int_0^1 (\ln x)^n \, dx = (-1)^n n!$$

14. Determina los siguientes límites:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} \operatorname{sen}(t)\, dt.$

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$

15. Sea $f(x)$ una función integrable en cualquier intervalo de $\mathbb{R}$, y sean $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $a < b$. Demuestra que si $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_b^{\infty} f(x)\,dx$ convergen, entonces $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ y $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ convergen.

16. (a) Usando la sustitución $u = e^x$, demuestra que

$$\int \frac{a^2 e^{-x}}{a - e^x} dx = \ln e^x - a e^{-x} - \ln|a - e^x| + C.$$

    (b) Utiliza el inciso anterior para calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{a^2 e^{-x}}{a-e^x} dx \quad (a > 1).$

17. La definición según Legendre de la función Gama está dada por

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

   (a) Encuentra los valores de x para los cuales $\Gamma(x)$ está definida, i.e. la integral es convergente.

   (b) Muestra que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ y que si $x = n \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(n+1) = n!$

   (c) Por medio de cambios de variable adecuados, deduce las siguientes representaciones:

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty u^{2x-1} e^{-u^2} du \quad \text{y} \quad \Gamma(x) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{x-1} du.$$

18. Demuestra que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ converge y luego calcula la integral. Sugerencia: Usa la sustitución $x = \dfrac{1}{y}$.

19. La transformada de Laplace de una función $f(x)$ es la función $Lf(s)$ de la variable s definida mediante la integral impropia (si ésta converge):

$$Lf(s) = \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx.$$

   (a) Prueba que si $f(x) = C$, en donde C es una constante, entonces $Lf(s) = \dfrac{C}{s}$ para $s > 0$.

   (b) Prueba que si $f(x) = \operatorname{sen}(\alpha x)$, entonces $Lf(s) = \dfrac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$.

   (c) Calcula $Lf(s)$, si $f(x) = e^{\alpha x}$ y $s > \alpha$.

   (d) Calcula $Lf(s)$, si $f(x) = \cos(\alpha x)$ y $s > 0$.

20. Utiliza algún criterio de convergencia para determinar si converge o diverge la integral impropia de primera especie:

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x^2+1}{x^4+2x+1} dx$.

   (b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{(1+x)\ln x}$.

   (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^{1/2}} dx$.

   (d) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$.

(e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{e^{2x}-1}dx.$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} x}{1+x^4}\,dx.$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x)\,dx.$

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \sqrt{1+e^{-x}}dx.$

(j) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}dx.$

(k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x^2+1}{x^3+2x+1}\,dx.$

(l) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}(x)}{x(1+x^2)}\,dx.$

(m) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{\ln(x^3)-1}\,dx.$

(n) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{e^{3x}-e^{-3x}}.$

(o) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{(x^2+x)(x^2+1)}\,dx.$

(p) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^{3/2}}dx.$

(q) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+e^{3x}}.$

(r) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx.$

(s) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{x^2}\,dx.$

(t) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x+e^{2x}}.$

(u) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{3+\operatorname{sen}(x)}}{x^2}\,dx.$

(v) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\arctan(x)}\,dx.$

(w) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{(3x+1)\cos(x)}{x^3-x}\,dx.$

(x) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cot^{-1} x}{x^2}\,dx.$

21. Utiliza algún criterio de convergencia para determinar si converge o diverge la integral impropia de primera especie:

   (a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\tanh(x)}{x^3+x}\, dx.$

   (b) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-e^{-x}}\, dx.$

   (c) $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-2x} \ln x\, dx.$

   (d) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{e^x}{xe^x+x^2}\, dx.$

   (e) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x}{x^2+\cos x}\, dx.$

   (f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{5-2\operatorname{sen} x}{x^{3/2}} dx.$

   (g) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1}(x)}{x(1+x^2)}\, dx.$

   (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}.$

   (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(2|x|+1)^2}\, dx.$

22. Utiliza algún criterio de convergencia para determinar si converge o diverge la integral impropia de segunda especie:

   (a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}\, dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{1} e^{1/x}\, dx.$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}+\operatorname{sen}(t)}.$

   (d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\, dx.$

   (e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^{1/2}} dx.$

   (f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx.$

   (g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx.$

   (h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{\sqrt{x}}\, dx.$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx.$

(j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sec(x)}.$

(k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{x^2}\, dx.$

(l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^4}}\, dx.$

(m) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{3+\operatorname{sen}(x)}}{x^2}\, dx.$

(n) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x\operatorname{sen}(x)}.$

(o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tanh(x)}{x+\sqrt{x}}\, dx.$

(p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tanh(x)}{x+\sqrt{x}}\, dx.$

(q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\operatorname{sen} x}{x^{1/2}} dx.$ (comparación directa; converge.)

(r) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\, dx.$ (No separes la integral.)

23. Utiliza algún criterio de convergencia para determinar si converge o diverge la integral impropia de tercera especie:

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x^{3/2}}\, dx.$

(b) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{(x-3)^4}\, dx.$

(c) $\displaystyle\int_{-5}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+5}}.$

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx.$

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx.$

(f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}.$

(g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}\, dx.$

(h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\tanh(x)}{x+\sqrt{x}}\, dx$

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\tanh(x)}{x^3+x}\,dx.$

(j) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

(k) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x - 1}{x^{3/2}}\,dx.$

(l) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}.$

24. Calcula o utiliza algún criterio de convergencia para determinar si la siguiente integral impropia de tercera especie converge o diverge:

$$\int_0^{\infty} \frac{4}{\sqrt{x}\,(x+6)}\,dx.$$

25. (a) Calcula, si existe, el límite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[x^2 \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)\right].$

    (b) Usa el inciso anterior para estudiar la naturaleza de la siguiente integral impropia:

$$\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)\,dx.$$

26. Determina para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ converge $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,dx.$

27. Sea $I = \displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$, con

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Demuestra que f es continua en $x = 0$ y que I es impropia sólo del primer tipo.

   (b) Prueba que

$$\int_1^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

   (c) Usa el inciso anterior para probar que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge. Puedes argumentar usando teoremas.

   (d) Justica con todo detalle que I converge.

28. Sea $a > 0$ y $n > 1$.Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{e^{ax} - 1}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Usa la regla de L'Hopital para probar que f es continua en $x = 0$.

(b) Prueba que para x suficientemente grande se cumple que $f(x) \leq 2x^n e^{-ax}$.

(c) Usa el resultado anterior para analizar la convergencia de $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$.

29. (a) Demuestra que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}+1}\,dx$ converge.

(b) Encuentra la inversa de $\dfrac{1}{x^{3/2}+1}$ para demostrar que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}+1}\,dx = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{2/3} dx.$$

30. Determina para qué valores de p converge:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,dx$. (cociente; $p < 2$.)

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x}}{x^p}\,dx$. (cociente; $1 < p < 2$.)

31. Sea $w(x)$ una función positiva y dos veces diferenciable en $\mathbb{R}$, tal que:

(a) $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} w(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} w'(x) = 0$ y $w(0) = 3/2$;

(b) satisface que $F(w(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, en donde

$$F(x) = \int_\alpha^x \frac{du}{u\sqrt{1 - 2u/3}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

i. Usa el TFC para demostrar que la función $w(x)$ satisface la ecuación $w'' - w + w^2 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

ii. Muestra que la función $w(x)$ está dada por $w(x) = \frac{3}{2}\operatorname{sec\,h}^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

iii. Demuestra que $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty w(x)dx$ es convergente y que su valor es 6.

iv. Prueba que se satisface la identidad $\int_{-\infty}^\infty [w(x)]^2\,dx = \int_{-\infty}^\infty w(x)dx$.

v. Muestra que las relaciones integrales I_1 e I_2, dadas por

$$I_1 = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^\infty [w(x)]^2\,dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^\infty [w'(x)]^2\,dx}, \quad I_2 = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^\infty [w(x)]^3\,dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^\infty [w'(x)]^2\,dx},$$

satisfacen el sistema lineal de ecuaciones $I_1 - \frac{2}{3} I_2 = 1$ y $-I_1 + I_2 = 1$.

vi. Encuentra los valores de $\int_{-\infty}^{\infty} [w'(x)]^2 \, dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} [w(x)]^2 \, dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} [w(x)]^3 \, dx$.

32. Por medio de la sustitución $y = x^2$ muestra que es convergente la integral

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{sen}(x^2) \, dx, \text{ en donde } \alpha \longrightarrow 0 \text{ y } \beta \longrightarrow \infty.$$

4 Aplicaciones de la integral

4.1 Cálculo de áreas

1. Calcula el área de la región entre la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo dado:

   (a) $f(x) = (x-2)\, e^{-x/2}, \;\; 0 \leq x \leq 4.$

   (b) $f(x) = xe^{ax}, \; a > 0, \;\; -\infty < x \leq 0.$

   (c) $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}, \;\; a = 2, 3, \;\; 0 \leq x \leq a.$

   (d) $f(x) = x \ln x, \;\; \dfrac{1}{e} \leq x \leq e.$ Simplifica la respuesta.

   (e) $f(x) = \cosh(x/4), \; [-4, 4]\,.$

   (f) $f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{si } x \leq 3, \\ x^2 - 9, & \text{si } x > 3, \end{cases} \;, \; [1, 4]\,.$

   (g) $f(x) = \ln(x-1), \;\; 3/2 \leq x \leq e + 1.$

   (h) $f(x) = xe^{-ax}, \; -\dfrac{1}{a} \leq x \leq \dfrac{1}{a}.$

   (i) $f(x) = (1-x)^{1/3}, \;\; -7 \leq x \leq 2.$

   (j) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}, \;\; -2 \leq x \leq \sqrt{2}.$

   (k) $f(x) = \operatorname{sen} x \sqrt{1 - \cos x}, \;\; -\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}.$

   (l) $f(x) = \ln(x), \;\; 1/e \leq x \leq e.$

   (m) $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x)\,, \;\; -\dfrac{1}{a} \leq x \leq 0.$

   (n) $f(x) = \dfrac{1}{x - \operatorname{sen} x}, \; 0 < x < 1$

2. Sea $f(x) = xe^{x/a}$.

   (a) Encuentra $\lim\limits_{x \to (-\infty)} f(x)$.

   (b) Calcula el área de la región entre la curva $y = xe^{x/a}$ y el eje x en el intervalo $-a \leq x \leq a$.

3. Sea $f(x) = \tanh^{-1}(x)$.

   (a) Encuentra $\lim\limits_{x \to (-\infty)} f(x)$.

   (b) Calcula el área de la región entre la curva $y = \tanh^{-1}(x)$ y el eje x en el intervalo $-a \leq x \leq a$.

4. Calcula el área de la región entre las curvas que se indican, en el intervalo dado:

   (a) $y = \dfrac{1}{x}$ y $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in [1, \infty)$.

   (b) $y = \tan(x)$ y $y = \sec(x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

   (c) $y = \tan(x)$ y $y = \sec(x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Grafica las curvas y observa que se trata de una integral impropia.

5. Calcula de área de la región acotada entre las curvas dadas:

   (a) $y = \sqrt{|x|}$ y $5y = x + 6$.

   (b) $x = y^2 - y$ y $x = y - y^2$.

   (c) $y = 0$ y $y = x\left(x^2 - 1\right)$.

   (d) $y^2 = 4x$ y $4x - 3y - 4 = 0$.

   (e) $x = y^2$ y $y = x^3$.

   (f) $y = 4 - x^2$ y $y = 2 - x$.

   (g) $y = x^2 - 1$ y $y = x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 + 1$.

6. Calcula el área de la región acotada entre la curva $y = x\sqrt{1-x^2}$ y la recta $y = \dfrac{1}{2}x$.

7. Calcula $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ y aprovecha el resultado para justificar que el área del círculo unitario es igual a π.

8. Demuestra que el área de una elipse con semiejes $a > 0$ y $b > 0$ está dada por $A = \pi ab$. Sugerencia: considera el área acotada por la elipse en el primer cuadrante.

9. Indica y calcula la integral que representa el área de la parte sombreada en la figura de abajo, en donde $a \in [1, \infty)$. ¿Para qué valor de a el área es igual a π?

10. Halla el área de la región situada a la derecha de $x = 3$ y limitada por la curva $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ y el eje x.

11. Calcula de área de la región acotada entre las curvas dadas, (i) integrando con respecto a x, (ii) integrando con respecto a y :

    (a) $y^2 = 1 - x$ y $2y = x + 2$.

    (b) $y^2 = x + 1$ y la recta $x + y = 1$.

    (c) En el primer cuadrante limitada por arriba por $y = \sqrt{x}$, y por abajo por el eje x y por la recta $y = x - 2$.

12. Sea D la región acotada por la porción de la corona circular $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, con $0 < a < b$, perteneciente a los cuadrantes impares y comprendida entre las rectas $x = 0$ e $y = x$.

    (a) Haz un esbozo de la región D.

    (b) Representa, en términos de integrales definidas, el área de D.

13. Un espejo plano de dimensiones 80 cm y 90 cm, se rompe por una esquina según una recta. De los dos trozos que quedan, el menor es un triángulo de catetos 10 cm y 12 cm, correspondientes a las dimensiones menor y mayor del espejo respectivamente. Hallar el área máxima del espejo rectangular que se puede obtener con el trozo mayor.

4.2 Longitud de arco

1. Calcula la longitud de arco de la curva $y = f(x)$ en el intervalo dado:

    (a) $y = e^x$, $\ln \sqrt{a} \leq x \leq \ln \sqrt{b}$.

    (b) $y = \ln(x)$, $1 \leq x \leq 2$.

(c) $y = \cosh x$, $0 \leq x \leq \ln 2$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2} + 1$, $\ x \in [4, 9]$.

(e) $f(x) = 2\ln\left(\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$, $\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$.

(f) $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$, $[2, 3]$.

(g) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}$, $\ x \in [1, 3]$.

(h) $y = \sqrt{25 - x^2}$, $[0, 5]$.

(i) $y = 1 - e^{-x}$, $x \in [0, 2]$.

(j) $y = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1$, con $x \in [0, 1]$.

(k) $y = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2/3}$, $\ 0 \leq x \leq 2$. (Sugerencia: Integra con respecto a y.)

(l) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t + 3}\, dt$, en $[0, 1]$.

(m) $f(x) = \int_0^x \sqrt{e^{3t} - 1}\, dt$, $\ 0 \leq x \leq \ln 2$.

(n) $f(x) = \int_1^x \dfrac{16t^2 - 1}{8t} dt$, $x \geq 1$, $1 \leq x \leq 2$.

(o) $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\, dt$, $x \geq 1$, $1 \leq x \leq 2$.

(p) La curva con derivada $y' = \sqrt{\dfrac{2 - x^2}{x^2 - 1}}$, en $\cosh a \leq x \leq \cosh b$.

2. (a) Determina $\int \sec^3 x\, dx$.

   (b) Encuentra la longitud del arco de parábola $y^2 = x$ de $(0, 0)$ al punto $(1, 1)$. Sugerencia: integra con respecto a y.

3. Obtén una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ suave, tal que $f(0) = 0$ y tal que la longitud de su gráfica entre 0 y 1 sea $\int_0^1 \sqrt{1 + \dfrac{e^x}{4}} dx$.

4. Debido a la fuerza de gravedad en la Tierra, un cable unido por los extremos a dos postes forma una curva llamada *catenaria*, la cual está descrita por $y = \alpha \cosh\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$, en donde 2α es la distancia que separa ambos postes. Calcula la longitud del cable.

4.3 Cálculo de volúmenes

1. Calcula el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje y la región acotada por $x = \sqrt{5}y^2$, $x = 0$, $y = 1$, $y = -1$.

2. Calcula el volumen del sólido que se genera al girar alrededor de la recta $y = \sqrt{2}$ la región en el primer cuadrante acotada en la parte superior por la recta $y = \sqrt{2}$, en la parte inferior por la curva $y = \sec(x)\tan(x)$, y a la izquierda por el eje y.

3. Sea R la región acotada por $y = e^x$, $x = 0$, $y = 2$. Plantea (no calcules) una integral para obtener el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor de: a) el eje x, b) el eje y, c) la recta $y = 3$, d) la recta $x = \ln 2$.

4. Sea R la región acotada por $y = e^x$, $x = 0$, $y = 2$. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor de: a) el eje x, b) el eje y, c) la recta $y = 3$, d) la recta $x = \ln 2$.

5. Determina el volumen del sólido de revolución S obtenido al girar la región entre las gráficas de $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = e^x$ alrededor del eje x en el intervalo $0 \leq x \leq \ln 3$. Ilustra.

6. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar $f(x) = xe^x$ alrededor del eje x, $x \leq \ln(2)$.

7. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar, alrededor del eje x, la región entre las curvas $y = \tan(x)$ y $y = \sec(x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Calcula el volumen del sólido que se obtiene al girar, en torno al eje y, la región en el primer cuadrante acotada por las rectas $x = \sqrt{3}, y = \sqrt{3}$ y la parte exterior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$.

9. Calcula el volumen del sólido que se genera al girar alrededor de la recta $y = -1$ la región en el primer cuadrante limitada por las curvas $y = \tan x$ y $y = 1$.

10. Determina el volumen del sólido de revolución S obtenido al girar la región entre las gráficas de $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ alrededor del eje de rotación $(y = 0)$ entre $x = 0$ y $x = \ln(a)$. Ilustra.

11. (Determina el volumen del sólido de revolución S obtenido al girar alrededor del eje x la región del primer cuadrante entre las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}e^{-ax^2}$ y $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

12. Determina el volumen del sólido de revolución S obtenido al girar alrededor del eje x la región del primer cuadrante entre las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}e^{-ax}$ y $x = \ln a$. Simplifica la respuesta.

13. Calcula el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje x la región acotada por $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 3$. Simplifica la respuesta.

14. Calcula el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje x la región acotada por $y = \sqrt{x}e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 2$. Simplifica la respuesta.

15. Calcula el volumen del sólido de revolución que genera la región limitada por la gráfica de $y = \tan(x)$ y las rectas $x = 0$, $y = 1$, al girar alrededor del eje x.

16. Determina el volumen del sólido de revolución que se forma cuando la región
$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq \ln(x), \, 1 \leq x \leq e\right\}$$
gira alrededor del eje x, usando el método de discos.

17. Determina el volumen del sólido formado cuando la región comprendida entre la curva $y = -x^2 + 2x + 1$ y la recta $y = x - 1$ gira alrededor de la recta $y = -2$, aplicando el método de las arandelas.

18. Determina el volumen del sólido cuya base es un disco de radio r y cuyas secciones transversales, perpendiculares al eje x, son triángulos equiláteros.

19. Determina el volumen del sólido cuya base es la región entre la curva $y = 2\sqrt{\operatorname{sen}(x)}$ y el intervalo $[0, \pi]$ en el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros verticales, cuyas bases van del eje x a la curva.

20. Calcula el volumen del sólido generado al girar la región comprendida entre las parábolas $x = y^2 + 1$ y $x = 3 - y^2$ alrededor del eje y, aplicando el método de cascarones cilíndricos.

5 Sucesiones y series

5.1 Aproximación polinomial y teorema de Taylor. Residuo y estimación del error de aproximación

1. Obtén el polinomio de Taylor de grado n para las siguientes funciones $f(x)$ en x_0:

   (a) $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$.

   (b) $f(x) = \operatorname{senh}(x)$, $x_0 = 0$.

   (c) $f(x) = x^2 - x - 2$, $x_0 = -1$.

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $x_0 = 0$.

   (e) $f(x) = \sqrt{x+4}$, $x_0 = 0$.

   (f) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x - 1$, $x_0 = 2$.

2. Obtén el polinomio de Taylor de grado 2 para las siguientes funciones $f(x)$ en x_0:

   (a) $f(x) = 3 + \int_2^{2x} e^{t^2-4} \, dt$, $x_0 = 1$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } \ x \neq 0 \\ 1 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}, \quad x_0 = 0.$

3. Halla $P_{1,0}(x)$ para $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & \text{si } \ x \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$

4. A partir del polinomio de Taylor de grado n para e^x en $x_0 = 0$ determina el polinomio de Taylor de grado 3 de las siguientes funciones en $x_0 = 0$:

   (a) $f(x) = e^{-2x}$.

   (b) $g(x) = e^{-x^2}$.

   (c) $h(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

5. Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 para $f(x)$ en x_0:

   (a) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$, en $x_0 = 0$.

   (b) $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(t^2\right) \, dt, \;\; x_0 = 0$.

   (c) $f(x) = \dfrac{4}{x+3}$, $x_0 = 1$.

   (d) $f(x) = \tan^{-1} x$, $x_0 = 1$.

6. Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 para $f(x) = \tan^{-1}(x)$ en $x_0 = 0$, y úsalo para aproximar el valor de $\pi/4$.

7. (a) Demuestra que si $|x|$ es pequeño y $0 < \alpha \leq 1$, entonces

$$(x+1)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2.$$

   (b) Usa esta aproximación para estimar $\sqrt{1.4}$.

8. Determina el polinomio de Taylor de grado 2 asociado a $f(x) = 5 + \displaystyle\int_0^x \frac{1+\operatorname{sen} t}{1+t^2} dt$ en $x_0 = 0$ para estimar $f(0.1)$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^5(\mathbb{R})$ con polinomio de Taylor de grado 5 en $x_0 = 1$ dado por

$$P_{5,1}(x) = \frac{1}{2} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

   Determina $f^{(k)}(1)$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$, e indica justificando si f tiene o no un extremo local en el punto 1.

10. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función con segunda derivada continua en $\mathbb{R}^+$, tal que $f'(1) = 0$ y $f''(1) = -2$. Sea $\phi(x) = f(e^x)$.

(a) Calcula $\phi'(0)$ y $\phi''(0)$. ¿Podrá garantizarse que ϕ admite un extremo local en $x = 0$? ¿Máximo o mínimo?

(b) Escribe la fórmula de Taylor para la función ϕ en $x_0 = 0$ con residuo de orden 1, y utilízala para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^2}.$$

11. Sea $I \in \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $f \in C^2(I)$. Usa la fórmula de Taylor para demostrar que, para cualquier $a \in I$,

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

12. Aproxima el valor de $\sqrt[3]{e^2}$ con un error menor que 0.001.

13. (a) Determina el polinomio de Taylor de orden 3, $P_3(x)$, generado por $f(x) = \dfrac{2}{x}$ en el punto $x_0 = 2$.

    (b) Usando el Teorema de Taylor estima el error cometido al utilizar P_3 para aproximar el valor de $\dfrac{2}{2.2}$.

14. Determina la exactitud de la aproximación

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

sobre el intervalo $[-1, 1]$.

15. (a) Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 generado por $f(x) = x + \dfrac{3}{x}$ en $x_0 = 1$..

    (b) Utiliza la fórmula del residuo de Lagrange para estimar el error cometido al aproximar $f(1.3)$ usando el polinomio del inciso anterior.

16. Aproxima el valor de sen(1) con un error menor que 0.001.

17. Aproxima la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ mediante un polinomio de grado 3. Utiliza dicho polinomio para aproximar $\frac{1}{\sqrt{1.2}}$. Da la cota del error cometido.

18. Encuentra la expresión del residuo de la función $f(x) = \ln(1 + x)$ para grado 3. Con esta estimación, acota el error que se comete al aproximar $f(0.2)$ por $P_3(0.2)$.

19. (a) Encuentra el polinomio de Taylor de grado 3, $P_3(x)$, generado por la función $f(x) = \ln(x)$ en $x_0 = 1$.

(b) Obtén el valor máximo de $\left|f^{(4)}(x)\right|$ en el intervalo $[1, 1.2]$.

(c) Usa (19b) para encontrar una cota superior para

$$|\ln(1.2) - P_3(1.2)|.$$

20. Usando el teorema de Taylor, demuestra que

$$\left|e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right| < \frac{1}{6}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

21. Utiliza el teorema de Taylor para demostrar que

$$\left|\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right| \leq \frac{1}{720}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

22. Utiliza el teorema de Taylor para demostrar que

$$\left|\operatorname{sen}(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| \leq \frac{|x|^5}{120}.$$

23. Sea $P_n(x)$ el n-ésimo polinomio de McLaurin de $f(x) = \cos x$. Encuentra el valor de n para el cual

$$|\cos 0.2 - P_n(0.2)| < 10^{-5}.$$

24. ¿Para qué valores de x podemos reemplazar $\cos x$ con $P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$?

25. Considera $f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

(a) Muestra que $f'(x) = 2xf(x) + 1$.

(b) Halla el polinomio de Taylor de grado 3 generado por $f(x)$ en $x_0 = 0$.

(c) Estima el error cometido al aproximar el valor de $f(1)$ usando el polinomio obtenido en el inciso anterior.

5.2 Sucesiones. Propiedades de convergencia

1. Calcula el límite de cada sucesión $\{a_n\}$ o justifica si ésta diverge:

(a) $a_n = \dfrac{\tan^{-1}(n^2)}{\ln(1+n)}$.

(b) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$.

(c) $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$.

(d) $a_n = n - \ln(3e^n + 1)$.

(e) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

(f) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

(g) $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n$.

(h) $a_n = \dfrac{(-1)^n+1}{n}$.

(i) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$.

(j) $a_n = (\ln n)^{1/n}$. Sugerencia: $1 \leq \ln n \leq n$, para $n \geq 3$.

(k) $a_n = nr^n$, si $|r| < 1$ es fijo.

(l) $a_n = (p(n))^{1/n}$, en donde $p(x) = b_0 + b_1x^1 + \ldots + b_mx^m$ es un polinomio de grado m y $b_0, b_1, \ldots, b_m$, son reales positivos fijos.

(m) $a_n = \dfrac{5^n}{n!}$.

(n) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

(o) $a_n = n^2e^{-n}$.

(p) $\left\{\dfrac{n^2}{3n+1}\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$. Sugerencia: Usa un cambio de variables.

(q) $a_n = n\ln(1+3^{2/n})$, $a_n = n\ln(1+4^{3/n})$.

(r) $a_n = \left(\dfrac{x^n}{2n+1}\right)^{1/n}$, $x > 0$.

(s) $a_n = \dfrac{\operatorname{senh}(\ln n)}{n}$

(t) $a_n = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)$.

(u) $a_n = \dfrac{(n+1)!+n!}{3(n+1)!}$.

(v) $a_n = \sqrt[n]{3^n+1}$.

(w) $a_n = \dfrac{\ln(n)}{n^{1/n}}$.

(x) $a_n = \left(1+\dfrac{7}{n}\right)^n$.

(y) $\left\{(5^n+1)^{1/n}\right\}$.

(z) $\left\{\dfrac{\int_1^{2n} e^{1/t}\,dt}{n}\right\}$.

2. Demuestra que:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\alpha^n)^{1/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } \ 0<\alpha\le 1, \\ \alpha & \text{si } \ \alpha>1. \end{cases}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max(a,b), \ \ a,b>0.$

3. Usa la prueba del cociente o la prueba de la raíz n-ésima para sucesiones para estudiar la naturaleza de las siguientes sucesiones $\{a_n\}$:

   (a) $a_n = n^5 e^{-n}$.

   (b) $a_n = \dfrac{5^n}{n!}$.

   (c) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

   (d) $a_n = \dfrac{n!\,n!}{(2n)!}$.

4. Sea $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $n = 1,2,\ldots$. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. ¿Qué puedes concluir sobre el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$? Justifica.

5. Sea $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n \, dx$, $n = 0,1,2,\ldots$. Demuestra que $I_n = (-1)^n\, n!$ Sugerencia: integra por partes y calcula la integral impropia usando la regla de L'Hopital.

6. Muestra que si $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2}$, entonces a_n es una suma de Riemann para $\int_0^1 \ x\,dx$ para $n \ge 1$. Encuentra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

7. Considera la sucesión $I_n = \displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{n}{x} - \frac{n^2}{2+nx}\right) dx.$

   (a) Demuestra, justificando con detalle, que $I_n = n \ln\!\left(\dfrac{2+n}{n}\right)$.

   (b) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

8. Sea $f'(x)$ continua en $[-\pi,\pi]$ y define $a_n = \pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx$. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Sugerencia: integra por partes.

9. Sea $a_n = \sqrt[n]{\left(\dfrac{c}{3}\right)^n + 1}$, con $c>3$. Halla c tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

10. Sea $a_n = \dfrac{n}{\ln(1+8b^{3n})}$, con $b>0$. Halla b tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

11. Muestra que si $a_n = \dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{n^2}{n^3}$, entonces a_n es una suma de Riemann para $\int_0^1 x^2\, dx$ para $n \geq 1$. Encuentra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

12. Demuestra que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n!}{(2n)!} = 0.$$
Sugerencia: $\dfrac{n!\, n!}{(2n)!} = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n+j}\right)$. Nota que $\dfrac{j}{n+j} \leq \dfrac{1}{2} \quad \forall j = 1, \ldots, n$.

13. Define $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$

    (a) Demuestra por inducción que
    $$x_n < x_{n+1} < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

    (b) Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

14. Demuestra que toda sucesión convergente está acotada.

15. Prueba rigurosamente (ε y N) que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{1+n^2} = 4.$$

16. Sean la función $f(x) = x^p(1-x)^q$, con $p, q > 0$, y la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por
$$a_n = \int_0^1 [f(x)]^n\, dx.$$
Usando la definición de convergencia, prueba que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Ayuda: encuentra una cota adecuada.

17. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, si $a_n = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$.

    Sugerencia: $a_n = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln\frac{n!}{n^n}}$ e identifica el exponente de e como una suma de Riemann.

5.3 Series

1. Calcula el valor de la serie o justifica si ésta diverge:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{3n}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{\pi n}}{\pi^{3n}}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{e^{2n+1}}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\ln n}{\ln n^3}\right)^n$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-2)^n - 5^{n+1}}{8^{n+1}}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_0 e^{-nbt_0}, \quad c_0, b, t_0 > 0.$

(g) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \rho^k (1-\rho)^k, \quad 0 < \rho < 1.$

(h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-k} - e^{1-k}\right)$.

(i) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1+(-1)^{k+1}}{5^{k+2}}$.

2. ¿Para qué valores de p la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{np}}$ converge a 7?

3. Obtén los valores de c con los que se satisface la igualdad

$$\sum_{k=2}^{\infty} (1+c)^{-k} = 2.$$

4. (a) Identifica la razón de la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-5)^k x^k.$$

(b) Determina los valores de x para los que la serie converge y obtén el valor de la serie.

5. (a) ¿Para qué valores de $r \in \mathbb{R}$ se tiene la siguiente igualdad?

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}, \qquad r > 0.$$

(b) Califica el razonamiento, si está bien o está mal, ¿por qué?

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0.$$

6. Utiliza series convergentes para escribir como cociente de dos enteros al número $x = 0.\overline{27}$.

7. Con ayuda de la serie geométrica encuentra un valor fraccionario para $x = 0.7314040404\ldots$

8. Para la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+2}{6}\right)^n$ determina: (i) El intervalo de convergencia, (ii) El valor de la suma (en función de x).

9. Para la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$ determina: (i) El intervalo de convergencia, (ii) El valor de la suma.

10. Calcula el valor de la serie o justifica si ésta diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right).$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\arccos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arccos\left(\frac{1}{n}\right) \right].$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right].$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n+1}} \right).$

(f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-k} - e^{1-k} \right).$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}.$

Sugerencia: $\displaystyle\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2-1}$.

11. Muestra que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 1$.

5.4 Criterios de convergencia de series con términos no negativos

1. Analiza si las siguientes series convergen o divergen. En cada caso especifica qué criterio usas y verifica que éste sea aplicable:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^{1/n}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3!\, n!\, 3^n}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+n}{n!}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\sqrt{n}}{n}$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n.$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+1}\right)^{n/2}.$

(n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\,n!}{(2n)!}.$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{1/n}.$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}.$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty}\cosh\left(\frac{2}{n}\right).$

(r) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n^4}.$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$

(t) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\,n!}{(2n+1)!}.$

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n+\sqrt{n}}.$

(v) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}.$

(w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{sen}\,(1/n)\,.$

(x) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n n!n!}{(3n)!}.$

(y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{n^2}}.$

(z) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{sech}(n).$

2. Analiza si las siguientes series convergen o divergen. En cada caso especifica qué criterio usas y verifica que éste sea aplicable:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right).$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{2^{n^2}}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\arctan(n)|}{n}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{n 2^n}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln(n)}}{[\ln(n)]^n}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{n}} - \frac{3}{\sqrt{n}} \right)$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^2}$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(e^2 + \tfrac{1}{n}\right)\right)^{n+1}$.

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{n}}$.

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!\, n!\, 3^n}$.

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2n + 3n^2}{4n^3 + 5n^4}$.

(p) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$.

(q) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^n}$.

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5^n}{n+6^n}$.

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

(u) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}\ln(n)}$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{n}}$.

(w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$.

(x) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln^4 n}$.

(y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

(z) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$.

3. Analiza si las siguientes series convergen o divergen. En cada caso especifica qué criterio usas y verifica que éste sea aplicable:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n-1\right]$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}-\sqrt[n]{n}\right)$ con $\alpha\in\mathbb{R}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3!\;n!\;3^n}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(2n)!]^3}{2^{6n}\,(n!)^6}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$.

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4+1}$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+8}{7n^2+6n+1}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{8^n-3}$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^4}$.

(m) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2-\cos(n)}{n^2-1}$.

(n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$.

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^{2n}}$.

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n!}$.

(q) $\displaystyle\frac{2!}{3} + \frac{3!}{3^2} + \frac{4!}{3^3} + \cdots$.

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n^2}$.

(s) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots$.

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2+2)^2}$.

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^{2/n}$.

(w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.

(y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^2+1}$.

(z) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(1+\ln n)^3}$.

4. Analiza si las siguientes series convergen o divergen. En cada caso especifica qué criterio usas y verifica que éste sea aplicable:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^n$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$.

5. Leonard Euler consiguió calcular el valor exacto de la serie p con $p=2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Usa este dato para calcular el valor de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

6. Sean $\alpha \geq 0$ y

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n n!}{n^n}.$$

Por medio de algún criterio de convergencia, encuentra un intervalo de valores de $\alpha \geq 0$ tales que S sea convergente.

7. Analiza si se cumplen las hipótesis de la prueba de la integral para la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^p}, \text{ con } p \in \mathbb{R}.$$

Si se cumplen, determina la convergencia o divergencia de la serie.

8. Sea $a_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

   (a) ¿La sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge? Si converge, halla el límite.

   (b) Encuentra una fórmula para la k-ésima suma parcial $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Simplifica.

   (c) ¿La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge o diverge? Si converge, halla la suma.

9. La función $f(x) = \dfrac{\arctan(ax)}{1+a^2x^2}$ es positiva y decreciente en $[1,\infty)$. ($a = 2, 3$.)

   (a) Determina la naturaleza de la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ y, en caso de convergencia, indica su valor.

   (b) Usando (a) determina la naturaleza de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(3n)}{1+9n^2}.$$

   (c) Usando (b) estudia la naturaleza de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+9n^2}.$$

10. (a) Analiza la convergencia de la siguiente serie:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(3n)}{1+9n^2}. \quad \text{(A)} \quad / \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(2n)}{1+4n^2}. \quad \text{(B)}$$

    Sugerencia: Usa la prueba de la integral.

    (b) Utiliza el inciso anterior para determinar la convergencia o divergencia de la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+9n^2}. \quad \text{(A)} \quad / \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+4n^2}. \quad \text{(B)}$$

11. Analiza la convergencia de la integral
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx.$$

    (a) ¿Qué signo tiene $f(x) = 1/\left(x^2+x\right)$ en $I = [1,\infty)$? ¿Es f continua en I? ¿Es f decreciente en I?

(b) Usa los resultados de (a) y (b) para determinar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}.$$

12. Considera la función definida en $[0,+\infty)$ por $f(x) = \dfrac{2}{1+3x^2}$.

    (a) Determina la naturaleza de la integral $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ y, en caso de convergencia, indica su valor.

    (b) Utiliza el inciso anterior para determinar la naturaleza de la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1+3n^2}.$$

13. Halla $r > 0$ tal que sea convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^k}{k^r}$.

14. Estudia cuidadosamente la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^{2n}} \quad (a > 0)$.

15. Determina qué valores de $p > 0$ hacen convergente a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ y compruébalo. Sugerencia: usa la prueba de la comparación de límites (cociente) con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

16. Considera la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, con

$$a_n = \begin{cases} 1/n^n, & \text{con } n \text{ impar,} \\ 1/(2n)^{2n}, & \text{con } n \text{ par.} \end{cases}$$

    Muestra que la prueba de la razón es inconclusiva. Asimismo, muestra por la prueba de la raíz que la serie es convergente.

5.5 Series alternantes. Convergencia absoluta y condicional

1. Analiza si las siguientes series convergen o divergen. En cada caso especifica qué criterio usas y verifica que éste sea aplicable:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^{n+1}}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan(n)}{n^2+1}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,n\,\mathrm{sen}\,(1/n)$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,n\,e^{-n^2}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+n}\,-n\right)$. (Racionaliza)

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\ln n}{\ln n^3}\right)^n$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt[n]{3}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\mathrm{sech}(n)$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$.

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{sen}(n)}{n^2}$.

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$.

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$.

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\, n^{3}}{n^{4}+1}$.

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln\left(e^{n}+e^{-n}\right)}$.

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\sqrt{n}}{n+1}$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ \sqrt[n]{3}$.

(w) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n^{2}}{2n^{2}+1}$.

(y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}e^{\frac{1}{n}}$.

(z) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\left[\ln(n)\right]^{n}}$.

2. Analiza si las siguientes series convergen o divergen. En cada caso especifica qué criterio usas y verifica que éste sea aplicable:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\left[\ln(n)\right]^{n}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n!}{n^{n}}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{3n+1}\frac{\left(1+5n^{4}\right)^{n}}{\left(1+3n^{2}\right)^{2n}}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\left[\ln(n)\right]^{2}}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n-1}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n-2)}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(\ln n)^{1/n}}$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{n^3+1}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha + (-1)^n}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{2^n}$.

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{n}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{|\operatorname{sen}(n)|}{n^2}$.

(o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$.

3. Determina para qué valores de α son absolutamente convergentes o divergentes las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \operatorname{sen}\alpha)^n$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^\alpha + 1}$.

4. Prueba que si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\{a_n\}$ converge a 0.

5. Sea $\{b_n\}$ una sucesión y considera $a_n = b_n - b_{n-1}$. Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\{b_n\}$ converge.

6. Supón que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge absolutamente. Prueba que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (c_n)^2$ converge. (Sugerencia: como $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$, existe N tal que $|c_N| < 1$ para todo $n \geq N$. Entonces $(c_n)^2 < |c_n|$ para todo $n \geq N$.)

5.6 Series de potencias. Radio e intervalo de convergencia

1. Encuentra el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{\pi^{n+2}}\, x^{n+3}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(3^{n+2})} x^{n+1}$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$.

   (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}\, x^n$.

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(3^{n+2})}\, x^{n+1}$.

   (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{n+2}$.

   (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n$.

   (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n}\left(\frac{x}{4}\right)^n$

   (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$.

   (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$.

   (m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(n+1)(n+2)}$.

   (n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$.

   (o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+3)^n}{n\,2^n}$.

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c^n}{\sqrt{n}} (x-c)^n , \quad c \neq 0.$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n}} (3-2x)^n .$

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x+2)^n}{4^n(2n)}.$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n .$

(t) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(2x-3)^n}{4^n(n^2+1)}.$

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) (x-1)^n .$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}} (x+2)^n .$

(w) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n \; (n+1)}.$

(x) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n-1} \frac{(x+2)^n}{2^n}.$

(y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n \; (n^2+1)} (x-5)^n .$

2. Sea I el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ para los cuales es convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-4x)^n}{n(n+1)}.$$

Demuestra que I es un intervalo. Indica, justificando, la naturaleza de la serie en cada uno de los extremos de ese intervalo y, en caso de convergencia, calcula la suma de la serie correspondiente.

3. Determina el dominio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{2n} \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

indicando los puntos donde la convergencia es simple o absoluta.

4. Considera la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+a)^{n+1}}$, con $a > 0$. Determina a de modo que el radio de convergencia de la serie sea igual 3.

5. (a) Determina el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$.

   (b) Utilizando el inciso anterior, calcula $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2\, 3^n}{(2n)!}$.

6. Determina el valor exacto de $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

   Sugerencia: Deriva término a término la serie

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

7. Se puede demostrar que la serie de Maclaurin de $g(x) = 1/(1-x)$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1.$$

   Usa esta información para obtener la serie de Maclaurin de la función $f(x) = 1/(3x-2)$, así como los valores de x en los que la serie converge a la función $f(x)$.

8. Considerando que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{x=0}^{\infty} x^n$$

   (a) Encuentra una representación en serie de potencias para la función $f(x) = \ln(1+x)$.

   (b) Usa el resultado anterior para dar una representación en serie de potencias para la función $g(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)dt$.

   (c) Calcula el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie obtenida en el inciso (b).

9. Dada la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

   estudiar su carácter y calcular su suma usando una función conocida.

10. Construye una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ tal que su intervalo de convergencia sea $[6, 10)$. Sugerencia: Considera $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-0)^n}{n}$ y cambia variables.

5.7 Series de Taylor

1. Encuentra la serie de Taylor para $f(x)$ en x_0 y el correspondiente intervalo de convergencia:

   (a) $f(x) = e^{2x}, \;\; x_0 = -1.$

   (b) $f(x) = \cosh(x), \;\; x_0 = 0.$

   (c) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t)dt, \;\; x_0 = 0.$

   (d) $f(x) = e^{-x/2}, \;\; x_0 = 0.$

   (e) $f(x) = sen\left(\dfrac{\pi x}{2}\right), \;\; x_0 = 0.$

   (f) $f(x) = \operatorname{senh}(x), \;\; x_0 = 0.$

   (g) $f(x) = \tan^{-1}(x), \;\; x_0 = 0.$

   (h) $f(x) = \cosh(x), \;\; x_0 = 0.$

2. ¿Qué función tiene como serie de Taylor $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-3)^n$? ¿Para qué valores de x es válido este desarrollo?

3. Usa series de Taylor para calcular el límite (sin L'Hopital):

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}.$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3}.$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^4} - \frac{\cos(x)}{x^2}\right).$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}(x) - x - (x^3/3)}{x^4}.$

4. Demuestra que e^x es igual a su serie de Taylor en $x_0 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Sugerencia: Utiliza la fórmula de Taylor y demuestra que el residuo tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

5. La serie de Taylor generada por $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. A partir de esta información:

   (a) Calcula $1 + \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} + \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \dfrac{(\ln 2)^4}{4!} + \ldots$

(b) Encuentra la serie de Taylor generada por $g(x) = e^{-2x^2}$ en $x_0 = 0$.

(c) Demuestra que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = 1$, con $\lambda > 0$ una constante.

(d) Halla el valor exacto de $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n! + e^n}{n!\, e^n}$. Simplifica la respuesta.

6. La serie de Taylor generada por $f(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = 0$ es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

   A partir de esta información:

   (a) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en $x_0 = 0$.

   (b) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = x\ln(1+x^2)$ en $x_0 = 0$.

7. Utiliza operaciones con series de potencias para determinar la serie de Taylor de la función $f(x) = x^2 e^{3x}$ alrededor de $x_0 = 0$.

8. Considera la integral $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2) dx$.

   (a) Expresa la integral como una serie infinita.

   (b) Determina el valor de la integral con un error menor que 10^{-4}.

9. (a) Encuentra la serie de Maclaurin para $f(x) = e^{-x^2}$. Escribe al menos 4 términos diferentes de cero, o escribe la serie en la notación sigma.

   (b) Obtén $\int e^{-x^2} dx$ como una serie infinita. Escribe al menos 4 términos diferentes de cero, o escribe la serie en la notación sigma.

10. (a) Demuestra que

$$\int_0^{1/2} e^{\sqrt{2x}}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}.$$

   Sugerencia: Usa la serie de Taylor de e^t en $t = 0$.

   (b) Encuentra el valor de $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!(n+2)}$, calculando la integral en (a).

11. (a) Obtén $\int_0^1 \cos(\sqrt{x})\, dx$.

   (b) Expresa $\int_0^1 \cos(\sqrt{x})\, dx$ como una serie. **Sugerencia**: Usa la serie de Maclaurin de $\cos(t)$.

12. Demuestra que

$$\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Sugerencia: Usa $\tan^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ e integra término a término la serie de potencias de $\frac{1}{1+t^2}$.

13. (a) A partir de $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $|t| < 1$, obtén

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

(b) Integra término a término y obtén la serie de Maclaurin de $\arctan(x)$.

14. Sea $f(x) = \ln(1+x)$ la función definida en el intervalo $(-1, \infty)$.

(a) Obtén la serie de Taylor de f en 0, así como su radio e intervalo de convergencia.

(b) Estudia el carácter de la integral $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p \operatorname{sen}(x)} dx$.

(c) Estudia el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ y obtener su suma en caso de que sea convergente.

15. Usando $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ muestra que

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

16. (a) A partir de la serie de Maclaurin para $f(x) = \ln(1+x)$ demuestra que

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ para todo } |x| < 1.$$

(b) Usando el resultado anterior demuestra que $\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

17. Obtén el valor exacto de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$. (Deriva término a término la serie de Maclaurin de $\frac{1}{1-x}$.)