CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
GUÍA DE EJERCICIOS
Otoño 2020

1 La integral definida

1.1 Sumas de Riemann. La integral de Riemann

1. Escribe la suma en la notación $\sum_{k=1}^{n} a_k$:

   (a) $\frac{2}{1} - \frac{4}{3} + \frac{6}{5} - \frac{8}{7} + \frac{10}{9}$.

   (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{50}$.

   (c) $-\frac{3}{5} + \frac{5}{5} - \frac{7}{5} + \frac{9}{5} - \frac{11}{5}$.

   (d) $3+3+3+3+3+3+3$

   (e) $x^{-2} + x^{-1} + x^{0} + x^{1}$.

2. En cada inciso indica si la afirmación es verdadera o falsa:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k + 2 = \sum_{k=1}^{100} k + \sum_{k=1}^{100} 2$.

   (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{99} (i+1)^2 = \sum_{i=3}^{102} (i-2)^2$.

   (c) $\displaystyle\frac{\sum_{k=1}^{100} k}{\sum_{k=1}^{100} k^2} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{100} 2 = 200$.

   (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} k^4 = \sum_{k=1}^{100} k^4$.

   (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} (2+k) = 2 + \sum_{k=0}^{100} k$.

   (g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} k^3 = \left(\sum_{i=1}^{100} k\right)\left(\sum_{i=1}^{100} k^2\right)$.

   (h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} k^3 = \left(\sum_{i=1}^{100} k\right)^3$.

3. (a) Demuestra que para todo $r \neq 1$ y $n \geq 1$ se cumple

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}. \quad \text{(suma geométrica)}$$

   (b) Usa el resultado anterior para calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} \frac{2^k}{(-3)^k}$.

4. Utiliza los valores dados de a y b para expresar los liguientes límites como integrales (no calcules las integrales):

   (a) $\displaystyle\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 3c_k(1 - 2c_k)\, \Delta x_k \qquad a = 1, b = 4.$

   (b) $\displaystyle\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{sen}^2 c_k\right)\, \Delta x_k \qquad a = 0, b = \frac{\pi}{2}.$

5. Expresa la integral como el límite de una suma de Riemann (no calcules la integral):

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\, dx.$

   (b) $\displaystyle\int_1^3 \left(2x^2 - x\right)\, dx.$

6. Escribe la integral de Riemann $\int_0^1 (1+x)^2\, dx$ como el límite de sumas de Riemann $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,(x_k - x_{k-1})$, en donde

$$P = \left\{0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\},$$

   $c_k = \dfrac{k}{n}$ y $f(x) = (1+x)^2$.

7. Expresa el límite como una integral definida (no calcules la integral):

   (a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\left(2 + \frac{4(1)}{n}\right)^{1/2} + \left(2 + \frac{4(2)}{n}\right)^{1/2} + ... + \left(2 + \frac{4(n)}{n}\right)^{1/2}\right].$$

   (b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{1\cdot 3}{n}\right)^5 + \left(\frac{2\cdot 3}{n}\right)^5 + \left(\frac{3\cdot 3}{n}\right)^5 + ... + \left(\frac{n\cdot 3}{n}\right)^5\right].$$

8. Evalúa la integral $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ como el límite de una suma de Riemann. Sugerencia: usa la partición de $[0,1]$ en donde

$$x_k = c_k = \frac{k^2}{n^2}$$

y, correspondientemente,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

9. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, si

$$S_n = \frac{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2}{n^3}.$$

Nota que $\dfrac{(n-k)^2}{n^3} = \left(1 - \dfrac{k}{n}\right)^2 \dfrac{1}{n}$.

10. Calcula $\int_{-1}^1 |2x+1|\ dx$.

11. Determina $\int_{-2}^a |x|\ dx$. Analiza los casos $a \le 0$ y $a > 0$.

12. Determina $\int_a^b |x|\ dx$ en los siguientes tres casos: (a) $a < b < 0$, (b) $0 < a < b$, y (c) $a < 0 < b$. Muestra entonces que

$$\int_0^x |t|\ dt = \frac{1}{2} x\,|x|\,, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

13. En cada inciso argumenta si en el intervalo dado la función es: (i) continua, (ii) acotada, (iii) integrable:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,0) \\ 5, & x = 0 \\ -2, & x \in (0,1] \end{cases}$ en $[-1,1]$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ en $[-10\pi, 10\pi]$.

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ en $[0,1]$.

1.2 Propiedades de la integral definida

1. Escribe cada una de las sumas o restas que siguen como una sola integral de la forma $\int_a^b f(x)\ dx$:

   (a) $\int_2^{10} f(x)\ dx - \int_2^7 f(x)\ dx$

   (b) $\int_{-3}^5 f(x)\ dx - \int_{-3}^0 f(x)\ dx + \int_5^6 f(x)\ dx$

   (c) $2\int_{-1}^5 f(x)\ dx + \int_5^6 f(x)\ dx + \int_5^{-1} f(x)\ dx$

2. Establece cotas inferior y superior para la integral en cada inciso:

   (a) $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2+1}$.

   (b) $\int_0^2 \sqrt{x^3+1}\, dx$

   (c) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} sen^2 x\, dx$

   (d) $\int_{-1}^1 \sqrt{x^4+1}\, dx$

3. Prueba que el valor de $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\, dx$ no puede exceder $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ ni ser menor que $\dfrac{\pi}{2}$.

4. Demuestra que el valor de $\int_0^1 \sqrt{1+\csc x}\, dx$ es menor o igual que $\sqrt{2}$.

5. Prueba que $\dfrac{x^6}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^6$, si $x \in [0,1]$. Concluye que

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \leq \frac{1}{7}.$$

6. Utiliza las propiedades de la integral definida para comprobar cada una de las siguientes desigualdades (sin evaluar las integrales):

   (a) $2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}\, dx \leq 2\sqrt{2}$.

   (b) $\int_1^2 \sqrt{5-x}\, dx \geq \int_1^2 \sqrt{x+1}\, dx$.

   (c) $\left|\int_0^{2\pi} f(x)\text{sen}\,(2x)\, dx\right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|\ dx$

7. Demuestra que si f es integrable en $[a,b]$, entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

   Sugerencia: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

8. Decide si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, y en caso de ser falsas proporciona un contraejemplo:

   (a) Si $\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$, entonces $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

   (b) Si $f(x) \geq 0$ y $\int_a^b f(x)\ dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

   (c) Si f y g son continuas y $f(x) > g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| > \left|\int_a^b g(x)\ dx\right|$.

   (d) Si f y g son integrables en $[a,b]$, entonces

   $$\int_a^b f(x)\, g(x)\ dx = \left(\int_a^b f(x)\ dx\right)\left(\int_a^b g(x)\ dx\right).$$

   (e) Si $\int_a^b f(x)\ dx > \int_a^b g(x)\ dx$, entonces $\int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx\ >\ 0$.

   (f) Si f es integrable en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$, entonces

   $$\int_a^b \sqrt{f(x)}\ dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\ dx}.$$

1.3 Teorema del Valor Medio para integrales

1. Sea $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ continua. Supón que $\int_1^3 f(x)\, dx = 4$. Prueba que existe $c \in [1,3]$ tal que $f(c) = 2$.

2. Sabiendo que $\int_{-1}^8 3\sqrt{x+1}\, dx = 54$, encuentra un número real c que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio.

3. Exhibe explícitamente $c \in [a,b]$ tal que

   $$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a),$$

   si $f(x) = (1+x)^2$ y $[a,b] = [0,1]$.

4. Sean $0 \leq a < b$ y $f(x) = x^2$.

   (a) Muestra que el valor promedio de f en $[a,b]$ es $\frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

   (b) Muestra que existe un número $c \in [a,b]$ tal que $c^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

5. Demuestra que si f es continua en $[a,b]$, $a \neq b$, y si $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

6. Supón que $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas $(a < b)$ y que $\int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx = 0$. Prueba que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$. (Usa el TVM para integrales).

7. Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Supón que $\int_0^1 f(x)\,dx \geq 1 + \int_0^1 g(x)\,dx$. Prueba que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) \geq 1 + g(c)$. (Aplica el TVM para integrales a la función continua $h = f - g$).

8. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable no negativa. Demuestra que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Sugerencia: para el caso $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, encuentra cotas inferior y superior para el cociente $\int_a^b f(x)g(x)\,dx / \int_a^b g(x)\,dx$ y luego utiliza el TVI.

1.4 Teorema Fundamental del Cálculo

1. Encuentra las derivadas de las siguientes funciones sin calcular las integrales:

(a) $G(x) = \displaystyle\int_x^1 \sqrt{1+t^4}\,dt.$

(b) $G(x) = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1+t^4}\,dt.$

(c) $G(t) = \displaystyle\int_0^{t^3} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

(d) $G(x) = \displaystyle\int_0^1 x^2 \left(\frac{1}{1+s^3}\right) ds.$

(e) $f(x) = \displaystyle\int_0^x x^2 \left(\frac{1}{1+s^3}\right) ds.$

(f) $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{\frac{t^4+1}{9-t^2}}dt.$

(g) $f(x) = \operatorname{sen}\left[\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3(t)\,dt\right) dy\right].$

(h) $S(x) = \int_0^{\operatorname{sen}(x)} \dfrac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$ $(x \in \mathbb{R})$.

(i) $G(t) = \left(\displaystyle\int_0^t \sqrt{1+s^4}\,ds\right)^2.$

(j) $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+\sqrt{t}}$

(k) $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \sqrt{1+t^4}\,dt.$

2. Sea $T(x) = \int_0^x \frac{ds}{1+s^2}$. Demuestra que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y que $(0,0)$ es su único punto de inflexión.

3. Sea $G(x) = \int_a^x f(t)\ dt$, con a una constante. Encuentra una expresión para: a) $dG(x)/dx$, b) $G(x^2)$, c) $dG(x^2)/dx$.

4. Para $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ define

$$S(\theta) = \int\limits_0^{\operatorname{sen}\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

   Usa la regla de Leibniz para probar que $S'(\theta) = 1$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Concluye que $S(\theta) = \theta$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

5. Sea $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \left(1+t^2\right)^{1/2} dt$, con $x \in \mathbb{R}$. Encuentra la ecuación de la recta tangente a $F(x)$ en el punto $x = 1$.

6. Sin resolver la integral, demuestra que la siguiente función es constante:

$$f(x) = \int\limits_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$g(x) = (x+1) \int_{-1}^x f(t)\ dt.$$

   (a) Demuestra que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Justifica que g es diferenciable en $\mathbb{R}$ y entonces calcula $g'(x)$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par y diferenciable y sea G dada por:

$$G(x) = f(4x) \int_0^{x/2} f(t) dt.$$

   (a) Demuestra que G es una función impar.

   (b) Justifica que G es diferenciable y calcula su derivada.

9. Sea f función continua en $[a, b]$. Demuestra que existe un número $x \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^x f(t)\ dt = \int_x^b f(t)\ dt.$$

   Sugerencia: Considera la función $g(x) = \int_a^x f(t)\ dt - \int_x^b f(t)\ dt$.

10. Sea $T(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{ds}{1+s^2}$. Demuestra que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y que $(0,0)$ es su único punto de inflexión.

11. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t-3}{t^2+7}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de F.

    (b) Encuentra el punto x en donde F alcanza su valor mínimo.

    (c) Encuentra los intervalos en donde F es convexa (cóncava hacia arriba) y cóncava (cóncava hacia abajo).

    (d) Esboza la gráfica de F.

12. Supón que $f(x)$ tiene una derivada positiva para todos los valores de x, y que $f(1) = 0$. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos para $g(x)$?

    (a) g es una función diferenciable de x.

    (b) g es una función continua de x.

    (c) La gráfica de g tiene una tangente horizontal en $x = 1$.

    (d) g tiene un máximo local en $x = 1$.

    (e) La gráfica de $\dfrac{dg}{dx}$ cruza el eje x en $x = 1$.

13. (a) Supón que $\int_1^x f(t)dt = x^2 - 2x + 1$. Determina $f(x)$.

    (b) Determina $f(4)$, si $\int_0^{x^2} f(t)dt = x\cos(\pi x)$.

    (c) Determina $f(4)$, si $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x\cos(\pi x)$.

14. Supón que x y y están relacionadas mediante la ecuación

$$x = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}dt.$$

    Demuestra que $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ es proporcional a y y determina la constante de proporcionalidad.

15. En cada inciso encuentra el límite:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt.$

    Sugerencia: $F'(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1}$.

    (b) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\int_4^{4+h} \sqrt{9+t^2}\,dt\right)$.

    Sugerencia: Identifica la derivada y aplica el TFC. No intentes integrar.

1.5 Integración por sustitución

1. Determina las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$.

   (b) $\displaystyle\int \frac{dt}{\cos^2(t)\,\sqrt{1+\tan(t)}}$.

   (c) $\int x^3\sqrt{x^2+1}dx$.

   (d) $\int\ x^5\sqrt{x^2-1}\,dx$.

   (e) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}dx$. Sugerencia: $\displaystyle\sqrt{\frac{x-1}{x^5}} = \frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}$

   (f) $\int (z^5+4z^2)(z^3+1)^{12}\,dz$.

2. Calcula las siguientes integrales, usando el método de sustitución para integrales definidas:

   (a) $\displaystyle\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\cos(2\theta)}{\operatorname{sen}^3(2\theta)}\,d\theta$.

   (b) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}|\pi-2x|\ dx$.

   (c) $\displaystyle\int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^3+3}}\,dt$, con $x \geq 1$.

   (d) $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,dt$, con $x \geq 0$.

   (e) $\int_{-1/2}^{0} x\sqrt{2x+1}\,dx$.

   (f) $\displaystyle\int_0^9 \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\,dt$.

   (g) $\displaystyle\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$.

   (h) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{5\operatorname{sen}x\,\cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)^2}\,dx$.

3. Halla <u>todas</u> las funciones diferenciables f que satisfacen la ecuación

$$[f(x)]^2 = \int_0^x \frac{uf(u)}{5+u^2}\,du, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

4. Demuestra la siguiente igualdad (sin integrar):

$$\int_a^b 1/x\,dx = \int_1^{b/a} 1/x\,dx.$$

   Ofrece una interpretación gráfica de este cambio de variable.

5. Sea f continua, tal que $\int f(x)dx = F(x)+C$, $C \in \mathbb{R}$. Sean a, b constantes, con $a \neq 0$. Usa el teorema del cambio de variable para demostrar que

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Sugerencia: Usa la sustitución $u = ax+b$.

6. Sea f continua, tal que $\int f(x)dx = F(x)+C$. Sean a, b constantes, con $a \neq 0$. Usa el teorema del cambio de variable para demostrar que

$$\int_{-b/a}^{0} f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\left[F(b)-F(0)\right].$$

Sugerencia: Usa la sustitución $u = ax+b$.

7. Demuestra que si f es continua en el intervalo $[a,b]$ y $\lambda \neq 0$ es una constante, entonces:

   (a) $\int_a^b f(x)\ dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x-\lambda)dx$.

   (b) $\int_a^b f(x)\ dx = \dfrac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)\ dx$.

8. Utiliza el teorema de cambio de variable para mostrar que/dada una función integrable f prueba que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\ dx.$$

9. Sea f continua en $[-a,a]$. Demuestra que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a \left[f(x)+f(-x)\right]dx.$$

1.6 Función logaritmo natural

1. A partir de la gráfica de $y = \ln x$ bosqueja la gráfica de:

   (a) $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

   (b) $y = \ln(1/x)$.

   (c) $y = \ln|x|$.

   (d) $y = |\ln x|$.

2. Decide si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

   (a) $\ln \dfrac{a}{b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}, \quad a, b > 0,\ b \neq 1.$

   (b) $\ln(a-b) = \dfrac{\ln a}{\ln b}, \quad a > b > 0,\ b \neq 1.$

   (c) $\ln(a-b) = \ln \dfrac{a}{b}, \quad a > b > 0,\ b \neq 1.$

   (d) $\sqrt{\ln x} = \dfrac{1}{2}(\ln x), \quad x > 0.$

   (e) $\ln(x^2) = 2\ln x, \quad x \neq 0.$

3. Proporciona el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

   (a) $f(x) = (\ln x) \ln(\operatorname{sen} x)$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} + \ln(1/x)$.

   (c) $f(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{x \ln x}$.

   (d) $f(x) = \ln^2 \left(\dfrac{3x+2}{x^4} \right)$.

   (e) $y = \ln \sqrt{\dfrac{x^2+1}{\operatorname{sen}\ (x)}}$.

   (f) $y = \ln\left(\sqrt{-\ln x}\right)$.

   (g) $y = \ln(a - \ln x)$.

   (h) $y = [\ln(\ln x)]^3$.

   (i) $y = \ln(\ln(5+3x))$.

4. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$. Halla los puntos <u>del dominio de f</u> tales que $f'(x) < 0$.

5. Halla la derivada de las siguientes funciones, sin integrar y encuentra el dominio en donde la derivada está definida:

   (a) $g(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(x^{3/2}\right) \left(\frac{1+t^4}{t^3+2} \right) dt,\ x > 0.$

   (b) $f(x) = \int_x^{x^3} \ln\left(x^2-1\right) \sqrt{\cos(t)+1}dt\ x > 1.$

   (c) $y = \int_{e^{\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln(t)\, dt\ (x \geq 0)$. Simplifica la respuesta.

6. Determina una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea par, con $f(0) = 0$ y tal que

$$\ln(1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1 + f(\sqrt{t})}\, dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

7. Usa derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función:

   (a)
   $$f(x) = \frac{\ln^2 x}{(x^2+1)^{5/2}\sqrt{2+\operatorname{sen} x}}.$$

   (b)
   $$f(x) = \frac{(\ln x)\operatorname{sen}^3(2x)}{(x^2-3x+1)^{5/2}\sqrt{x(x^3+1)}}.$$

   (c)
   $$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+5x+2}\,\sqrt[4]{x^3-2x^2+1}}{\left(x^{1/3}-2\right)\left(x^{1/2}+4x-3\right)^{1/4}}.$$

8. Usa derivación implícita para calcular dy/dx, si $y = \ln(xy^2)$.

9. Prueba que si $\arctan\frac{y}{x} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$, entonces
   $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \quad \text{para } y \neq x,\ x \neq 0.$$

   Sugerencia: considera las propiedades del logaritmo.

10. Determina las siguientes integrales indefinidas:

    (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2x}$.

    (b) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,dx$.

    (c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$.

    (d) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x+4x\ln^2(x)}\,dx$.

    (e) $\displaystyle\int \frac{1}{3+x^{1/3}}\,dx$.

    (f) $\displaystyle\int \frac{1}{x+x\operatorname{sen}(\ln(x))}\,dx$.

    (g) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x\tan x}\,dx$. Utiliza la sustitución $u = x\operatorname{sen} x + \cos x$.

11. Calcula las siguientes integrales, usando el método de sustitución para integrales definidas (cambia los límites de integración):

    (a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$. (Observa que $\ln e = 1$.)

    (b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2+1}{x^3+3x}\, dx$.

12. Sean $a < b \in (0, \infty)$ fijos. Define $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, con

$$g(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\, dt.$$

    Usa la regla de Leibniz para probar que g es constante. ¿Cuál es la constante?

13. Sea $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

    y

$$\lim_{t \to 0} \frac{L(1+t)}{t} = 1. \quad (*)$$

    Prueba que $L(x) = \ln x$, para todo $x > 0$. (Sugerencia: Prueba que $L(1) = 0$ y usa (*) para demostrar que $L'(x) = 1/x$.)

2 Funciones inversas. Formas indeterminadas

2.1 Funciones inversas

1. Determina si la función dada en cada inciso posee una inversa. Si existe, da el dominio y la imagen de la inversa, y luego grafica f y f^{-1}.

    (a) $f(x) = \sqrt[6]{x}$.

    (b) $f(t) = \sqrt{1-t^2}$.

    (c) $f(x) = x + |x|$.

    (d) $f(x) = \ln\left(x^2\right)$.

2. En cada inciso, encuentra un intervalo en el que f tenga una inversa (halla un intervalo en el que $f' > 0$ o $f' < 0$). No es necesario encontrar f^{-1}.

    (a) $f(t) = t^4 + 2t^2 + 1$.

    (b) $f(x) = \int_{x^2}^{x} \ln t\, dt$, $0 < x < 1$.

    (c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}^4(t^2)dt$. Muestra que f tiene inversa.

4. Muestra que la función es su propia inversa y esboza su gráfica:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$.

   (b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$.

5. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$.

   (a) Muestra que f es creciente y diferenciable en $\mathbb{R}$.

   (b) Calcula $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(9)$. (Observa que $f(2) = 9$.)

6. (Lorena) Sea g la función inversa de $f(x) = x^7 + 5x^5 + 2x - 2$. Calcula $g'(-2)$.

7. Encuentra la derivada de la función inversa f^{-1} de $f(x) = \ln(x) + 2x + 1$ en el punto $a = 3$, sin buscar la fórmula de f^{-1}.

8. Sea $f(x) = 2 + \int_0^x \sqrt{3 + 2t^4 + t^6}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Demuestra que f posee una inversa f^{-1}.

   (b) Encuentra $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

9. Sea $f(x) = 6 + \int_0^x \sqrt{t^8 + 5t^2 + 7}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Demuestra que f posee una inversa f^{-1}.

   (b) Encuentra $\left(f^{-1}\right)'(6)$.

10. Sea $F(x) = \int_0^{3x^3} \sec^2\left(t^2\right)\, dt$.

    (a) Encuentra un subintervalo de $[0, 2\pi]$ para el cual $F(x)$ tenga inversa. Justifica tu respuesta.

    (b) Sea $c = F\left(\sqrt{\pi/3}\right)$. Encuentra $\left(F^{-1}\right)'(c)$.

11. Muestra que si f y g poseen inversas f^{-1} y g^{-1}, entonces $g \circ f$ posee una inversa, y
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

12. Supón que f posee una inversa y sea a una constante. Sea $g(x) = f(x+a)$, para toda x tal que $x + a$ está en el dominio de f. Muestra que g tiene una inversa y que
$$g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - a.$$

13. Supón que f posee una inversa y sea a una constante. Sea $g(x) = f(ax)$, para toda x tal que ax está en el dominio de f. Muestra que g tiene una inversa y que
$$g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x)}{a}.$$

2.2 La función exponencial natural

1. A partir de la gráfica de $y = e^x$ bosqueja la gráfica de:

   (a) $y = -e^x$.
   (b) $y = e^{-x}$.
   (c) $y = e^{-|x|}$.

2. Simplifica las expresiones dadas:

   (a) $\ln(\ln e^e)$
   (b) $\ln\left(x^2 e^{-2x}\right)$.
   (c) $e^{x+2\ln x}$.
   (d) $e^{\ln x - 2\ln y}$.

3. En cada una de las siguientes expresiones despeja y:

   (a) $x = \dfrac{e^y}{e^y + 1}$.
   (b) $\dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = 6$.
   (c) $\ln(y-1) - \ln 2 = x + \ln x$.
   (d) $\ln\left(y^2 - 1\right) = \ln x + \ln(y+1)$.
   (e) $e^{2\ln x - \ln y} - 1 = e^x$.

4. Demuestra que la ecuación $2e^x + 3e^{-x} = 4$ **no** tiene solución.

5. Encuentra una fórmula para la inversa de $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

6. Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
   (b) $f(x) = \int_1^{e^{(x^2)}} \ln\left(\sqrt{t}\right)\, dt$. Simplifica.
   (c) $f(x) = x^{3x} e^{x^{\operatorname{sen}(x)}}$.
   (d) $y = \left(e^{\sqrt{\ln x}}\right)^2$.

7. Sea
$$G(x) = \int_{-2\ln x}^{2\ln x} \ln\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right)\, d\alpha, x > 0.$$
(a) Justifica que G es diferenciable. (b) Halla la derivada y simplifica el resultado:

8. Usa diferenciación implícita para calcular dy/dx :
   (a) $e^{xy} + y = 2$.
   (b) $xe^{y} + 2x = \ln y$.
   (c) $\ln(y/x) = e^{x+y}$.

9. La concentración y de una droga en la sangre t minutos después de haber sido inyectada está dada por
$$y = \frac{c}{a-b}\left(e^{-bt} - e^{-at}\right),$$
en donde a, b y c son constantes positivas, con $a > b$.
   (a) Encuentra el valor máximo de y.
   (b) ¿Qué sucede con el valor de y a medida que t se hace muy grande?

10. Sea $f(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$.
   (a) Encuentra el dominio de f.
   (b) Encuentra $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to(-\infty)} f(x)$.
   (c) Determina f', f'', intervalos de crecimiento y decrecimiento, posibles valores extremos y puntos de inflexión, y luego esboza la gráfica de la función f, indicando las asíntotas.

11. Sea $f(x) = 6/\left(1 + 2e^{-x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Prueba que $f'(x) = \dfrac{12e^{-x}}{\left(1 + 2e^{-x}\right)^{2}}$.
   (b) Prueba que $f''(x) = \dfrac{12e^{-x}(-1 + 2e^{-x})}{\left(1 + 2e^{-x}\right)^{3}}$.
   (c) Esboza la gráfica de la función f, indicando el punto de inflexión y las asíntotas. Esta curva se conoce como la curva logística.

12. Determina una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea par, con $f(0) = 0$ y tal que
$$\ln(1 + f(x)) = \int_{0}^{x^{2}} \frac{e^{t}}{1 + f(\sqrt{t})}\, dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$
Sugerencia: Utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo.

13. Determina las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx.$

(c) $\int xe^{x^2}dx.$

(d) $\int \ln\left(e^{2x-1}\right)dx.$

14. Calcula las siguientes integrales definidas:

(a) $\int_0^{4\ln 3} e^{x/2}dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1}dx.$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{2x}}{1-e^x}dx.$ Sugerencia: Utiliza la sustitución $u = e^x$.

(d) $\int_{-2}^2 e^{-3|x-2|}\,dx.$

(e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}\,dz.$

15. Prueba que

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x}\,dx \leq 2e^2.$$

16. Sea $k \in \mathbb{R}$ y considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} + 2k - \dfrac{1}{2}, & \text{si } x > 0 \\ k, & \text{si } x = 0 \\ \left(k^2 + \dfrac{k}{2}\right)\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(a) Determina k de modo que f sea continua en $x = 0$.

(b) Demuestra que para todo $x > 0$, $e^{-1/x^2} \in (0, 1)$.

(c) Para $k = 1/2$ define la inversa de la restricción de f a $\mathbb{R}^+$.

17. Considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} + 2k - \dfrac{1}{2}, & \text{si } x > 0 \\ k, & \text{si } x = 0 \\ \left(2k^2 + k\right)\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases} .$$

   (a) Determina $k \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$.

   (b) Demuestra que para todo $x < 0$, $e^{-1/x^2} \in (0,1)$.

   (c) Suponiendo que $k = 1/2$, define la inversa de la restricción de f a $\mathbb{R}^+$.

18. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x-\alpha|e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2}}$, en donde α es una constante real.

   (a) Determina el dominio de diferenciabilidad de f y calcula f'.

   (b) Estudia la monotonía y extremos relativos de f.

   (c) Indica, justificando, si f admite máximos y mínimos absolutos.

   (d) Justifica que f restringida al intervalo $(\alpha+1, +\infty)$ es invertible e indica el dominio de la respectiva función inversa. Calcula la derivada de la función inversa en el punto $f(\alpha+2)$.

19. Sea $f > 0$ una función continua en el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y diferenciable en (a,b). Demuestra que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

20. (a) Obtén las coordenadas del máximo absoluto de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ en $(0,\infty)$.

   (b) Demuestra que $x^e \leq e^x$ para todo $x > 0$, y $x^e = e^x$ si y sólo si $x = e$

21. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Supón que $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que $f(x) = Ce^x$ para alguna $C \in \mathbb{R}$.

   Sugerencia: Calcula $\left(e^{-x}f(x)\right)'$.

22. Grafica la función (dominio, extremos locales, concavidad,...):

   (a) $y = e^{|x|}$.

   (b) $y = x\,e^{-x}$. Sugerencia: $\lim\limits_{|x|\to\infty} xe^{-x} = 0$.

   (c) $f(x) = xe^{-x^2}$. Sugerencia: $\lim\limits_{|x|\to\infty} xe^{-x^2} = 0$.

   (d) $f(x) = \int_0^x \ln(t^2+1)dt, \;\; x \in \mathbb{R}$.

(e) $f(x) = \int_0^x \ln \frac{(t+1)^2}{4} dt, \quad x \geq 0.$

(f) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$

23. Sea $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(a) Encuentra el dominio de f.

(b) Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(c) Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

(d) Estudia la concavidad y convexidad de f.

(e) Grafica f.

24. Sea $f(x) = \ln(-\ln x)$.

(a) Encuentra el dominio de f.

(b) Calcula $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 1^-} f(x)$.

(c) Determina los intervalos de monotonía, extremos, concavidades y puntos de inflexión de f.

(d) Dibuja la gráfica de f.

25. En cada inciso encuentra el límite (sin L'Hopital):

(a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$.

(b) $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - e^{-h}}{h}$.

2.3 Funciones logarítmicas y exponenciales en distintas bases

1. Simplifica las siguientes expresiones:

(a) $4^{\log_2 x}$.

(b) $2^{\log_4 x}$.

(c) $\log_3(1/9)$.

(d) $\log_{121}(11)$.

(e) $\ln(\log_4(2e^x))$.

(f) $\log_3(100) - \log_3(18) - \log_3(30)$.

2. Despeja x:

   (a) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(\log_3 x\right)\right) = -1$.

   (b) $x^{2+\log_2 x} = 8$.

3. En cada una de las siguientes expresiones despeja y:

   (a) $\log_3(1-y) - \log_3(y) - x = 0$.

   (b) $2^{-\log_2 y} = 5e^{-\ln y} - 4^{\log_2 3}$.

   (c) $\dfrac{5^y - 5^{-y}}{2} = 3$.

4. Encuentra el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(\log_2 x)}$.

5. Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $y = \log_3\left(\dfrac{3^x}{3^x+1}\right)$.

   (b) $y = 5^{\sqrt{x}}$.

   (c) $y = k_0(1+r)^{nt}, \quad k_0, n > 0$ constantes.

   (d) $y = \log_7\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{e^{\theta}\,2^{\theta}}\right)$.

   (e) $y = \left(\log_3 r\right)\left(\log_9 r\right)$.

6. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$, si

$$f(x) = \int_3^{1+2^x} \frac{\log_2(t-1)}{t-1}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7. Determina las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2^{\tan x}}}{\cos^2 x}\,dx$.

   (b) $\displaystyle\int \frac{2^{-1/x^2}}{x^3}\,dx$.

   (c) $\int 2^{\tan(t)} \sec^2(t)\ dt$.

   (d) $\int 3^{2^x}\, 2^x dx$.

   (e) $\displaystyle\int \frac{3^x}{3-3^x}\,dx$.

   (f) $\int 2^{\tan(t)} \sec^2(t)\ dt$.

8. Determina las siguientes integrales definidas:

   (a) $\displaystyle\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(x)}{x} dx$. Simplifica la respuesta.

   (b) $\displaystyle\int_{4}^{16} \frac{dx}{x\left(\log_4 x\right)^2}$. Usa el método de sustitución en integral definida.

   (c) $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{\log_2(x)}{x}\, dx$. Simplifica la respuesta.

   (d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan(t)} \sec^2 t\, dt$.

   (e) $\int_0^1 2^{-x} dx$.

9. Prueba que si $x > 0$ y $x^{(x)^x} = (x^x)^x$, entonces $x = 1$ o $x = 2$.

10. Utiliza derivación logarítmica para encontrar la derivada de las siguientes funciones:

    (a) $y = x^{\operatorname{sen} x}$

    (b) $y = (\operatorname{sen} x)^{2x}$

    (c) $y = (\ln x)^{\ln x}$, $x > 1$.

    (d) $y = x^{1/x}$, $x > 0$.

    (e) $y = (2^x + 1)^{1/x}$, $x > 0$.

    (f) $f(x) = \left(\int_{1/2}^{1/x} \frac{dt}{t}\right)^{\int_1^x \frac{dt}{t}}$

    (g) $y = (\ln x)^x\,(1 + \ln x)$.

    (h) $y = x^x\,(\ln x)^{\ln x}$, $x > 1$.

    (i) $f(x) = x^{\sqrt{x}} x^{\ln x}$, $x > 0$.

    (j) $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x^{(2^x)}}$.

    (k) $f(x) = \dfrac{(\ln x)^x}{1 + e^{-2x}}$, $x > 1$.

    (l) $f(x) = \dfrac{x^{1/x}}{(\ln x)^x \sqrt{2^x + 1}}$.

    (m) $y = (\ln x)^x + 2^{1/x}$, $x > 1$. Sugerencia: calcula por separado la derivada de cada término.

2.4 Funciones hiperbólicas y sus inversas

1. Simplifica las siguientes expresiones:

   (a) $\operatorname{senh}\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]$. Simplifica la respuesta.

   (b) $\tanh(\ln x)$.

2. Muestra que $\cosh(x) > \dfrac{e^{|x|}}{2}$ para todo x.

3. Muestra que $\cosh(x) \geq 1$ para todo x. Usa el hecho de que $z + \dfrac{1}{z} \geq 2$ para todo $z > 0$.

4. Demuestra que para todo x:

   (a) $e^x = \cosh(x) + senh(x)$.

   (b) $(\cosh(x) + \operatorname{senh}(x))^n = \cosh(nx) + senh(nx)$.

5. Utiliza la definición de las funciones hiperbólicas para determinar los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sech}(x)$.

   (b) $\lim\limits_{x\to(-\infty)} \operatorname{csch}(x)$.

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh(x)$, $\lim\limits_{x\to(-\infty)} \tanh(x)$.

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} senh(x)$, $\lim\limits_{x\to(-\infty)} senh(x)$.

   (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \coth(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \coth(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \coth(x)$.

6. Determina el dominio de la función y su derivada:

   (a) $f(x) = \operatorname{sech}(\sqrt{x})$.

   (b) $f(x) = senh^2(\sqrt{1-x^2})$.

   (c) $f(x) = e^{\operatorname{csch}(x)}$.

7. Demuestra que para $t > 0$,

$$\int_1^{\cosh(t)} \sqrt{x^2-1}\, dx = \operatorname{senh}(2t) - \frac{t}{2}.$$

   Sugerencia: Usa la sustitución $x = \cosh(u)$.

8. Demuestra que para $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^{\cosh(t)} x^2\sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{32}\operatorname{senh}(4t) - \frac{t}{8}.$$

   Sugerencia: Usa la sustitución $x = \cosh(u)$.

9. Sean

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\text{sen}\,(\theta)\cos(\theta) + \int_{\cos(\theta)}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

y

$$B(x) = \frac{1}{2}\text{senh}\,(x)\cosh(x) - \int_{1}^{\cosh(x)} \sqrt{s^2-1}\,ds, \quad x \ge 0.$$

Prueba que $A(\theta) = \dfrac{\theta}{2}$ para todo θ y $B(x) = \dfrac{x}{2}$ para todo x. Sugerencia: $A'(\theta) = \dfrac{1}{2}$ y $B'(x) = \dfrac{1}{2}$ por la regla de Leibniz.

10. Encuentra $S'(x)$, si

$$S(x) = \int_{0}^{\text{senh}(x)} \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

11. Construye la gráfica (con todo detalle) de la función:

    (a) $f(x) = (x-1)\cosh(x) - \text{senh}(x)$.

    (b) $f(x) = \sec h\left(\sqrt[3]{x^2(x-3)}\right)$.

12. Determina las siguientes integrales indefinidas:

    (a) $\displaystyle\int 6\cosh\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right)\,dx$.

    (b) $\int e^x\,\text{senh}(x)\,dx$.

13. Calcula las siguientes integrales definidas:

    (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\,\text{senh}(\text{sen}\,\theta)\cos\theta\,d\theta$.

    (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} e^x\cosh(x)\,dx$. Simplifica la respuesta.

    (c) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{-x}\text{senh}\,(x)\,dx$. Simplifica la respuesta.

    (d) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} e^t\,\text{sech}(t)\,dt$. Simplifica la respuesta.

    (e) $\displaystyle\int_0^{\ln 10} 4\,senh^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$.

    (f) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \sqrt{1+\cosh(x)}\,dx$.

    Sugerencia: desarrolla $\cosh(x) = \cosh\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right)$.

14. Caracteriza la función inversa del coseno hiperbólico y demuestra que:

    (a) $\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

    (b) $\left(\cosh^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

15. Dado $x \neq 0$, encuentra $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{\operatorname{senh}(t)} = x$.

16. Simplifica

$$\cosh\left(\operatorname{senh}^{-1}(x)\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

17. Demuestra que

$$\coth^{-1}(x) = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \neq 0).$$

18. Sea $f(x) = \operatorname{sech}^{-1}(4 - x^2)$.

    (a) Justifica el dominio de la función sech^{-1} y después determina el dominio de $f(x)$.

    (b) Deduce la derivada de la función $f(x)$ a partir de la derivada de la función inversa y la función recíproca.

19. Obtén la derivada de $f(x) = \operatorname{csch}^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$.

20. Las funciones $\tanh^{-1}(x)$ y $\coth^{-1}(x)$ tienen la misma derivada, $\dfrac{1}{1 - x^2}$. ¿Por qué no difieren en una constante?

21. Determina el dominio de la función y su derivada:

    (a) $y = \cosh^{-1}(2\sqrt{x + 1})$.

    (b) $y = \operatorname{csch}^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\theta}$.

    (c) $y = \left(1 - t^2\right)\coth^{-1}(t)$.

    (d) $y = \operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$.

    (e) $y = \ln(x) + \sqrt{1 - x^2}\operatorname{sech}^{-1}(x)$.

22. Demuestra que

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}, \quad |x| < 1.$$

23. Calcula las siguientes integrales:

    (a) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$. Da la respuesta en términos del logaritmo natural.

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$. Da la respuesta en términos del logaritmo natural.

(c) $\displaystyle\int_{1/5}^{3/13} \frac{dx}{x\sqrt{1-16x^2}}$.

(d) $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{2}} \frac{e^{2x}}{\sqrt{4+e^{4x}}}dx$.

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x\, \cos x}{\sqrt{4+\operatorname{sen}^4 x}}dx$.

(f) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x\sqrt{16+\ln^4 x}}dx$.

(g) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x\; dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$.

24. Determina $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$, $x > 1$, usando $x = \operatorname{sech}(u)$, $u > 0$.

25. Determina la primitiva de cada una de las siguientes funciones, efectuando el cambio de variable indicado:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, $x = \cosh(t)$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x = \cosh(u)$. La respuesta debe expresarse en términos de logaritmos.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = \operatorname{senh}(u)$. La respuesta debe expresarse en términos de logaritmos.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{senh}(x)}$, $u = \cosh(x)$.

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, $x = \cosh(u)$.

2.5 Funciones trigonométricas inversas

1. Simplifica la expresión $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}\right)$.

2. Calcula:

(a) $\tan\left(\sec^{-1}\sqrt{2}\right)$.

(b) $sen^{-1}(\cos(\pi/6))$.

3. Prueba que

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right), \quad \text{si } 0 < |x| \leq 1.$$

Sugerencia: Dibuja un triángulo o deriva ambos lados de la igualdad.

4. Prueba que

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{sen}^{-1}(x), \quad \text{si } |x| < 1.$$

Sugerencia: Deriva ambos lados. Verifica, dibujando el triángulo.

5. Considera la función definida por

$$f(x) = -\pi + \cos^{-1}(1 - \ln x).$$

(a) Determina: (i) el dominio de f, (ii) la imagen (rango) de f, (iii) los ceros de f, (iv) las soluciones de la ecuación $f(x) = -\pi$.

(b) Demuestra que f es inyectiva.

(c) Caracteriza la función inversa de f (dominio, imagen y regla de correspondencia).

6. Considera la función $f(x) = \pi - 3\operatorname{arcsen}(2 - 5^{4x})$.

(a) Determina el dominio y la imagen de f.

(b) Encuentra la derivada f' y justifica que f es inyectiva.

(c) Caracteriza la función inversa f^{-1} de f (regla de correspondencia, dominio e imagen).

7. Determina el dominio de la función y su derivada:

(a) $f(x) = \cot^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

(b) $f(x) = \sec^{-1}(\ln x)$.

(c) $f(x) = 3\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x^2-1})$.

(d) $y = \ln\sqrt{\dfrac{x^5 \operatorname{senh}(x^2+2)}{\arctan(x)}}$.

(e) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left[\coth\left(2^{x^3}\right)\right]$.

(f) $f(x) = \dfrac{2^x \operatorname{arcsen}^2(x)}{x^x}$. Usa diferenciación logarítmica.

8. Construye la gráfica (con todo detalle) de la función:

   (a) $f(x) = \pi - 3\cos^{-1}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)$.

   (b) $f(x) = \left|\frac{\pi}{4} - \operatorname{arccot}(x-1)\right|$.

9. Encuentra la derivada de la función

$$g(\theta) = \int_{\tan\theta}^{0} \frac{e^{\tan^{-1} x}}{\sqrt{x^2+1}} dx, \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Simplifica.}$$

10. Encuentra $f'(0)$, si $f(x) = e^{-x} \int_0^{\tan^{-1}(x)} e^{\tan(t)}\, dt$.

11. Considera la función $G(x) = F(\operatorname{sen} x) - F(-\cos x)$, en donde

$$F(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\ , \text{ para } 0 < x < 1.$$

   Muestra que G es constante y determina su valor.

12. Sea $f(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

   (a) Muestra que $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$, $x \neq 1$.

   (b) Encuentra una fórmula para f''.

   (c) Muestra que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

   (d) Esboza la gráfica de f.

13. Determina las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{\arctan(3x) - 1}{1 + 9x^2} dx$.

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$.

   (c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1}\, dx$.

   (d) $\displaystyle\int \frac{x - \arctan(2x)}{1 + 4x^2} dx$.

   (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(9+9x^2)\ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|}}$.

   (f) $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan(x)} + x\ln\left(1+x^2\right) + 1}{1+x^2} dx$.

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+2x+1}$.

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

(i) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}\,dx}{\sqrt{1-e^{6x}}}$.

(j) $\displaystyle\int \frac{x^{n-1}\,dx}{1+x^{2n}}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

14. Calcula la integral definida:

(a) $\displaystyle\int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

(b) $\displaystyle\int_{4\sqrt{3}/3}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

(d) $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{dx}{2x^2+2x+1}$.

(e) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x^2+8x+13}$.

(f) $\displaystyle\int_{0}^{-1+\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

(g) $\displaystyle\int_{-b}^{-b/2} \frac{dx}{\sqrt{-2bx-x^2}}$, $b > 0$.

(h) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

(i) $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{\cos\left(\sec^{-1} x\right)\,dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(j) $\displaystyle\int_{0}^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} e^{\cos^{-1} x}\right) dx$

(k) $\displaystyle\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \left(\frac{d}{dx} e^{\operatorname{sen}^{-1} x}\right) dx$.

15. Sea $x = a \cot y$. Prueba que la función $y = f(x)$ es monótona creciente y que

$$\frac{y}{x} + \int_0^x \frac{du}{a^2+u^2} = 0, \text{ para } a > 0.$$

16. Usando el método de sustitución en integral definida evalúa:

$$\int_{\ln(1/\sqrt{3})}^{0} \frac{e^t}{e^{2t}+1} dt. \text{ Simplifica la respuesta.}$$

17. Sean $a, b > 0$. Haciendo la sustitución $u = \tan x$ determina

$$\int \frac{1}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x}\, dx.$$

18. Sea

$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\, dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\, dt, \quad \text{con } x > 0.$$

   (a) Sin resolver la integral, demuestra que f es constante.

   (b) Resolviendo la integral, demuestra que la constante es $\pi/2$. Sugerencia: $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}(1/x)$.

19. (a) Prueba que

$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \tan^{-1}(\operatorname{senh}(x)) + C.$$

   Sugerencia: $\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \displaystyle\int \frac{1}{\cosh(x)}\, dx = \int \frac{\cosh(x)}{\cosh^2(x)}\, dx.$

   (b) Prueba también que

$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh(x)) + C. \quad \text{(Derivar.)}$$

20. Determina la primitiva de la función $f(x) = \sec(x)$, efectuando el cambio de variable $t = \operatorname{sen}(x)$. (Sugerencia: Integra usando la sustitución indicada y luego utiliza el ejercicio 22 del laboratorio 5.)

21. Demuestra que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{t}{x^2+t^2} dx = 1.$$

2.6 Formas indeterminadas. Regla de L'Hopital y Teorema de Cauchy

1. (a) Prueba que si $t \geq 1$, entonces $\dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, y de aquí obtén que

$$0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2, \quad \text{para toda } x \geq 1.$$

   (b) Concluye que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. (Usa el teorema del sandwich).

2. (a) Prueba que $e^t \geq 1 + t$, para todo $t \in [0, \infty)$.

   (b) Generaliza el resultado anterior probando que

   $$e^t \geq 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}, \quad \text{para todos } t \in [0, \infty)\,,\; n \in \mathbb{N}.$$

   Sugerencia: Define $\phi_n(t) = e^t - \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right)$. Prueba que ϕ_n es creciente en $[0, \infty)$ y usa inducción.

   (c) Prueba que $0 < \dfrac{t^n}{e^t} \leq \dfrac{(n+1)!}{t}$ para todo $t > 0$ y, por tanto,

   $$\lim_{t \to \infty} \frac{t^n}{e^t} = 0.$$

3. Sin utilizar la regla de L'Hopital encuentra los siguientes límites:

   (a) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(2.8)^h - 1}{h}$. Sugerencia: Usa la definición de derivada.

   (b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1} \int_1^x e^{-t^2}\, dt$.

4. Sin utilizar la regla de L'Hopital prueba que

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1}(x)}{x} = 1 \quad \text{(cambia variable)}.$$

5. Calcula, si existen, los siguientes límites:

   (a) $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi/2} \frac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{1 - \sqrt{\frac{t}{t+1}}}{1 - \sqrt{\frac{4t+1}{t+2}}}$.

   (c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$.

   (d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x + x^2/2}{x^3}$.

   (e) $\displaystyle\lim_{a \to 1} \frac{x^{1-a} - 1}{1 - a}$, $x > 0$.

   (f) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2^x + 4^x}{5^x - 2^x}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{(-1/x^2)}}{x}$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x e^{-t^2}dt}{1-e^{-x^2}}$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}}{x\ \int_0^x e^{-t^2}dt}$.

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4^x - 3^{\,x}}{x}$.

(k) $\displaystyle\lim_{x\to\, 0} \ \frac{x}{6^x - 5^x}$.

(l) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$.

(m) $\displaystyle\lim_{x\to a} \left(\frac{a^2 - ax}{a-\sqrt{ax}}\right)$.

(n) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x\ e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x\ e^{2t^2}\,dt}$.

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sec^{-1}(x)}$.

(p) $\displaystyle\lim_{x\,\to\, 1} \frac{\int_2^{2x} e^{(4-t^2)}dt}{x-1}$.

(q) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tanh(x)}{e^{2x}-1}$.

(r) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x\,\mathrm{sen}\,(x)}$.

(s) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\mathrm{senh}(x)}{\mathrm{sen}(x)}$.

(t) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\mathrm{sen}(x)}$.

(u) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\ dt}{\displaystyle\int_1^x \frac{1}{2t+1}\ dt}$.

(v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{-\operatorname{sen}(x)+x}{\tan(x)-\operatorname{sen}(x)}$.

(w) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^{-1}(\operatorname{sen}^{-1}(x^2))}{(e^{2x}-1)\ln(1+2x)}$.

6. Justifica que puedes aplicar la regla de L'Hopital al siguiente límite y calcúlalo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_1^x \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) dt}{x^2}.$$

7. Justifica que puedes aplicar la regla de L'Hopital al siguiente límite y encuentra el valor de las constantes a y b de modo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{bx-\operatorname{sen}(x)} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\, dt = 1.$$

8. Supón que f y g son continuas en una vecindad de α y que $g(\alpha) \neq 0$. Muestra que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\int_\alpha^x f(t)\, dt}{\int_\alpha^x g(t)\, dt} = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}.$$

9. Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_1 \operatorname{senh}\left(\dfrac{x}{1-x}\right), & \text{si } x<0 \\ \alpha_2 + \tan^{-1}(x), & \text{si } x\geq 0, \end{cases}$$

en donde α_1 y α_2 son constantes reales. Determina α_1 y α_2 de modo que la función f sea continua y diferenciable en $\mathbb{R}$.

10. Explica si es correcto usar las reglas de L'Hopital para calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3\,(x-\operatorname{sen}(x))}{x+\operatorname{sen}(x)}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x^2\operatorname{sen}(1/x)}{5\operatorname{sen}(x)}$.

11. Calcula, si existen, los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$.

(b) $\lim_{x\to\infty} \left[\ln(1+6x) - \ln(4+3x)\right]$.

(c) $\lim_{x\to\infty} \left(x-\ln(3e^x+1)\right)$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}-\frac{1}{x}\right).$

12. Calcula, si existen, los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(2\sqrt{x}\left[\pi-2\tan^{-1}(\sqrt{x})\right]\right).$

(b) Prueba que

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}\int_0^x e^{u^2}\,du=0.$$

(c) $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\left[y\,\tan^{-1}\left(\frac{2}{y}\right)\right].$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\int_3^{3x} e^{9-t^2}\,dt\right).$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+3/x\right)\right].$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[e^x\ln\left(1+e^{-x}\right)\right].$

13. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt, & \text{si } x\neq 0\\[2ex] f(0) & \text{si } x=0.\end{cases}$$

(a) Demuestra que F es continua en el punto $x=0$.

(b) ¿En qué condiciones se puede garantizar que F es diferenciable en el punto $x=0$?

14. Calcula, si existen, los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x, \quad a\ >\ 0,\ b>0.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\operatorname{sen}(x)\right)^{\cot(x)}.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{5x+7}\right)^x.$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{1/x} \qquad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{4^x+3^x}{2}\right)^{1/x}.$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(2^x+5\right)^{1/x}.$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+3x\right)^{\left(\frac{1}{3\ln x}\right)}.$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(1+ax\right)^{1/x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{3}a^x + \frac{2}{3}b^x\right)^{1/x}, \quad a, b > 0.$

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(2x))^{\frac{1}{\ln(x)}}.$

(j) $\lim\limits_{x\to(-\infty)} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(x)\right]^{1/x}.$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(x)\right]^{1/\ln(x)}.$

(l) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \left[\frac{2x}{\pi} + \cos(x)\right]^{1/\cos(x)}.$

(m) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[x^{(x^x)} - 1\right].$

15. Deduce cuál es el valor de la constante c tal que se cumple la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{cx}{cx+1}\right)^x = 9.$$

16. Encuentra un valor positivo de c tal que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 9.$$

17. Encuentra el valor de c de modo que se cumpla lo siguiente:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+c}\right)^x = e^3.$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+c}{x}\right)^x = e^3.$

18. Encuentra el valor de c que hace a la siguiente función continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} (e^x + x)^{1/x}, & \text{si } x \neq 0, \\ c, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

19. Demuestra que $\lim\limits_{k\to\infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = A_0 e^{rt}.$

20. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \int_0^{1/x} f(t)dt\right)^x = e^{f(0)}.$$

21. Sea $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^{1/x}$.

   (a) Determina $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

   (b) Determina los intervalos de monotonía, extremos, concavidades y puntos de inflexión de f.

   (c) Dibuja la gráfica de f.

22. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ \tan^{-1}(x), & x < 0. \end{cases}$$

   (a) Demuestra que f es diferenciable en $x = 0$.

   (b) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   (c) Determina los extremos locales y los intervalos de monotonía de f.

   (d) Grafica f.

23. Grafica la función (dominio, límites, extremos locales, concavidad,...):

   (a) $f(x) = xe^x$.

   (b) $f(x) = xe^{-x^2}$.

3 Técnicas de integración

3.1 Integración por partes

1. Determina las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\int \dfrac{\ln(x)}{x^2} dx$.

   (b) $\int (\ln x)^2 \, dx$.

   (c) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$.

   (d) $\int \operatorname{sen}^{-1}(3x)\, dx$.

   (e) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$.

   (f) $\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} dx$.

   (g) $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

   (h) $\int x^2 e^{-2x}\, dx$.

   (i) $\displaystyle\int \frac{xe^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}\, dx$.

   (j) $\int \cos\left(\sqrt{5x+3}\right)\, dx$.

(k) $\int x^5 \cos\left(x^3\right) dx$.

(l) $\int\ e^{ax} \cos(kx)\, dx, \quad a \neq 0,\ k \neq 0$.

(m) $\int 2^x \cos(3x)\, dx$.

(n) $\int\ \arctan(\sqrt[3]{x})\, dx$.

(o) $\int x \arctan(x)\, dx$.

(p) $\int 2x^3 \arctan(x)\, dx$.

(q) $\int \tanh^{-1}(x) dx$.

2. Calcula las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\, dx$.

(b) $\int_1^e\ \cos(\ln x)\, dx$.

(c) $\int_0^1\ x^2 e^{4x}\, dx$.

(d) $\int_1^b\ x^2 \left(\ln x\right)^2\ dx$, con $b > 0$.

(e) $\int_1^{a^2}\ e^{\sqrt{x}}\, dx$.

(f) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\ dx$.

(g) $\int_0^a\ te^{-t/a}\, dt, \quad a > 0$.

3. (a) Utilizando la definición de la función $\tanh(x)$ demuestra que

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \text{ si } |x| < 1.$$

(b) Halla la derivada de la función $\tanh^{-1}(x)$.

(c) Halla una primitiva para la función $\tanh^{-1}(x)$.
Ayuda: integra por partes y usa el inciso (b).

4. (a) Si $f(x)$ es diferenciable, demuestra que

$$\int e^x \left[f(x) + f'(x)\right] dx = e^x f(x) + C.$$

(b) Determina $\int e^x \left[\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos x\right] dx$.

(c) Determina $\int e^x \left[\ln(\operatorname{sen} x) + \cot x\right] dx$.

5. Utilizando una integración por partes demuestra las siguientes fórmulas de reducción de grado:

(a)

$$\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\, dx, \text{ con } a \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(b)

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x)+\frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx, \quad n=1,2,3,\ldots$$

(c)

$$\int_0^1 (\ln x)^n\,dx = (-1)^n n!$$

(d)

$$\int (\ln x)^n\ dx = x\,(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\ dx.$$

6. Usa inducción y las fórmulas de reducción de grado para obtener:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\frac{\pi}{2},,\\ \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}.\end{aligned}$$

7. Demuestra que

$$\int_a^b \int_x^b f(t)dtdx = \int_a^b (x-a)\,f(x)dx.$$

8. (a) Demuestra que

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)dy, \quad \text{con } y = f^{-1}(x)\,.$$

(b) Utilizando el inciso anterior, determina: (i) $\int \cos^{-\mathbf{1}}(x)dx$, (ii) $\int \log_2(x)dx$.

(c) Usa una integración por partes para demostrar que

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$$

(d) Si f y g son funciones inversas, y si f' es continua, demuestra que

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy.$$

Sugerencia: usa el inciso anterior.

(e) Aplica el resultado del inciso anterior para evaluar

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \operatorname{sen}^{-1}(x)\,dx.$$

9. (a) Verifica que:

$$\int \cos^{-1}(x)\,dx = x\cos^{-1}(x) - \operatorname{sen}\left(\cos^{-1}(x)\right) + C.$$

(b) En general, prueba que:

$$\int f^{-1}(x)\ dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)\,dy, \quad \text{con } y = f^{-1}(x)\,.$$

10. Demuestra que

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)dy, \quad \text{con } y = f^{-1}(x)\,.$$

(a) Utilizando el inciso anterior, determina: (i) $\int \ln(x)dx$, (ii) $\int \log_2(x)dx$, (iii) $\int \cos^{-\mathbf{1}}(x)dx$, (iv) $\int \tan^{-\mathbf{1}}(x)dx$.

11. Usando el método de integración por partes demuestra que

$$\int f^{-1}(x)\ dx = xf^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d\,f^{-1}(x)}{dx}\right)dx.$$

12. Utiliza los métodos de los ejercicios 10 y 11 para determinar: (i) $\int \cos^{-\mathbf{1}}(x)dx$, (ii) $\int \tan^{-\mathbf{1}}(x)dx$. ¿Pueden ser correctos los resultados que se obtienen al aplicar cada uno de los dos métodos? Justifica.

13. Sea $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable, tal que

$$f''(x) = -\frac{3}{x^4}\cosh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^5}\operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'(1)=\cosh(1)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Demuestra que

$$f(x) = -\frac{1}{x}\operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right) + \cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$

3.2 Integrales trigonométricas

1. Determina las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\int \operatorname{sen}^5(x)\ dx$.
(b) $\int \operatorname{senh}^3(x)\cosh^2(x)\ dx$.
(c) $\int \tan^5(x)\sec^4(x)\ dx$.
(d) $\int \tan^3(x)\sec^5(x)\ dx$.
(e) $\int \sec^3(x)\ dx$.
(f) $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x)\ dx$.

(g) $\int \sec^3(x)\,dx$.

(h) $\int \sqrt{\sec^3(2x)}\;\tan^5(2x)\,dx$.

(i) $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta\;(\tan\theta-1)}\,d\theta$.

(j) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$.

(k) $\displaystyle\int \cos^2(nx)\,dx,\quad n\in\mathbb{N}$.

(l) $\int \cos^4(x)\;dx$.

(m) $\int \csc^3(x)\;dx$.

(n) $\int \operatorname{sen}^n(x)\cos^3(x)\;dx$.

(o) $\int\;\cos^4(kt)\operatorname{sen}^3(kt)\,dt$.

(p) $\int \cosh^3(x)\,\operatorname{senh}^2(x)\;\;dx$.

2. Calcula las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3(x)\,dx$.

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}\,dx$.

(c) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos(x)}$.

(d) $\int_0^{\pi/4}\;\tan^3(x)\,dx$ o $\int_{-\pi/4}^{0}\;\tan^3(x)\,dx$.

(e) $\int_{-\boldsymbol{\pi}/\mathbf{4}}^{\pi/4}\;\sqrt{1+\tan^2(x)}\,dx$.

(f) $\int_0^{\pi/2}\;\sqrt{\operatorname{sen}(x)}\cos^5(x)\,dx$.

(g) $\int_0^{\pi/4}\;\sqrt{\tan(x)}\sec^6(x)\,dx$.

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cot^3(2x)}{\sqrt[3]{\csc(2x)}}\,dx$.

3. Demuestra la siguiente fórmula de reducción para integrales trigonométricas:

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x)+\frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx,\quad n=1,2,3,\ldots$$

4. Obtén

$$\int \sec(x)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right| + C.$$

5. Usando la sustitución $u = \sec(x)$ demuestra que

$$\int \sec(x) dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C.$$

6. Demuestra que para $m, n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) dx = 0.$

   (b) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m. \end{cases}$

7. Si $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > 1$, demuestra que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\, dx = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n, \\ 0, & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

3.3 Sustituciones trigonométricas

1. Determina las siguientes integrales, mostrando el trabajo completo y detallado:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{21 + 4x - x^2}} dx.$

   (b) $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1}(x)\, dx.$

   (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}.$

   (d) $\int \sqrt{4x^2 + 4x + 10}\, dx.$ (Ayuda: completa el cuadrado.)

   (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 4}}.$

   (f) $\int \sqrt{2x^2 + 2x + 5} dx.$ (completa el cuadrado)

   (g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1}\, dx.$ $(u = \sqrt{2x+1})$

   (h) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 10)^{5/2}}\, dx.$

   (i) $\displaystyle\int \frac{2}{(x-1)\sqrt{x^2 - 3x + 2}}\, dx.$

   (j) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(4 - x^2)^{3/2}} dx.$

   (k) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}.$

   (l) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{x-9}}\, dx.$ Sugerencia: $u = \sqrt{x - 9}.$

(m) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx.$

(n) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

(o) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}}dx.$

(p) $\int x \operatorname{sen}^{-1}(x)\, dx.$

(q) $\int x^2 \tan^{-1}(x)\, dx.$

(r) $\int \sqrt{e^{2x}-4}\, dx.$

(s) $\int \sqrt{4-x^2}dx.$

(t) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}\, dx.$

(u) $\int x^3\sqrt{x^2+9}\, dx.$

(v) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$

(w) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+4)^{3/2}}\, dx.$

2. Calcula las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx.$

(b) $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\, dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\, dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}.$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\, dx.$

(e) $\displaystyle\int_8^9 \sqrt{\frac{x}{x-4}}\, dx.$ Sugerencia: $u=\sqrt{x-4}$.

(f) $\int_0^1 \sqrt{1+e^{2t}}\, dt.$

(g) $\displaystyle\int_0^{a/\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,\ a>0.$

(h) $\displaystyle\int_{a^2/3}^{3a^2} \frac{dx}{\sqrt{x\,(a^2+x)}},\ a\neq 0.$

(i) $\displaystyle\int_{a^2/3}^{3a^2} \sqrt{\frac{a^2+x}{x}}dx,\ a\neq 0.$

(j) $\displaystyle\int_{a^2/3}^{3a^2} \sqrt{x\left(a^2+x\right)}dx,\ a \neq 0.$

(k) $\displaystyle\int_{a^2/3}^{3a^2} \sqrt{\frac{x}{a^2+x}}dx,\ a \neq 0.$

3. Determina: a) $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$

4. Calcula el siguiente límite

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{3}}{n} \frac{1}{\sqrt{9c_k^2+1}},$$

en donde $P = \left\{x_0 = 0, x_1, \ldots, x_n = \sqrt{3}\right\}$ y c_k es un punto cualquiera del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, para $k = 0, \ldots, n$.

5. Usa sustitución trigonométrica para obtener

$$\int \sqrt{a-bx^2}dx = \frac{x\sqrt{a-bx^2}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right) + C, \quad 0 < b < a.$$

6. Usa una sustitución trigonométrica para demostrar que

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a \neq 0.$$

7. Usa una sustitución trigonométrica para resolver

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx.$$

3.4 Fracciones parciales

1. Muestra todo tu trabajo para determinar las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{4x-2}{3(x^2-2x+1)}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x^3}.$

(c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^3-8x}\,dx.$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2-2x}.$

(e) $\displaystyle\int \frac{3x^3-3x^2+5x+3}{1-x^4}\,dx.$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx.$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^3+2x}\,dx.$

(h) $\displaystyle\int \frac{5+x^3}{x^2-x^3}\,dx.$

(i) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx.$

(j) $\displaystyle\int \frac{x^4}{1-x^2}\,dx.$

(k) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx.$

(l) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-2}{x^3+2x}\,dx.$

(m) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left[16-\ln^2 x\right]}.$

(n) $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx.$

(o) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{-x}-e^x}dx.$

(p) $\displaystyle\int \frac{xe^{x^2}}{9-e^{2x^2}}dx.$

(q) $\displaystyle\int \frac{x^{1/2}}{4-x^3}dx.$

2. Obtén una primitiva F de la función

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{1-e^x},$$

definida en el intervalo $(0,\infty)$ y tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$. Usa la sustitución $u=e^x$.

3. Determina:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$

(b) $\displaystyle\int \frac{2-x+x^2-x^3}{(x^2+1)^2}dx.$ Usa el resultado del inciso anterior.

4. Usando el cambio de variable indicado, determina la primitiva de cada una de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad u = \cosh x.$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)}, \quad u = \cos x.$

5. Usa fracciones parciales para obtener

$$\int \frac{dx}{ax(bx+c)}, \quad a,b,c>0.$$

   Ahora obtén

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{dx}{ax(bx+c)}.$$

6. Determina

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-e^{x}}. \text{ (Cambia variables y usa fracciones parciales).}$$

   Ahora obtén

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{dx}{e^{2x}-e^{x}}.$$

7. Sea $u = u(t)$ una población de personas que conocen un chisme al tiempo $t > 0$. Si $r > 0$ es la razón constante a la cual el chisme se propaga y $K > 0$ es la población total en una determinada región, entonces se tiene que la razón instantánea de propagación del chisme satisface la ecuación

$$\frac{du}{dt} = ru\left(1-\frac{u}{K}\right).$$

   (a) Si $u(0) = u_0$, $0 < u_0 < K$, por medio del teorema de la función inversa encuentra el tiempo t como función de u.

   (b) A partir del inciso anterior, encuentra la población u como función de t y demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} u(t) = K.$$

3.5 Integrales impropias

1. Evalúa la integral impropia o muestra que diverge:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x} dx.$

   (b) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{10}+x}.$ (Sugerencia: $x^{10}+x = x^{10}\left(1+x^{-9}\right)$.)

(c) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx.$

(d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2x}{1+x^4} dx.$

(e) $\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(x)\ dx.$

(f) $\int_{-\infty}^{0} xe^{2x}\ dx.$

(g) $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx.$

(h) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}} dx.$

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx.$

(j) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+5x)}.$

(k) $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}.$

(l) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x+3)(x+1)^2}.$

(m) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$

(n) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3-1}.$

(o) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{a^2e^{-x}}{a-e^x}\, dx,\ a>1.$

(p) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{2x}}.$

(q) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{4-e^{2x}} dx.$

(r) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x-2|}\, dx.$

(s) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, e^{-x^2} dx.$

(t) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(2\,|x|+1)^2} dx.$

(u) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+a^2}\, dx.$

2. Evalúa la integral impropia o muestra que diverge:

   (a) $\int_0^1 x\ln(x)dx$.

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\operatorname{sen}(x)}$.

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx$.

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4r}{\sqrt{1-r^4}}dr$.

   (e) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(-x)}}$.

   (f) $\displaystyle\int_1^{\cosh(t)} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$, $t \geq 0$.

   (g) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}}$, $\quad a < b$ dados.

   (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$.

   (i) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$. Primero usa una sustitución trigonométrica.

   (j) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$. (Completa cuadrados.)

   (k) $\displaystyle\int_{1/2}^3 \frac{dt}{\sqrt{-3+4t-t^2}}$. (Completa cuadrados.)

   (l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x-1}dx$.

   (m) $\displaystyle\int_{-4}^2 \frac{dx}{(4+2x)^3}$.

   (n) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{4-x^2}$.

   (o) $\displaystyle\int_{1/e}^e \frac{dx}{x(\ln x)^3}$.

   (p) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$.

3. Evalúa la integral impropia o muestra que diverge:

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

   (b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$.

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}}dx$.

4. Deduce cuál debe ser el valor de la constante A para el cual converge la siguente integral impropia. ¿A qué converge la integral?:

$$\int_2^\infty \left(\frac{x}{2x^2+1} - \frac{A}{x+1}\right) dx.$$

5. Encuentra el valor de A para el cual la siguiente integral converge:

$$\int_2^\infty \left(\frac{x}{2x^2+A} - \frac{A}{x+1}\right) dx.$$

6. (a) Demuestra que

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{2x}} = \ln(1+e^x) - x - e^{-x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

   No derives ambos lados. Deduce por integración.

   (b) Usando el inciso (a) Calcula $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{e^x+e^{2x}}$ o justifica si la integral diverge.

7. Calcula $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$.

   Sugerencia: Escribe la integral como la suma de dos integrales impropias:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}.$$

8. ¿Para qué valores de p converge $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^p}$? ¿$\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$?

9. Determina los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} \operatorname{sen}(t)\,dt$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos(t)}{t^2}dt$.

10. Demuestra que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ converge y luego calcula la integral. Sugerencia: Usa la sustitución $x = \dfrac{1}{y}$.

11. (a) Usando la sustitución $u = e^x$, demuestra que

$$\int \frac{4e^{-x}}{2-e^x}dx = \ln e^x - 2e^{-x} - \ln|2-e^x| + C.$$

(b) Utiliza el inciso anterior para calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{4e^{-x}}{2-e^x}dx$.

12. La transformada de Laplace de una función $f(x)$ es la función $Lf(s)$ de la variable s definida mediante la integral impropia (si ésta converge):

$$Lf(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx.$$

(a) Prueba que si $f(x) = C$, con C una constante, entonces $Lf(s) = \dfrac{C}{s}$ para $s > 0$.

(b) Prueba que si $f(x) = \operatorname{sen}(\alpha x)$, con α una constante, entonces $Lf(s) = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$.

(c) Calcula $Lf(s)$, si $f(x) = e^{\alpha x}$ y $s > \alpha$.

13. Utiliza algún criterio de convergencia para determinar si la integral impropia converge o diverge:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x^2+1}{x^4+2x+1}\,dx$.

(b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}dx$.

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^{1/2}}dx$.

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{e^{3x}-e^{-3x}}$.

(e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x+e^{2x}}$.

(f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{e^{2x}-1}dx$.

(g) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-e^{-x}}\,dx$.

(h) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+e^{3x}}$.

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{x^2}\,dx.$

(j) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{3+\operatorname{sen}(x)}}{x^2}\,dx.$

(k) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{(3x+1)\cos(x)}{x^3-x}\,dx.$

(l) $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x)\,dx.$

(m) $\int_1^\infty \sqrt{1+e^{-x}}dx.$

(n) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx.$

(o) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{(1+x)\ln x}.$

(p) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{\ln(x^3)-1}\,dx.$

(q) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^{3/2}}dx.$

(r) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cot^{-1} x}{x^2}\,dx.$

(s) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}(x)}{x(1+x^2)}\,dx.$

(t) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} x}{1+x^4}\,dx.$

(u) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tanh(x)}{x^3+x}\,dx.$

(v) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\arctan(x)}\,dx.$

(w) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$

14. Utiliza algún criterio de convergencia para determinar si la integral impropia converge o diverge:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{4}{(2|x|+1)^2}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}.$

15. Utiliza algún criterio de convergencia para determinar si la integral impropia converge o diverge:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^4}}\, dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{x^2}\, dx.$

(d) $\displaystyle\int_0^1 e^{1/x}\, dx.$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}\, dx.$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{3+\operatorname{sen}(x)}}{x^2} dx.$

(h) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x\operatorname{sen}(x)}.$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sec(x)}.$

(j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^{3/2}} dx.$

(k) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{t}+\operatorname{sen}(t)}.$

(l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\, dx.$

(m) $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{\sqrt{x}}\, dx.$

(n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^{1/2}} dx.$

(o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx.$

(p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tanh(x)}{x+\sqrt{x}}\, dx.$

16. Utiliza algún criterio de convergencia para determinar si la integral impropia converge o diverge:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\text{sen}(x)|}{x^{3/2}}\, dx.$

(b) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{\ln x}{(x-3)^4}\, dx.$

(c) $\displaystyle\int_{-5}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+5}}.$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx.$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}.$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}.$

(g)

(h) Demuestra que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}+1}\, dx$ converge.

(i) Encuentra la inversa de $\dfrac{1}{x^{3/2}+1}$ para demostrar que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}+1}\, dx = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{2/3} dx.$$

17. Por medio de la sustitución $y = x^2$ muestra que es convergente la integral

$$I = \int_\alpha^\beta \text{sen}(x^2)\, dx, \text{ en donde } \alpha \longrightarrow 0 \text{ y } \beta \longrightarrow \infty.$$

4 Aplicaciones de la integral

4.1 Cálculo de áreas

1. Calcula el área de la región entre la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo dado:

(a) $y = (1-x)^{1/3}, \ -7 \leq x \leq 2.$

(b) $y = x\sqrt{4-x^2}, \ -2 \leq x \leq \sqrt{2}.$

(c) $y = \sqrt{x^2+4}, \ 0 \leq x \leq 2.$

(d) $y = x \ln x, \ \dfrac{1}{e} \leq x \leq e.$ Simplifica la respuesta.

(e) $y = \ln x, \ 1/e \leq x \leq e.$

(f) $y = \ln(x-1)$, $3/2 \le x \le e+1$.

(g) $y = xe^{-ax}$, $-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}$.

(h) $y = (x-2)\, e^{-x/2}$, $0 \le x \le 4$.

(i) $y = \operatorname{sen} x \sqrt{1-\cos x}$, $-\pi \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

(j) $y = \operatorname{sen}^{-1}(x)$, $-\dfrac{1}{2} \le x \le 0$.

(k) $y = xe^{ax}$, $-\infty < x \le 0$.

2. Sea $f(x) = xe^{x/a}$, $a > 0$.

   (a) Encuentra $\displaystyle\lim_{x\to(-\infty)} f(x)$.

   (b) Calcula el área de la región entre la curva $y = xe^{x/a}$ y el eje x en el intervalo $-a \le x \le a$.

3. Sea $f(x) = \tanh^{-1}(x)$.

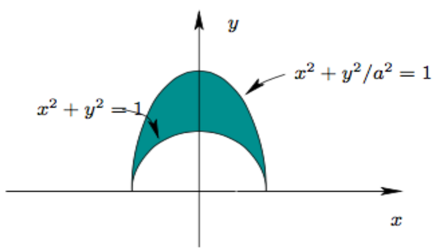
   (a) Encuentra $\displaystyle\lim_{x\to(-\infty)} f(x)$.

   (b) Calcula el área de la región entre la curva $y = \tanh^{-1}(x)$ y el eje x en el intervalo $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$.

4. Calcula $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ y aprovecha el resultado para justificar que el área del círculo unitario es igual a π.

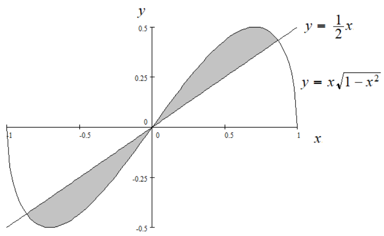
5. Demuestra que el área A encerrada por una elipse con semiejes $a > 0$ y $b > 0$ es $A = \pi ab$. (Sugerencia: considera el área acotada por la elipse en el primer cuadrante.)

6. Indica y calcula la integral que representa el área de la parte sombreada en la figura de abajo, en donde $a \in [1, \infty)$. ¿Para qué valor de a el área es igual a π?



7. Calcular el área limitada por las curvas $y = \dfrac{1}{x}$ y $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ en el intervalo $x \in [1, \infty)$.

8. Calcula el área que encierran la curva $y = x\sqrt{1-x^2}$ y la recta $y = \dfrac{1}{2}x$.



9. Calcula el área de la región acotada entre las curvas dadas y dibuja la región:

   (a) $y = 0$ y $y = x\left(x^2 - 1\right)$.
   (b) $y = 4 - x^2$ y $y = 2 - x$.
   (c) $y = x^2 - 1$ y $y = x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 + 1$.
   (d) $y = \sqrt{|x|}$ y $5y = x + 6$.
   (e) $y^2 = 4x$ y $4x - 3y - 4 = 0$.
   (f) $x = y^2$ y $y = x^3$.
   (g) $x = y^2 - y$ y $x = y - y^2$.

10. Determina el área de la región acotada por las curvas dadas: a) integrando con respecto a x, b) integrando con respecto a y. Dibuja la región.

    (a) $y^2 = 1 - x$ y $2y = x + 2$.
    (b) $y^2 = x + 1$ y la recta $x + y = 1$.

11. Determina el área de la región en el primer cuadrante limitada por arriba por $y = \sqrt{x}$, y por abajo por el eje x y por la recta $y = x - 2$.

12. Sea D la región acotada por la porción de la corona circular $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, con $0 < a < b$, perteneciente a los cuadrantes impares y comprendida entre las rectas $x = 0$ e $y = x$.

    (a) Haz un esbozo de la región D.
    (b) Representa, en términos de integrales definidas, el área de D.

13. Un espejo plano de dimensiones 80 cm y 90 cm, se rompe por una esquina según una recta. De los dos trozos que quedan, el menor es un triángulo de catetos 10 cm y 12 cm, correspondientes a las dimensiones menor y mayor del espejo respectivamente. Hallar el área máxima del espejo rectangular que se puede obtener con el trozo mayor.

4.2 Longitud de curvas

1. Calcula la longitud de las siguientes curvas en el intervalo dado:

   (a) $y = \ln(x), \ \ 1 \le x \le 2.$

   (b) $y = 2\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right), \ \ 0 \ \le \ x \le \ \frac{\pi}{3}.$

   (c) $y = f(x)$, con $f(x) = \int_0^x \sqrt{e^{3t}-1}\,dt, \ \ 0 \le x \le \ln 2.$

   (d) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}, \ \ 0 \le x \le 2.$ (Sugerencia: Integra con respecto a y.)

   (e) $y = -\dfrac{1}{4x} - \dfrac{x^3}{3}, \ \ 1 \le x \le 3.$

   (f) $y = \sqrt{25-x^2}$, $[0,5]$.

   (g) $y = f(x)$, con $f(x) = \dfrac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2} + 1$, $x \in [4,9]$.

   (h) $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$.

   (i) $y = \cosh x$, $0 \le x \le \ln 2$.

   (j) $y = e^x$, $\ln\sqrt{a} \le x \le \ln\sqrt{b}$, $0 < a < b$.

   (k) $y = f(x)$, con $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$, $[2,3]$.

   (l) $y = f(x)$, con $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t+3}\ dt$, en $[0,1]$.

   (m) $y = f(x)$, con $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{16t^2-1}{8t}dt$, $x \ge 1$, $1 \le x \le 2$.

   (n) $y = f(x)$, con $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt$, $x \ge 1$, $1 \le x \le 2$.

   (o) $y = f(x)$, tal que $f'(x) = \sqrt{\dfrac{2-x^2}{x^2-1}}$, en $\cosh a \le x \le \cosh b, \ \ a < b$.

2. (a) Determina $\int \sec^3 x\,dx$.

   (b) Encuentra la longitud del arco de parábola $y^2 = x$ de $(0,0)$ al punto $(1,1)$. Sugerencia: integra con respecto a y.

3. Obtén una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ suave, tal que $f(0) = 0$ y tal que la longitud de su gráfica entre 0 y 1 sea $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^x}{4}}dx$.

4. Debido a la fuerza de gravedad en la Tierra, un cable unido por los extremos a dos postes forma una curva llamada *catenaria*, la cual está descrita por $y = \alpha\cosh\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$, en donde 2α es la distancia que separa ambos postes. Calcula la longitud del cable.

4.3 Cálculo de volúmenes

1. Calcula el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje y la región acotada por $x = \sqrt{5}y^2$, $x = 0$, $y = 1$, $y = -1$.

2. Calcula el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje x la región acotada por $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 3$. Simplifica la respuesta.

3. Calcula el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje x la región acotada por $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 2$. Simplifica la respuesta.

4. Calcula el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje x la región acotada por $y = \sqrt{x}e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 2$. Simplifica la respuesta.

5. Calcula el volumen del sólido que se genera al girar alrededor de la recta $y = \sqrt{2}$ la región en el primer cuadrante acotada en la parte superior por la recta $y = \sqrt{2}$, en la parte inferior por la curva $y = \sec(x)\tan(x)$, y a la izquierda por el eje y.

6. Sea R la región acotada por $y = e^x$, $x = 0$, $y = 2$. Plantea (no calcules) una integral para obtener el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor de: a) el eje x, b) el eje y, c) la recta $y = 3$, d) la recta $x = \ln 2$.

7. Sea R la región acotada por $y = e^x$, $x = 0$, $y = 2$. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor de: a) el eje x, b) el eje y, c) la recta $y = 3$, d) la recta $x = \ln 2$.

8. Determina el volumen del sólido de revolución S obtenido al girar la región entre las gráficas de $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = e^x$ alrededor del eje x en el intervalo $0 \leq x \leq \ln 4$. Ilustra.

9. Calcula el volumen del sólido que se genera al girar alrededor de la recta $y = -1$ la región en el primer cuadrante limitada por las curvas $y = \tan x$ y $y = 1$.

10. Determina el volumen del sólido de revolución S obtenido al girar la región entre las gráficas de $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ alrededor del eje de rotación $(y = 0)$ entre $x = 0$ y $x = \ln(a)$. Ilustra.

11. Determina el volumen del sólido de revolución S obtenido al girar alrededor del eje x la región del primer cuadrante entre las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}e^{-ax^2}$ y $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

12. Determina el volumen del sólido de revolución S obtenido al girar alrededor del eje x la región del primer cuadrante entre las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}e^{-ax}$ y $x = \ln a$. Simplifica la respuesta.

13. Calcula el volumen del sólido de revolución que genera la región limitada por la gráfica de $y = \tan(x)$ y las rectas $x = 0$, $y = 1$, al girar alrededor del eje x.

14. Determina el volumen del sólido de revolución que se forma cuando la región
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq \ln(x),\, 1 \leq x \leq e\}$$
gira alrededor del eje x, usando el método de discos.

15. Determina el volumen del sólido formado cuando la región comprendida entre la curva $y = -x^2 + 2x + 1$ y la recta $y = x - 1$ gira alrededor de la recta $y = -2$, aplicando el método de las arandelas.

16. Determina el volumen del sólido cuya base es un disco de radio r y cuyas secciones transversales, perpendiculares al eje x, son triángulos equiláteros.

17. Determina el volumen del sólido cuya base es la región entre la curva $y = 2\sqrt{\operatorname{sen}(x)}$ y el intervalo $[0, \pi]$ en el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros verticales, cuyas bases van del eje x a la curva.

18. Calcula el volumen del sólido generado al girar la región comprendida entre las parábolas $x = y^2 + 1$ y $x = 3 - y^2$ alrededor del eje y, aplicando el método de cascarones cilíndricos.

5 Sucesiones y series

5.1 Aproximación polinomial y teorema de Taylor. Residuo y estimación del error de aproximación

1. Obtén el polinomio de Taylor de grado n para las siguientes funciones $f(x)$ en x_0:

   (a) $f(x) = \operatorname{senh}(x), \ \ x_0 = 0.$

   (b) $f(x) = x^2 - x - 2, \ \ x_0 = -1.$

   (c) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x - 1, \ \ x_0 = 2.$

   (d) $f(x) = \ln(x),\ x_0 = 1.$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}, \ \ x_0 = 0.$

   (f) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \ \ x_0 = 1.$

   (g) $f(x) = \sqrt{x+4}, \ \ x_0 = 0.$

2. Obtén el polinomio de Taylor de grado 2 para las siguientes funciones $f(x)$ en x_0:

   (a) $f(x) = 3 + \int_2^{2x} e^{t^2-4}\, dt, \;\; x_0 = 1.$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } \; x \neq 0 \\ 1 & \text{si } \; x = 0. \end{cases}, \;\; x_0 = 0.$

3. Halla $P_{1,0}(x)$ para $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & \text{si } \; x \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } \; x = 0. \end{cases}$

4. A partir del polinomio de Taylor de grado n para e^x en $x_0 = 0$ determina el polinomio de Taylor de grado 3 de las siguientes funciones en $x_0 = 0$:

   (a) $f(x) = e^{-2x}$.

   (b) $g(x) = e^{-x^2}$.

   (c) $h(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

5. Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 para $f(x)$ en x_0:

   (a) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$, en $x_0 = 0$.

   (b) $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt, \;\; x_0 = 0.$

6. Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 para $f(x) = \tan^{-1}(x)$ en $x_0 = 0$, y úsalo para aproximar el valor de $\pi/4$.

7. (a) Demuestra que si $|x|$ es pequeño y $0 < \alpha \leq 1$, entonces

$$(x+1)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2.$$

   (b) Usa esta aproximación para estimar $\sqrt{1.4}$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^5(\mathbb{R})$ con polinomio de Taylor de grado 5 en $x_0 = 1$ dado por

$$P_{5,1}(x) = \frac{1}{2} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

   Determina $f^{(k)}(1)$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$, e indica justificando si f tiene o no un extremo local en el punto 1.

9. Aproxima el valor de $e^{1/2}$ con un error menor que 0.001.

10. Determina la exactitud de la aproximación

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

   sobre el intervalo $[-1, 1]$.

11. (a) Determina el polinomio de Taylor de orden 3, $P_3(x)$, generado por $f(x) = \dfrac{2}{x}$ en el punto $x_0 = 2$.

    (b) Usando el Teorema de Taylor estima el error cometido al utilizar P_3 para aproximar el valor de $\dfrac{2}{2.2}$.

12. Usando el teorema de Taylor, demuestra que
$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| < \frac{1}{6}, \quad \forall x \in [0,1].$$

13. Demuestra que $\left|\operatorname{sen}(x) - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)\right| \leq \dfrac{|x|^5}{120}$.

14. Usa un polinomio de Taylor para aproximar $e^{0.1}$ con un error menor que $\dfrac{1}{10^4}$.

15. Utiliza el polinomio de Taylor y teorema del residuo para aproximar $\ln(5/4)$ con un error menor a 0.01.

16. Encuentra la expresión del residuo de la función $f(x) = \ln(1+x)$ para grado 3. Con esta estimación, acota el error que se comete al aproximar $f(0.2)$ por $P_3(0.2)$.

17. Sea $T_n(x)$ el n-ésimo polinomio de McLaurin de $f(x) = \cos x$. Encuentra el valor de n para el cual
$$|\cos 0.2 - T_n(0.2)| < 10^{-5}.$$

18. Aproxima el valor de $\sqrt[3]{e^2}$ con un error menor a 0.001.

19. Aproxima la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ mediante un polinomio de grado 3. Utiliza dicho polinomio para aproximar $\frac{1}{\sqrt{1.2}}$. Da la cota del error cometido.

20. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función con segunda derivada continua en $\mathbb{R}^+$, tal que $f'(1) = 0$ y $f''(1) = -2$. Sea $\phi(x) = f(e^x)$.

    (a) Calcula $\phi'(0)$ y $\phi''(0)$. ¿Podrá garantizarse que ϕ admite un extremo local en $x = 0$? ¿Máximo o mínimo?

    (b) Escribe la fórmula de Taylor para la función ϕ en $x_0 = 0$ con residuo de orden 1, y utilízala para calcular
$$\lim_{x \to 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^2}.$$

21. Sea $I \in \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $f \in C^2(I)$. Usa la fórmula de Taylor para demostrar que, para cualquier $a \in I$,
$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

5.2 Sucesiones. Propiedades de convergencia. Criterio del cociente y de la raíz

1. Calcula el límite de cada sucesión $\{a_n\}$ o justifica si ésta diverge:

   (a) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$.

   (b) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$.

   (c) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

   (d) $a_n = nr^n$, si $|r|<1$ es fijo.

   (e) $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n$.

   (f) $a_n = \dfrac{(-1)^n+1}{n}$.

   (g) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$.

   (h) $a_n = (\ln n)^{1/n}$. Sugerencia: $1 \leq \ln n \leq n$, para $n \geq 3$.

   (i) $a_n = (p(n))^{1/n}$, en donde $p(x) = b_0 + b_1 x^1 + \ldots + b_m x^m$ es un polinomio de grado m y $b_0, b_1, \ldots, b_m$, son reales positivos fijos.

   (j) $a_n = \dfrac{5^n}{n!}$.

   (k) $a_n = n^2 e^{-n}$.

   (l) $a_n = \dfrac{\tan^{-1}(n^2)}{\ln(1+n)}$.

   (m) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

   (n) $a_n = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)$.

   (o) $a_n = \dfrac{\ln(n)}{n^{1/n}}$.

   (p) $a_n = \left(1+\dfrac{7}{n}\right)^n$.

   (q) $a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{senh}(\ln n)}{n}$.

   (r) $a_n = \left(\dfrac{x^n}{2n+1}\right)^{1/n}$, $x>0$.

2. Usa la prueba del cociente o la prueba de la raíz n-ésima para sucesiones para estudiar la naturaleza de las siguientes sucesiones $\{a_n\}$:

   (a) $a_n = n^5 e^{-n}$.

   (b) $a_n = \dfrac{5^n}{n!}$.

   (c) $a_n = \dfrac{n!\, n!}{(2n)!}$.

3. Sea $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. ¿Qué puedes concluir sobre el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$? Justifica.

4. Sea $\{b_n\}$ una sucesión y considera $a_n = b_n - b_{n-1}$. Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\{b_n\}$ converge.

5. Demuestra que:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\alpha^n)^{1/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \alpha & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b)$, $a, b > 0$.

6. Muestra que si $a_n = \dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{n^2}{n^3}$, entonces a_n es una suma de Riemann para $\int_0^1 x^2\, dx$ para $n \geq 1$. Encuentra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

7. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, si $a_n = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$.

   Sugerencia: $a_n = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln\frac{n!}{n^n}}$ e identifica el exponente de e como una suma de Riemann.

8. Sea $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n\, dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Demuestra que $I_n = (-1)^n\, n!$ Sugerencia: integra por partes y calcula la integral impropia usando la regla de L'Hopital.

9. Demuestra que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n!}{(2n)!} = 0.$$
   Sugerencia: $\dfrac{n!\, n!}{(2n)!} = \prod\limits_{j=1}^{n} \left(\dfrac{j}{n+j}\right)$. Nota que $\dfrac{j}{n+j} \leq \dfrac{1}{2}$ $\forall j = 1, \ldots, n$.

10. Define $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$

    (a) Demuestra por inducción que
    $$x_n < x_{n+1} < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

    (b) Demuestra que $\lim_{n \to \infty} x_n = 2$.

11. Demuestra que toda sucesión convergente está acotada.

12. Prueba rigurosamente (ε y N) que
    $$\lim_{n \to \infty} \frac{4n^2}{1 + n^2} = 4.$$

13. Sean la función $f(x) = x^p(1 - x)^q$, con $p, q > 0$, y la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por
    $$a_n = \int_0^1 [f(x)]^n \, dx.$$
    Usando la definición de convergencia, prueba que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Ayuda: encuentra una cota adecuada.

5.3 Series

1. Calcula el valor de la serie o justifica si ésta diverge:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3^\pi}{\pi^3} \right)^n$.

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{2n-1}}$.

    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}}$.

    (d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \, (1 - \rho)^k, \;\; 0 < \rho < 1$.

    (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^{k+1}}{2\,(5^{k+2})}$.

    (f) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k + 1}{4^{k+1}}$.

    (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} + 3^{n+1}}{6^n}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-2)^n - 5^{n+1}}{8^{n+1}}$.

2. (a) ¿Para qué valores de $r \in \mathbb{R}$ se tiene la siguiente igualdad?

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}, \qquad r > 0.$$

(b) Califica el razonamiento, si está bien o está mal, ¿por qué?

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0.$$

3. Utiliza series convergentes para escribir como cociente de dos enteros al número $x = 0.\overline{27}$.

4. Con ayuda de la serie geométrica encuentra un valor fraccionario para $x = 0.7314040404\ldots$

5. Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$.

   a) Escribe a_n como fracciones parciales.
   b) Escribe una fórmula para la sucesión de sumas parciales y calcula su límite.
   c) Si la serie converge, ¿cuál es su suma?

6. Calcula el valor de la serie o justifica si ésta diverge:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$. Sugerencia: usa propiedades del logaritmo.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right]$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Usa fracciones parciales.

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2-1}$. Usa fracciones parciales.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$.

Sugerencia: $\displaystyle\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[\arctan(n+2)-\arctan(n)\right]$

5.4 Criterios de convergencia de series con términos no negativos

1. Analiza si las siguientes series convergen o divergen. En cada caso especifica qué criterio usas y verifica que éste sea aplicable:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n}}{n}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{1/n}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3!\;n!\;3^n}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+1}\right)^{n/2}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\,n!}{(2n)!}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{1/n}$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sech}(n)$.

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}(1/n)$.

(o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$.

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/2}$.

(r) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n n! n!}{(3n)!}$.

2. Analiza si las siguientes series convergen o divergen. En cada caso especifica qué criterio usas y verifica que éste sea aplicable:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\ln n)^3}{n^2}$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(e^2 + \frac{1}{n}\right)\right)^{n+1}$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{n}}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!\,n!\,3^n}$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2n+3n^2}{4n^3+5n^4}$.

   (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$.

   (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^n}$. (¡pide calcular!)

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5^n}{n+6^n}$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+n}{n!}$.

(m) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}\ln(n)}$.

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{n}}$.

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$.

(p) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln^4 n}$.

3. Analiza si las siguientes series convergen o divergen. En cada caso especifica qué criterio usas y verifica que éste sea aplicable:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n - 1\right]$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} - \sqrt[n]{n}\right)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!\; n!\; 3^n}$.

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!]^3}{2^{6n}\,(n!)^6}$.

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2+2)^2}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3}$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^{2/n}$.

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$.

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

(q) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4+1}$.

4. Determina qué valores de $p > 0$ hacen convergente a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ y compruébalo. Sugerencia: usa la prueba de la comparación de límites (cociente) con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

5. Determina si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n}+1}$ es convergente o no. (Como extra podría pedirse una cota, dado que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^t}{e^{2t}+1}dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n}+1} \leq \int_0^{\infty} \frac{e^t}{e^{2t}+1}dt$.)

6. Considera la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con

$$a_n = \begin{cases} 1/n^n, & \text{con } n \text{ impar}, \\ 1/(2n)^{2n}, & \text{con } n \text{ par}. \end{cases}$$

Muestra que la prueba de la razón es inconclusiva. Asimismo, muestra por la prueba de la raíz que la serie es convergente.

5.5 Series alternantes. Convergencia absoluta y condicional

1. Analiza si las siguientes series convergen o divergen. En cada caso especifica qué criterio usas y verifica que éste sea aplicable:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^{n+1}}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan(n)}{n^2+1}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,n\,\mathrm{sen}\,(1/n)$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,n\,e^{-n^2}$.

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+n}\,-n\right)$. (Racionaliza)

   (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\ln n}{\ln n^3}\right)^n$.

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt[n]{3}$.

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\mathrm{sech}(n)$.

   (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. Analiza si las siguientes series convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{sen}(n)}{n^2}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{3+n}{5+n}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^n}$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3}$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n-1}$.

(m) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n-2)}$.

(n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,e^{-n}$.

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n^4}{n^3+1}$.

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n^{\alpha}+(-1)^n}$, con $\alpha\in\mathbb{R}$.

(q) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

(r) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{2^n}$.

3. Determina para qué valores de α son absolutamente convergentes o divergentes las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \operatorname{sen}\alpha)^n$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^\alpha + 1}$.

4. Supón que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge absolutamente. Prueba que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (c_n)^2$ converge. (Sugerencia: como $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$, existe N tal que $|c_N| < 1$ para todo $n \geq N$. Entonces $(c_n)^2 < |c_n|$ para todo $n \geq N$.)

5.6 Series de potencias. Radio e intervalo de convergencia

1. Encuentra el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{\pi^{n+2}}\, x^{n+3}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x+2)^n}{4^n(2n)}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n$.

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{3^n(2n)}$.

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(3^{n+2})} x^{n+1}$.

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(n+1)(n+2)}$.

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+3)^n}{n\, 2^n}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+3)^n}{2^n\sqrt{n}}$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(2x-3)^n}{4^n(n^2+1)}$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n}\left(\tfrac{x}{4}\right)^n$

(m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$.

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n)\,(x-1)^n$.

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n2^n}$.

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}}\,(x+2)^n$.

(r) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n\;(n+1)}$.

(s) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$.

(t) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$.

(u) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}\,x^n$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(3^{n+2})}\,x^{n+1}$.

(w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$.

2. Sea I el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ para los cuales es convergente la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-4x)^n}{n(n+1)}.$$
Demuestra que I es un intervalo. Indica, justificando, la naturaleza de la serie en cada uno de los extremos de ese intervalo y, en caso de convergencia, calcula la suma de la serie correspondiente.

3. Determina el dominio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n}\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

indicando los puntos donde la convergencia es simple o absoluta.

4. Considera la serie potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+a)^{n+1}}$, con $a > 0$. Determina a de modo que el radio de convergencia de la serie sea igual 3.

5. (a) Determina el radio de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$.

   (b) Utilizando el inciso anterior, calcula $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2\, 3^n}{(2n)!}$.

6. Determina el valor exacto de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

   Sugerencia: Deriva término a término la serie

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

7. Considerando que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{x=0}^{\infty} x^n$$

   (a) Encuentra una representación en serie de potencias para la función $f(x) = \ln(1+x)$.
   (b) Usa el resultado anterior para dar una representación en serie de potencias para la función $g(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)dt$.
   (c) Calcula el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie obtenida en el inciso (b).

8. Dada la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

   estudiar su carácter y calcular su suma usando una función conocida.

9. Construye una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ tal que su intervalo de convergencia sea $[6,10)$. Sugerencia: Considera $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-0)^n}{n}$ y cambia variables.

5.7 Series de Taylor

1. Encuentra la serie de Taylor en x_0 y el intervalo de convergencia para $f(x)$:

   (a) $f(x) = e^{-x/2}, \;\; x_0 = 0.$

   (b) $f(x) = sen\Big(\dfrac{\pi x}{2}\Big), \;\; x_0 = 0.$

   (c) $f(x) = \operatorname{senh}(x), \;\; x_0 = 0.$

   (d) $f(x) = \tan^{-1}(x), \;\; x_0 = 0.$

   (e) $f(x) = \cosh(x), \;\; x_0 = 0.$

2. ¿Qué función tiene como serie de Taylor $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n$? ¿Para qué valores de x es válido este desarrollo?

3. Calcula sin L'Hopital (usa series de Taylor):

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3}.$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^4} - \frac{\cos(x)}{x^2}\right).$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}(x) - x - (x^3/3)}{x^4}.$

4. La serie de Taylor generada por $f(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = 0$ es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. A partir de esta información:

   (a) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en $x_0 = 0$.

   (b) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = x\ln(1+x^2)$ en $x_0 = 0$.

5. La serie de Taylor generada por $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. A partir de esta información:

   (a) Calcula $1 + \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} + \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \dfrac{(\ln 2)^4}{4!} + \ldots$

   (b) Encuentra la serie de Taylor generada por $g(x) = e^{-2x^2}$ en $x_0 = 0$.

   (c) Demuestra que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = 1$, con $\lambda > 0$ una constante.

6. Utiliza operaciones con series de potencias para determinar la serie de Taylor de la función $f(x) = x^2 e^{3x}$ alrededor de $x_0 = 0$.

7. Considera la integral $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)dx$.

   (a) Expresa la integral como una serie infinita.

   (b) Determina el valor de la integral con un error menor que 10^{-4}.

8. (a) Encuentra la serie de Maclaurin para $f(x) = e^{-x^2}$. Escribe al menos 4 términos diferentes de cero, o escribe la serie en la notación sigma.

   (b) Obtén $\int e^{-x^2} dx$ como una serie infinita. Escribe al menos 4 términos diferentes de cero, o escribe la serie en la notación sigma.

9. (a) Demuestra que

$$\int_0^{1/2} e^{\sqrt{2x}}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}.$$

   Sugerencia: Usa la serie de Taylor de e^t en $t = 0$.

   (b) Encuentra el valor de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$, calculando la integral en (a).

10. (a) Obtén $\int_0^1 \cos(\sqrt{x})\, dx$.

    (b) Expresa $\int_0^1 \cos(\sqrt{x})\, dx$ como una serie. Sugerencia: Usa la serie de Maclaurin de $\cos(t)$.

11. Demuestra que

$$\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

    Sugerencia: Usa $\tan^{-1}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ e integra término a término la serie de potencias de $\dfrac{1}{1+t^2}$.

12. (a) A partir de $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $|t| < 1$, obtén

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

    (b) Integra término a término y obtén la serie de Maclaurin de $\arctan(x)$.

13. Sea $f(x) = \ln(1+x)$ la función definida en el intervalo $(-1, \infty)$.

   (a) Obtén la serie de Taylor en cero de f, su radio e intervalo de convergencia.

   (b) Estudia el carácter de la integral $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{x^p \operatorname{sen}(x)}\, dx$.

   (c) Estudia el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ y obtener su suma en caso de que sea convergente.

14. Usando $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ muestra que

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

15. (a) A partir de la serie de Maclaurin para $f(x) = \ln(1+x)$ demuestra que

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ para todo } |x| < 1.$$

   (b) Usando el resultado anterior demuestra que $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

16. Obtén el valor exacto de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-n}$. (Deriva término a término la serie de Maclaurin de $\dfrac{1}{1-x}$.)