Cálculo diferencial e integral II

Solución de ejercicios (1)

La siguiente lista de ejercicios resueltos tienen el objeto de resumir la mayoría de los conceptos vistos en clase hasta ahora. Aunque las soluciones capturan cierto grado de rigurosidad, no deben considerarse como ejercicios-modelo que serán evaluados en alguno de los exámenes por venir, sino como una breve colección de técnicas e ideas a manera de repaso conceptual de temas vistos en este curso y, quizá, en cursos previos.

Ej. 1 Sea $f(x)$ una función tal que $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $u = u(t)$ una función continua arbitraria. Demuestra que

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\mathrm{d}t\,, \quad \text{donde} \quad a > 0.$$

Solución.

La hipótesis $f''(x) \geq 0$ indica que la función es continua y convexa para todo valor $x \in \mathbb{R}$. Esto se puede ver de la siguiente manera: consideremos que, si $y = m(x - x_0) + f(x_0)$, donde $m = f'(x_0)$, es la recta tangente a $f(x)$ en el punto arbitrario $(x_0, f(x_0))$, el Teorema del Valor Medio (versión diferencial) indica que el cociente

$$\frac{f'(x) - y'}{x - x_0} = f''(x_\star) \quad \text{para algún valor} \quad x_\star \in (x_0, x)$$

y, por hipótesis, se tiene que en particular $f''(x_\star) \geq 0$; esto es, $f'(x) - m \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De este modo, se tiene que la recta tangente y en cualquier punto será menor o igual que f, es decir

$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = y \leq f(x)\,. \tag{1}$$

A partir de este punto, se pueden seguir dos caminos distintos:

Camino 1. La condición (1) quiere decir que, si se tienen dos valores cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, los puntos del intervalo $I = [x_1, x_2] \subseteq \mathbb{R}$, determinados por $r = (1-t)x_1 + tx_2$, donde $0 \leq t \leq 1$, satisfacen la desigualdad

$$\underbrace{f\left((1-t)x_1 + tx_2\right)}_{\text{Valores dados por } (r, f(r)).} \qquad \leq \qquad \underbrace{(1-t)f(x_1) + tf(x_2)\,.}_{\text{Segmento que une } (x_1, f(x_1)) \text{ y } (x_2, f(x_2)).}$$

Dicho de otro modo, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son dos constante arbitrarias, se tiene que

$$\underbrace{f\left(\alpha x_1 + \beta x_2\right) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)}_{\text{Definición de convexidad.}}\,. \tag{2}$$

Ahora, debido a que f es continua y u es también una función continua arbitraria en $\mathbb{R}$, entonces ambas funciones son Riemann-integrables en el intervalo $I = [0, a]$, donde $a > 0$. De esta manera, podemos considerar una partición cualquiera $\mathbb{P}_n$ de I dada por $t_0 = 0\,, \ldots\,, t_n = a$,

donde cada miembro de la partición $P_j = [t_j, t_{j+1}]$ satisface que $h_j = t_{j+1} - t_j \to 0$ cuando $n \to \infty$ para $j = 0, \ldots, n-1$.
Sea $\xi_j \in P_j$, entonces la suma de Darboux (equivalentemente a las sumas de Riemann) para $u \in I$ está dada por

$$\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} u(\xi_j)h_j = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}\sum_{j=0}^{n} u(\xi_j)h_j\,.$$

Debido a la continuidad de f, el hecho que la composición de funciones continuas es continua y la propiedad de convexidad (2), se tiene que

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right) = f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}\sum_{j=0}^{n} u(\xi_j)h_j\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{a}\sum_{j=0}^{n} u(\xi_j)h_j\right) \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}\sum_{j=0}^{n} f\left(u(\xi_j)\right)h_j = \frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} f\left(u(\xi_j)\right)h_j = \frac{1}{a}\int_0^a f\left(u(t)\right)\mathrm{d}t\,.$$

■

Camino 2. Debido a que la composición de las funciones f y u es continua en $I = [0, a]$, se puede suponer que $x = u(t)$ para cada valor $t \in I$ y que la constante x_0 puede escribirse como

$$x_0 = \frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\,.$$

De este modo, a partir de (1), se tiene que

$$f'\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)\left(u(t) - \frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right) + f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right) \leq f\left(u(t)\right)$$

y, al integral en I y tomando en cuenta la homogeneidad y la linealidad de la integral, obtenemos

$$\underbrace{f'\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)}_{f'(x_0)}\underbrace{\left(\int_0^a u(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\int_0^a \mathrm{d}t\right)}_{\text{Este término se anula.}} + \underbrace{f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)}_{f(x_0)}\int_0^a \mathrm{d}t \leq \int_0^a f\left(u(t)\right)\mathrm{d}t\,.$$

Por lo tanto, se concluye que

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\mathrm{d}t\,.$$

■

Ej. 2 Sea $0 \leq t \leq 1$. Calcula el límite

$$\lim_{h\to 0}\left[ta^h + (1-t)b^h\right]^{1/h}\,, \quad \text{donde} \quad a, b > 0$$

y muestra que

$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b\,.$$

Solución.

Definamos la función $f(x) = ta^x + (1-t)b^x$ y observemos que, con el fin que la composición $f(x)^{1/x}$ esté definida para todo $x \in \mathbb{R}$, el parámetro $t \in [0,1]$. Ahora, tomando en cuenta las propiedades del logaritmo natural, obtenemos

$$\log\left(f(x)^{1/x}\right) = \frac{\log\left(ta^x + (1-t)b^x\right)}{x}\,, \tag{3}$$

donde $ta^x + (1-t)b^x > 0$, puesto que $a, b > 0$ y $0 \leq t \leq 1$. De este modo, como $f(0) = 1$, tenemos que la definición de derivada conduce a que

$$\lim_{h\to 0} \log\left(f(h)^{1/h}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(f(0+h)\right) - \log\left(f(0)\right)}{h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\log(f(x))\right]\Big|_{x=0} = \frac{f'(x)}{f(x)}\Big|_{x=0}\,. \tag{4}$$

Es decir, se tiene la derivada logarítmica de $f(x)$ en $x = 0$. De esta manera, como $a^x = e^{x\log(a)}$ y $b^x = e^{x\log(b)}$, se obtiene que a partir de (4)

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\Big|_{x=0} = \frac{ta^x\log(a) + (1-t)b^x\log(b)}{ta^x + (1-t)b^x}\Big|_{x=0} = t\log(a) + (1-t)\log(b) = \log\left(a^t b^{1-t}\right)\,.$$

Por lo tanto, como la función logaritmo natural es invertible, a partir de (3) y (4), se obtiene finalmente que

$$\lim_{h\to 0}\left[ta^h + (1-t)b^h\right]^{1/h} = a^t b^{1-t}\,.$$

Por otro lado, la función logaritmo es monótona creciente y cóncava en todo su dominio. De este modo, siguiendo un argumento similar en Ej. 1 *Camino 1.*, se satisface que desigualdad en la condición de concavidad (2) es recíproca, lo cual indica que

$$\log\left[ta + (1-t)b\right] \geq t\log(a) + (1-t)\log(b) = \log\left(a^t b^{1-t}\right)\,;$$

por lo tanto, la desigualdad

$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b$$

se satisface para todo $a, b > 0$ y $0 \leq t \leq 1$.

$\blacksquare$

Ej. 3 Prueba que

$$\log\left(\frac{p}{q}\right) \leq \sqrt{\frac{p-q}{q}}\,, \quad 0 < q \leq p\,.$$

Solución.

Tomando en cuenta la desigualdad de Cauchy–Schwarz (Ej. 5 de la tarea), se tiene que si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) \equiv 1$, entonces para $p \geq q$ se tiene que $(p-q)^2 \leq p^2 - pq$ y, por lo tanto,

$$\left(\int_q^p \frac{\mathrm{d}x}{x}\right)^2 \leq \int_q^p \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \int_q^p \mathrm{d}x\,; \text{ es decir,}$$

$$\left[\log\left(\frac{p}{q}\right)\right]^2 \leq \left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)(p-q) = \frac{(p-q)^2}{qp} \leq \frac{1}{qp}(p^2 - qp) = \frac{p-q}{q}\,.$$

■

Ej. 4 Calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-0}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)\,.$$

Solución.

Observemos que

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-0}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-(j/n)^2}}\frac{1}{n}\,; \tag{5}$$

por definición de integral según Riemann, tenemos que si tomamos una partición homogénea dada por $\{x_0 = 0, \ldots, x_n = 1\}$, tenemos que el límite de (5) cuando $n \to \infty$ es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-(j/n)^2}}\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{=}_{x=\operatorname{sen}(u)} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\,.$$

■

Ej. 5 Calcula la integral indefinida

$$I = \int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}\mathrm{d}x\,.$$

Solución.

Utilizando la linealidad de la integral, tenemos que

$$I = 5\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-3x^2}}}_{I_1} - 3\underbrace{\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-3x^2}}}_{I_2}\,.$$

Veamos que, haciendo el cambio de variable $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} u$, entonces

$$I_1 = \pm\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\int \mathrm{d}u = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + k_1\,;$$

y, por el otro lado,

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\Big(\underbrace{\sqrt{3}\,x/2}_{u}\Big)^2}} = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{2}\frac{-2u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\sqrt{1-u^2}\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2} + k_2\,.$$

Por lo tanto,

$$I = 5I_1 - 3I_2 = \pm\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4-3x^2} + k\,,$$

donde $k = 5k_1 - 3k_2 \in \mathbb{R}$.

■