Ej. Sea una función $f(x)$ diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que satisface la relación

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi = -\frac{1}{2} + x^2 + x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\cos 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calcular los valores de $\boxed{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ y $\boxed{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$.

Sea $F(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi$, esto implica que $F(x) = -\frac{1}{2} + x^2 + x\operatorname{sen}2x + \frac{1}{2}\cos 2x$

Debido al T.F.C. tenemos que

$$\boxed{f(x) = F'(x)} = 2x + \operatorname{sen}2x + 2x\cos 2x - \operatorname{sen}2x$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

De este modo, como $f(x)$ es diferenciable en $\mathbb{R}$, tenemos que

$$f'(x) = 2 + 2\cos 2x + 2\cos 2x - 4x\operatorname{sen}2x - 2\cos 2x$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + 2\cos\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2} - \pi\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{2} = 2 - \pi$$

Ej. Sea $f(x)$ una función definida por $f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1+\operatorname{sen}\xi}{2+\xi^2}\,d\xi$. Encontrar el polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ tal que:

$p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ y $p''(0) = f''(0)$.

Observemos que

$a = p(0) = f(0) = 3.$

$b = p'(0) = f'(0) = \frac{d}{dx}\left(3 + \int_0^x \frac{1+\operatorname{sen}\xi}{2+\xi^2}\,d\xi\right) = \boxed{\frac{1+\operatorname{sen}x}{2+x^2}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$

Por T.F.C.

$2c = p''(0) = f''(0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{2+x^2}\right)\Big|_{x=0} = \frac{(2+x^2)\cos x - 2x(1+\operatorname{sen}x)}{(2+x^2)^2}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$

$$\therefore\ p(x) = 3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$$

Ej. A partir de la ecuación integral $\int_0^{x^2(1+x)} f(\xi)\,d\xi = x$, donde $f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$, encontrar el valor de $f(2)$.

Sea $F(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi$, entonces tenemos que la ecuación integral toma la forma $(*)\ F(g(x)) = x$, donde $g(x) = x^2(1+x)$

Como consecuencia del T.F.C. tenemos que, a partir de $(*)$, $F'(g(x))g'(x) = 1$

i.e: $f(g(x))g'(x) = 1 \Rightarrow f(x^2(1+x))\,x(2+3x) = 1 \Rightarrow \boxed{f(x^2(1+x)) = \frac{1}{x(2+3x)}}$

$$\therefore\ f(2) = \frac{1}{5}$$

Ej. Sea $\boxed{f(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{\xi^6}{1+\xi^4}\,d\xi}$. Calcular $f'(x)$.

Sea $G(x) = \int_\alpha^x \frac{\xi^6}{1+\xi^4}\,d\xi$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$f(x) = \int_{x^3}^{\alpha} \frac{\xi^6}{1+\xi^4}\,d\xi + \int_\alpha^{x^2} \frac{\xi^6}{1+\xi^4}\,d\xi = \int_\alpha^{x^2} \frac{\xi^6}{1+\xi^4}\,d\xi - \int_\alpha^{x^3} \frac{\xi^6}{1+\xi^4}\,d\xi =$$

Prop. de aditividad — Prop. de negatividad

$$= G(x^2) - G(x^3) \overset{\text{T.F.C.}}{\Rightarrow} f'(x) = G'(x^2)2x - G'(x^3)3x^2 = \frac{x^{12}}{1+x^8}2x - \frac{x^{18}}{1+x^{12}}3x^2$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{2x^{13}}{1+x^8} - \frac{3x^{20}}{1+x^{12}}$$

Ej. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta. Su posición al instante $t \in \mathbb{R}$ está dada por $f(t)$ cuando $0 \le t \le 1$, donde

$$f(t) = \int_0^t \frac{1 + 2\operatorname{sen}\pi\xi\cos\pi\xi}{1+\xi^2}\,d\xi.$$

Para $t \geq 1$, la partícula se mueve con aceleración constante, la cual corresponde al valor de $f''(t)$ en $t = 1$.

(i) Calcular la aceleración en $t = 2$.

Con el fin de calcular la derivada $f''(t)$, calculamos la primer derivada por medio del T.F.C., es decir

$$(*)\quad \boxed{f'(t) = \frac{1+\operatorname{sen}2\pi t}{1+t^2}}$$

$$\Rightarrow f''(t) = \frac{(1+t^2)2\pi\cos 2\pi t - 2t(1+\operatorname{sen}2\pi t)}{(1+t^2)^2}$$

$$\Rightarrow f''(1) = \frac{4\pi - 2}{4} = \pi - \frac{1}{2}$$

$\therefore\ f''(2) = \pi - \frac{1}{2}$ puesto que $f''(t)$ es constante para todo $t \geq 1$.

(ii) Calcular la rapidez $f'(1)$.

A partir de $(*)$ obtenemos que $f'(1) = \frac{1}{2}$

(iii) Calcular la rapidez cuando $t > 1$.

Notemos que $f''(t) = \pi - \frac{1}{2}$ para $t \geq 1$, esto significa que $f'(t) = at + b$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ por ser determinados.

Ahora, tenemos que $f'(t)$ corresponde a una primitiva de $f''(t)$, entonces el T.F.C. indica que

$$f'(t) - f'(1) = \int_1^t f''(\xi)\,d\xi = \int_1^t \left(\pi - \frac{1}{2}\right)d\xi = \left(\pi - \frac{1}{2}\right)\int_1^t d\xi = \left(\pi - \frac{1}{2}\right)(t-1)$$

$\therefore\ f'(t) = \left(\pi - \frac{1}{2}\right)t + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}$, es decir $a = \pi - \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{2} - \pi$

(iv) Calcula la diferencia $f(t) - f(1)$ cuando $t > 1$.

Por T.F.C. tenemos que

$$f(t) - f(1) = \int_1^t f'(\xi)\,d\xi = \int_1^t \left[\left(\pi - \frac{1}{2}\right)\xi + \frac{1}{2} - \pi\right]d\xi = \left(\pi - \frac{1}{2}\right)\int_1^t \xi\,d\xi + \left(\frac{1}{2} - \pi\right)\int_1^t d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\right)(t^2 - 1) + \left(\frac{1}{2} - \pi\right)(t-1)$$

$$\therefore\ f(t) - f(1) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\right)(t^2 - 2t + 1)$$

Ej. Calcular las primitivas de las funciones:

(a) $f(x) = x\sqrt{1+3x^2}$ (d) $f(x) = \tan x$

(b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}$ (e) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

(c) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}x}{(3+\cos x)^2}$ (f) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

(a) $F(x) = \int_\alpha^x \xi\sqrt{1+3\xi^2}\,d\xi = \int_{1+3\alpha^2}^{1+3x^2} \sqrt{u}\,\frac{1}{6}\,du = \frac{1}{6}\int_{1+3\alpha^2}^{1+3x^2} u^{1/2}\,du = \frac{1}{6}\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{1+3\alpha^2}^{1+3x^2} =$

Observemos que si calculamos $\frac{d}{dx}(1+3x^2) = 6x$, entonces $= \frac{1}{9}\sqrt{(1+3x^2)^3} + C$

$u = 1 + 3\xi^2$, $du = 6\xi\,d\xi$

(b) $\int_\alpha^x \frac{u}{\sqrt{2-3u^2}}\,du = \int_\beta^{v(x)} \frac{1}{\sqrt{v}}\left(-\frac{1}{6}\right)dv = -\frac{1}{6}\int_\beta^{v(x)} v^{-1/2}\,dv$, donde $v(x) = 2 - 3x^2$, $\beta = 2 - 3\alpha^2$

$\boxed{v = 2 - 3u^2,\ dv = -6u\,du}$

$$\Rightarrow \int_\alpha^x \frac{u}{\sqrt{2-3u^2}}\,du = -\frac{1}{6}\,2v^{1/2}\Big|_\beta^{v(x)} = -\frac{1}{3}(2-3x^2)^{1/2} + K, \text{ con } K \in \mathbb{R}$$

(c) $\int \frac{\operatorname{sen}x}{(3+\cos x)^2}\,dx = \int \frac{-du}{u^2} = \frac{1}{u} + k = \frac{1}{3+\cos x} + k$

$u = 3 + \cos x$, $du = -\operatorname{sen}x\,dx$

(d) $\int \tan x\,dx = \int \boxed{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}\,dx = -\int \frac{du}{u} = \log|\sec x| + k$

$u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen}x\,dx$

(e) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| + k = \log(1+e^x) + k$, $k \in \mathbb{R}$

$u = e^x + 1$, $du = e^x\,dx$ — $u = 1 + e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(f) $\int \frac{dx}{1-x^2}$. Primero, observemos que $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right]$, entonces

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{2}\log|1+x| - \frac{1}{2}\log|1-x| + k =$$

$$= \log\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

Ej. Calcular $I = \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

Observemos que $\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen}x\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}x\boxed{(1-\cos^2 x)}$ entonces

$$I = \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}x\,dx - \int_0^{\pi/4} \cos^2 x\operatorname{sen}x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/4} - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (-1)u^2\,du = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 1\right]$$

$u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen}x\,dx$

Ej. Sea $F(x, \alpha) = \int_0^x \frac{u^p}{(u^2+\alpha^2)^q}\,du$, donde $\alpha > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$. ~~Demostrar~~ Verificar rigurosamente que

$$F(x, \alpha) = \alpha^{p+1-2q}\,F\left(\frac{x}{\alpha}, 1\right)$$

Observemos que $F(x, \alpha) = \alpha^{-2q}\int_0^x \frac{u^p}{\left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 + 1\right]^q}\,du = \alpha^p\alpha^{-2q}\int_0^x \frac{\left(\frac{u}{\alpha}\right)^p}{\left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2+1\right]^q}\,du =$

$$= \alpha^{p-2q}\int_0^{x/\alpha} \frac{y^p}{(y^2+1)^q}\,\alpha\,dy = \alpha^{p+1-2q}\,F\left(\frac{x}{\alpha}, 1\right)$$

$\frac{u}{\alpha} = y$, $du = \alpha\,dy$

Ej. Probar que $\int_x^1 \frac{du}{1+u^2} = \int_1^{1/x} \frac{du}{1+u^2}$, si $x > 0$.

Tenemos que $\int_x^1 \frac{du}{1+u^2} = \int_{1/x}^1 \frac{-1/y^2}{1+\frac{1}{y^2}}\,dy = -\int_{1/x}^1 \frac{dy}{y^2+1} = \int_1^{1/x} \frac{dy}{1+y^2}$

$u = \frac{1}{y}$, $du = -\frac{1}{y^2}\,dy$

Ej. Sea $f \in C^0([0,1])$.

(i) Demostrar que $\int_0^\pi x f(\operatorname{sen}x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen}x)\,dx$.

(ii) Deducir el valor de $\int_0^\pi \frac{x\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

(i) Observemos que si $u = \pi - x$ entonces $du = -dx$ y

$u = -(x-\pi)$

$$\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}(\pi - u) = -\operatorname{sen}u\cos\pi + \operatorname{sen}\pi\cos u = \operatorname{sen}u;$$

en consecuencia, tenemos que

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen}x)\,dx = \int_0^\pi (\pi - u) f(\operatorname{sen}(\pi - u))\,du = \pi\int_0^\pi f(\operatorname{sen}u)\,du - \int_0^\pi u f(\operatorname{sen}u)\,du$$

$u = \pi - x$

Las variables de integración son mudas entonces tenemos que

$$2\int_0^\pi x f(\operatorname{sen}x)\,dx = \pi\int_0^\pi f(\operatorname{sen}x)\,dx$$

(ii) Observemos que $\boxed{\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}} = \frac{\operatorname{sen}x}{2-\operatorname{sen}^2 x}$, entonces definimos la función $f(x) = \frac{x}{2-x^2}$, la cual es continua en $[0,1]$. De este modo, el resultado del inciso anterior indica que

$$\int_0^\pi \frac{x\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^\pi x \underbrace{f(\operatorname{sen}x)}_{\frac{\operatorname{sen}x}{2-\operatorname{sen}^2 x}}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen}x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}x}{2-\operatorname{sen}^2 x}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2\pi}{2}\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$$

$u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen}x\,dx$ — $\frac{1}{1+u^2}$ es par

Ahora, con el fin de deducir la primitiva de la función $v(u) = \frac{1}{1+u^2}$, consideremos el siguiente argumento: sea $u = \tan v$, entonces al derivar con respecto de u, obtenemos $1 = \frac{dv}{du}\sec^2 v \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{1}{\sec^2 v}$. Notemos además que $\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v = 1\ \forall v \in \mathbb{R} \Rightarrow \tan^2 v + 1 = \sec^2 v$. De este modo, $\frac{dv}{du} = \frac{1}{1+\tan^2 v} = \frac{1}{1+u^2}$. Finalmente, por T.F.C. obtenemos que $\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = v(u)\Big|_0^1 = v(1) - v(0)$, donde $v(u) = \arctan u$, la función inversa de la función $\tan u$, entonces $v(0) = 0$ y $v(1) = \frac{\pi}{4}$.

$$\therefore\ \int_0^\pi \frac{x\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$$

Ej. Sea $\alpha > 0$, entonces $\alpha^x = e^{x\log\alpha}$. Demostrar que:

(i) $\log\alpha^x = x\log\alpha$.

Tenemos que $\log\alpha^x = \log(e^{x\log\alpha}) = (x\log\alpha)(\log e) = x\log\alpha$.

(ii) $\alpha^x\beta^x = (\alpha\beta)^x$, donde $\alpha, \beta > 0$.

Observemos que $(\alpha\beta)^x = e^{x\log(\alpha\beta)} = e^{x(\log\alpha + \log\beta)} = e^{x\log\alpha}e^{x\log\beta} = \alpha^x\beta^x$

(iii) $\alpha^x\alpha^y = \alpha^{x+y}$

A partir de $\alpha^{x+y} = e^{(x+y)\log\alpha} = e^{x\log\alpha + y\log\alpha} = e^{x\log\alpha}e^{y\log\alpha} = \alpha^x\alpha^y$

(iv) $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$

Tenemos que $\alpha^{xy} = e^{xy\log\alpha} = (e^{x\log\alpha})^y = (e^{y\log\alpha})^x$

$$\qquad\qquad (\alpha^x)^y = (\alpha^y)^x$$

(v) Si $f(x) = \alpha^x$, entonces $f'(x) = \alpha^x\log\alpha$ y $\int f(x)\,dx = \frac{\alpha^x}{\log\alpha} + k$.

Tenemos que $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(e^{x\log\alpha}) = e^{x\log\alpha}\log\alpha = \alpha^x\log\alpha$. En consecuencia, además, obtenemos que por medio del T.F.C. la primitiva de $f(x)$ está dada por

$$F(x) = \int \alpha^x\,dx = \int \frac{1}{\log\alpha}f'(x)\,dx = \frac{1}{\log\alpha}f(x) + k = \frac{\alpha^x}{\log\alpha} + k$$

Ej. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(\alpha^x + \alpha^{-x})$, $\alpha > 0$. Mostrar que $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

Observemos que $f(x+y) = \frac{1}{2}(\alpha^{x+y} + \alpha^{-x-y})$ y $f(x-y) = \frac{1}{2}(\alpha^{x-y} + e^{-x+y})$

$\Rightarrow f(x+y) + f(x-y) = \frac{1}{2}(\alpha^{x+y} + \alpha^{-x-y} + \alpha^{x-y} + e^{-x+y})$. Mientras que

$f(x)f(y) = \frac{1}{4}(\alpha^x + \alpha^{-x})(\alpha^y + \alpha^{-y}) = \frac{1}{4}(\alpha^{x+y} + \alpha^{x-y} + \alpha^{-x+y} + \alpha^{-x-y})$

$$\therefore\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

Ej. Calcular la derivada de $f(x) = x^{x^x}$ y la primitiva de $g(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

Por medio de la derivada logarítmica tenemos que $\log f(x) = x^x\log x$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}(x^x)\log x + x^{x-1}$. Ahora, si $h(x) = x^x$, entonces la derivada de $h(x)$ puede obtenerse a partir de la derivada logarítmica: $\frac{h'(x)}{h(x)} = \log x + 1$

$\Rightarrow h'(x) = x^x(\log x + 1)$ y, en consecuencia, obtenemos

$$f'(x) = x^{x^x}\left[x^x(\log x + 1)\log x + x^{x-1}\right]$$

Por otro lado, observemos que $g(x) = \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$, entonces

$$\int_\alpha^x g(u)\,du = \int_\alpha^x \frac{e^{-u}}{e^{-u}+1}\,du = -\int_\beta^{v(x)} \frac{dv}{1+v} = -\log|1+v(x)| + \underbrace{\log\beta + k}_{K \in \mathbb{R}} = -\log(1+e^{-x}) + K = \log\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) + K$$

$v = e^{-u}$, $dv = -e^{-u}\,du$, $\beta = -\log\alpha$

puesto que $1 + e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\therefore\ G(x) = \int_\alpha^x g(u)\,du = \log\frac{e^x}{1+e^x} + K = x - \log(1+e^x) + K$$

Prop. $\log(x)$.