- Ejercicios seleccionados (laboratorios 1 y 2) y algunos otros.

1. Sea $\alpha > 0$ y la función $f(x) = \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}}$. Probar que se satisfacen las desigualdades siguientes:

$$\frac{1}{(\alpha+1)\sqrt{2}} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{1}{\alpha+1}.$$

Prueba.

Observemos que $f(x) = h(x)g(x)$, donde $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ y $g(x) = x^\alpha$, $\alpha \geq 0$. De este modo, tenemos que $\boxed{\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1}}$. Por otro lado tenemos que tanto $h(x)$ como $g(x)$ son funciones continuas en $[0,1]$. Entonces, por medio del T.V.M.G. existe $c \in [0,1]$ tal que $\int_0^1 h(x)g(x)\,dx = h(c)\int_0^1 g(x)\,dx$.
En este sentido, tenemos que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \boxed{h(c)}\,\frac{1}{\alpha+1}, \text{ donde } c \in [0,1].$$

En consecuencia, queremos encontrar el valor máximo y el valor mínimo que puede tomar $h(c)$.
Notemos que la función $h(x)$ es monótona decreciente; esto quiere decir que $h(1) \leq h(c) \leq h(0)$ i.e.: $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq h(c) \leq 1$. Debido a que la integral es homogenea, es decir: respeta desigualdades, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 g(x)\,dx \leq h(c)\int_0^1 g(x)\,dx \leq \int_0^1 g(x)\,dx, \quad \text{donde } \boxed{g(x) \geq 0} \ \forall x\,[0,1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 g(x)\,dx \geq 0.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}}\,dx \leq \frac{1}{\alpha+1}$$

2. Sea $\alpha > 0$. Demostrar que se satisfacen las desigualdades a continuación:

$$\frac{1}{1+\alpha^6}\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5}\right) \leq \int_0^\alpha \frac{dx}{1+x^2} \leq \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5}.$$

Ayuda: $1+x^6 = (1+x^2)\boxed{(1-x^2+x^4)}$

Dem

Sea $f(x) = \frac{1}{1+x^6}$ y $g(x) = 1-x^2+x^4$, entonces $\frac{1}{1+x^2} = f(x)g(x)$. Observemos que $g(x) \neq 0$ en $[0,\alpha]$ y $f, g \in C^0([0,\alpha])$, donde $f(x)$ es monótona decreciente; es decir, tenemos que $\boxed{f(\alpha) \leq f(x) \leq f(0)}$. En consecuencia,

$$\boxed{f(\alpha)\int_0^\alpha g(x)\,dx \leq \int_0^\alpha f(x)g(x)\,dx \leq f(0)\int_0^\alpha g(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\alpha^6}\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5}\right) \leq \int_0^\alpha \frac{dx}{1+x^2} \leq 1\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5}\right)$$

3. (Lab 1, Ej 6).

Demuestre que si $f$ es integrable en $[a,b]$, entonces $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Sugerencia: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

Sea $P$ una partición de $[a,b]$ tal que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_j < x_{j+1} < \cdots < x_n = b$. Entonces, los subintervalos $P_j = [x_j, x_{j+1}]$ $\forall\, j = 0,\ldots,n-1$ son tales que $\bigcup_{j=0}^{n-1} P_j = [a,b]$ y $h_j = x_{j+1} - x_j$ tal que $h_j \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $j = 0,\ldots,n-1$. Sea $\xi_j \in P_j$ $\forall\, j = 0,\ldots,n-1$. De este modo, tenemos que

$$-|f(\xi_j)|h_j \leq f(\xi_j)h_j \leq |f(\xi_j)|h_j \quad \forall j = 0,\ldots,n-1$$

$$\Rightarrow -\sum_{j=0}^{n-1}|f(\xi_j)|h_j \leq \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)h_j \leq \sum_{j=0}^{n-1}|f(\xi_j)|h_j$$

$\vdots$

4. (Lab 1, Ej 8).

Sabiendo que $\int_{-1}^{8} 3\sqrt{x+1}\,dx = 54$, encuentra un número real $c$ que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio.

Dem. Queremos utilizar que para una función $g(x) \geq 0$ y continua, la integral definida $\int_a^b f(x)\cancel{g(x)}\,dx = f(c)\int_a^b \cancel{g(x)}\,dx$, donde $c \in [a,b]$ y $f(x)$ es continua.

Sea $f(x) = 3\sqrt{x+1}$, la cual es integrable en $[-1,8]$. Notemos que si $a = -1$ y $b = 8$, entonces $b - a = 8 + 1$; es decir,

$$54 = \int_a^b f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{T.V.M.} \\ \exists\, c \in [a,b]}}{=} f(c)(b-a) = f(c)\,9 \Rightarrow f(c) = \frac{54}{9} \ldots$$

5. (Lab 2, Ej 4)

Calcula $f(2)$, si $f$ es continua y satisface la fórmula dada para todo $x \geq 0$

$$\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^2(1+x).$$

Dem.

Sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Dado que $f$ es continua, entonces $F(x)$ es continua.
Además, tenemos que $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = F(x^2)$, lo cual indica que...
De este modo, debido al T.F.C. tenemos que

$$F'(x^2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regla de} \\ \text{la cadena}}}{=} \boxed{f(x^2)\,2x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hipótesis}}}{=} 2x + 3x^3} \Rightarrow f(x^2) = 1 + \frac{3}{2}x^2 \ldots$$

6. (Lab 2, Ej 6).

Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^4}\,dt$.

Sugerencia: usa $F'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{F(x) - F(1)}{x-1}$ y utiliza el T.F.C.

Dem.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\int_1^x \frac{t^2}{1+t^4}\,dt}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{F(x) - F(1)}{x-1} = F'(1) \overset{\text{T.F.C.}}{=} \left.\int_1^x \frac{t^2}{1+t^4}\,dt\right|_{x=1} + \left.x\,\frac{x^2}{1+x^4}\right|_{x=1} \ldots$$

Sea $F(x) = x\int_1^x \frac{t^2}{1+t^4}\,dt$, donde $F(1) = 0$

Definición de derivada de $F(x)$ en $x=1$.

7. Determina una función diferenciable $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea par, con $f(0) = 0$ y tal que

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\cos t}{1 + f(\sqrt{t})}\,dt \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Dem

Buscamos una función que satisfaga la condición $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Debido al T.F.C., tenemos que

$$f'(x) = \frac{2x\cos x}{1 + f(|x|)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Propiedad} \\ \text{de paridad.}}}{=} \frac{2x\cos x}{1 + f(x)}.$$

En consecuencia, tenemos que se satisface la ecuación siguiente:

$$(1 + f(x))f'(x) = 2x\cos x \Rightarrow \underbrace{f'(x)}_{\text{T.F.C.}} + \underbrace{f(x)f'(x)}_{\text{T.F.C.}} = \underbrace{2x\cos x}_{\text{T.F.C.}}$$

Encuentra funciones en cada sumando tal que al derivar las obtengamos $f'(x)$ y $f(x)f'(x)$, respectivamente.

para encontrar la primitiva de esta función

Observemos que la función $f(x)$ es tal que $f'(x)$ existe por hipótesis. Por otro lado, la composición $\frac{1}{2}(f(x))^2$ es tal que su derivada es $f(x)f'(x)$. De este modo, tenemos que $f(x)$ satisface la ecuación siguiente:

$$f(x) + \frac{1}{2}(f(x))^2 = \int_0^x 2t\cos t\,dt + k, \text{ donde } k \in \mathbb{R}.$$

Notemos que $2k = \underbrace{f(x)^2 + 2f(x) - G(x)}_{\text{es constante}}$, donde $\boxed{G(x) = \int_0^x 2t\cos t\,dt}$

$$\Rightarrow 2k = f(0)^2 + 2f(0) - G(0) = 0 \Rightarrow \underbrace{f(x)^2 + 2f(x) - G(x) = 0}_{\text{usar la fórmula del chicharronero}} \ldots$$