CUADERNO DE EJERCICIOS PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS I

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS

ITAM, 2011

INTRODUCCIÓN

Las Matemáticas son parte integral de la formación académica de los estudiantes de Administración, Economía y Ciencias Sociales. Cada vez más se aprecia la necesidad creciente de mejorar el nivel de las técnicas cuantitativas, así como de que los estudiantes de estas disciplinas sean capaces de plantear, resolver e interpretar los problemas con los que se enfrentan.

El objetivo de este cuaderno de trabajo es el de presentarle al estudiante un muestrario de ejercicios en los que la derivada e integral exhiben su gran utilidad como una poderosa herramienta. Asimismo se pone especial énfasis en el análisis gráfico de las funciones consideradas. Al final se incluye una breve bibliografía recomendada en donde el lector hallará otros ejercicios, así como temas afines.

Guillermo Grabinsky S.

Índice general

Capítulo I

LA DERIVADA

I.1. Incrementos y tasas

1. Determine los incrementos de las funciones siguientes así como la tasa de cambio promedio para los intervalos dados:

   a) $f(x) = 2x + 7$; $x = 3$; $\Delta x = 0.2$
   b) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$; $x = 2$; $\Delta x = 0.5$
   c) $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; $x = 1$; $\Delta x = 0.5$
   d) $f(x) = 3 - 7x$; $x = 2$; $\Delta x = 0.3$
   e) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$; $x = 3$; $\Delta x = 0.5$
   f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$; $x = 3$; $\Delta x = 0.2$

2. (Crecimiento y variación de la población) La población de cierta ciudad en el tiempo t (medido en años) esta dada por:

$$p(t) = 10000 + 1000t - 120t^2$$

   Determine la tasa de crecimiento promedio entre cada pareja de tiempos

   a) $t = 3$ y $t = 7$ años.
   b) $t = 2$ y $t = 4$ años.
   c) t y $t + \triangle t$ años.

3. (Función de costo) Después de consultar a un matemático, un fabricante sabe que el costo de producir x artículos puede simularse por:

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

a) Determine el incremento en el costo cuando el número de unidades se incrementa de 30 a 70.

b) Calcule el costo promedio por unidad adicional de incremento en la producción de 40 a 70 unidades.

c) Calcule el costo promedio por unidad adicional en el incremento de producción de 70 a 90 unidades.

4. Sea $C(x) = mx + b$ con $m > 0$ y $b > 0$ una función de costo lineal. Verifique que el costo promedio por unidad adicional es siempre el mismo, independientemente de los niveles de producción. Ilustre gráficamente.

5. (Relación de demanda e ingreso) Cuando el precio de cierto artículo es igual a p, el número de artículos que pueden venderse por semana (demanda) está dado por la formula

$$x = \frac{1000}{\sqrt{p} + 1}$$

a) Determine el incremento de la demanda cuando el precio de incrementa de \$4 a \$9.

b) Determine el incremento en el ingreso bruto cuando el precio del artículo se incrementa de \$1 a \$4.

c) Calcule el incremento promedio del ingreso total por unidad de incremento en el precio cuando éste se incrementa de \$1 a \$9.

6. (Crecimiento del PNB) Durante el período de 1990 a 2010, el producto nacional bruto de cierto país se encontraba dado por la fórmula

$$I = 5 + 0.1x^2$$

en miles de millones de dólares (x en años y $x = 0$ corresponde al año 1990). Determine el crecimiento promedio del PNB por año entre 2000 y 2005.

7. El costo de producir x unidades de cierto artículo está dado por la función: $C(x) = 10x + 420$ y el ingreso obtenido por la venta de x unidades está dada por: $I(x) = 1000x - x^2$. Se están produciendo 200 unidades y se desea incrementar la producción a 210 unidades.

a) Calcule los incrementos correspondientes en el costo, el ingreso y la utilidad.

b) Determine el cambio promedio del costo, ingreso y utilidad por las unidades adicionales vendidas.

8. (Televidentes) Después de consultar a un matemático, una nueva empresa de televisión por cable pudo simular la proporción de familias que utilizaban su servicio t años después por medio de la fórmula:

$$p = 1 - e^{-0.1t}$$

Determine el crecimiento de p entre $t = 1$ y $t = 2$ y la tasa de cambio promedio de p por año.

9. (Crecimiento de la población) La población de cierta comunidad como función del tiempo t se encuentra que está dada por la fórmula:

$$y = \frac{20000}{1 + 6(2)^{-0.1t}}$$

Calcule el incremento de y entre $t = 20$ y $t = 30$ y el crecimiento promedio de la población por año durante este período.

10. (Función de ingreso) El ingreso semanal total R (revenue) obtenido por la producción y venta de x unidades de cierto artículo está dado por:

$$R = f(x) = 500x - 2x^2$$

Determine la tasa promedio de ingresos por unidad extra cuando el número de unidades producidas y vendidas por semana se incrementa de 120 a 150.

I.2. Límites y continuidad

1. Evalúe los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2}(3x^2 + 7x - 1)$.

b) $\lim_{x\to -1}(2x^2 + 3x - 1)$.

c) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$.

d) $\lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}\ \text{-}3}{x^2 - 81}$.

e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$.

f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2 - x} - 1}{2 - \sqrt{x + 3}}$.

g) $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{3x - 6} - 3}{x - 5}$.

h) $\lim_{t\to 0} \dfrac{t}{3 - \sqrt{t - 9}}$.

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x + 4)^{-1} - 4^{-1}}{x}$.

j) $\lim_{w\to 1} \dfrac{\dfrac{1}{w + 1} - \frac{1}{2}}{w - 1}$.

k) $\lim_{t\to 1} \dfrac{(t - 1)^2}{(1 - t)(2 - 2t)^2}$.

l) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2+6x+9}{9-x^2}$.

m) $\lim_{x\to 6} \dfrac{x^2-8x+12}{x^2-6x}$.

n) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt[3]{2x+1}}$.

2. Determine los siguientes límites unilaterales:

   a) $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{|\frac{2x}{3}-2|}{x-3}$.

   b) $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-2x-3}{|x-3|}$.

   c) $\lim_{x\to 9^+} \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x-9}}$.

   d) $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{|t|-|-t|}{t}$.

   e) $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{|x-3|}{x-3}$.

   f) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1-x^2}{|x-1|}$.

3. Calcule $\lim_{x\to c} f(x)$ donde $f(x)$ y c están dadas por:

   a) $f(x) = \begin{cases} 3x-4 & x\neq 2 \\ 5 & x=2 \end{cases}$; $c=2$ ¿Es f continua en c?

   b) $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+1 & x<1 \\ -1 & x\geq 1 \end{cases}$; $c=1$ ¿Es f continua en c?

   c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & x<-3 \\ 2x & x\geq -3 \end{cases}$; $c=-3$ ¿Es f continua en c?

4. Determine el valor de A y de B para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2+5x-9 & x<1 \\ B & x=1 \\ (3-x)(A-2x) & x>1 \end{cases}$$

   sea continua en todo su dominio.

5. Obtenga el valor de la constante c que hace que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} c & x=1 \\ \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{1-x} & x\neq 1 \end{cases}$$

   sea continua en $x=1$.

6. Pruebe que para ningún valor de A es posible definir $f(1)$ de tal modo que la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} A(x-1) & x < 1 \\ Ax^2 + 2Ax + 1 & x > 1 \end{cases}$$

pueda ser extendida continuamente en $x_0 = 1$. Explique porqué.

7. Encuentre el valor de h de modo que la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} hx + 3 & x \geq 1 \\ 3 - hx & x < 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$.

8. (Tarifa Postal) Enviar una carta de primera clase tiene un costo de \$10 por cada gramo o fracción menor. Analice la continuidad de la función de costo $f(x)$ que resulta de enviar una carta que pesa x gramos si $0 \leq x \leq 8$

9. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   a) Una función no es continua en c sólo si $f(c)$ no está definida.

   b) Una función es continua en c siempre y cuando $\lim_{x\to c} f(x)$ exista.

   c) Si f es continua en c, entonces la gráfica de f no presenta una rotura en $(c, f(c))$.

10. Evalúe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

para las funciones $f(x)$ y los valores dados a continuación:

   a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$; $a = 1$.

   b) $f(x) = x^2 - 1$; $a = 0$.

   c) $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$; $a = x$.

   d) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$; $a = 2$.

   e) $f(x) = x^2 + x + 1$; $a = t$.

I.3. La derivada (Reglas de diferenciación. Regla de la cadena)

1. Calcule las derivadas de las funciones siguientes con respecto a la variable independiente según el caso y simplifique lo más posible.

   a) $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$.

   b) $h(u) = \dfrac{2}{1-u}$.

c) $f(t) = \dfrac{1}{2t+3}$.

d) $y = 4 + 2x^3 + 3x^{-1}$.

e) $y = \sqrt{x} - 3x$.

f) $y = \dfrac{8}{\sqrt[3]{x}} + x^7$.

g) $f(x) = 2x^3(x^2 - 2)$.

h) $f(x) = (x-3)(2x^2 - 1)$.

i) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$.

j) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-3}$.

k) $f(x) = \dfrac{3x+5}{x^2-3}$.

l) $f(x) = 9x^{1/3}(x^3 + 5)$.

m) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2 - 3x + 1}$.

n) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^3+2)(x^2-3)}$.

ñ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

2. Calcule:

a) $D\left(\dfrac{x^4 - 3x^2 + 5}{x^2}\right)$.

b) $\dfrac{dy}{dx}$ para $y = \dfrac{\sqrt{x} - 6}{\sqrt{x^3}}$.

c) y' para $y = \dfrac{2x^5 - 4x^3 + 2x}{x^3}$.

d) $f'(x)$ para $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} + 3}{\sqrt[3]{x^2}}$.

3. Dada la ecuación $y = f(x) = 6x - x^2$ encuentre:

a) La función de la pendiente $m = \dfrac{dy}{dx}$.

b) La pendiente de la tangente a la gráfica en $x = 2$ y $x = 4$.

c) Los valores de x que hacen que la pendiente sea cero.

d) Ilustre gráficamente el inciso c).

4. Repita el ejercicio 3. para $y = f(x) = 2x^2 + 8x$.

5. Repita el ejercicio 3. salvo el inciso (d) para $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 2$.

6. Esboce la gráfica de una función f cuya derivada tiene todas las propiedades siguientes:

   a) $f'(x) > 0$ cuando $x < 1$ y cuando $x > 5$.
   b) $f'(x) < 0$ cuando $1 < x < 5$.
   c) $f'(1) = 0$ y $f'(5) = 0$.

7. Encuentre números a, b y c tales que la gráfica de la función:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

   tenga intersecciones con el eje de las x en (0, 0) y (5, 0) y una tangente con pendiente 1 cuando $x = 2$.

8. Encuentre las ecuaciones de todas las tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 25$ que pasan por el origen.

9. (Crecimiento de las ventas) El volumen de las ventas S de cierto iPod está dado como una función del tiempo t por la fórmula

$$S(t) = 1000 + 200t - 20t^2$$

   en donde t se mide en semanas. Determine la tasa en que S cambia cuando

   a) $t = 0$.
   b) $t = 2$.
   c) $t = 5$.
   d) Compare los resultados en (a), (b) y (c) con las correspondientes tasas de crecimiento promedio si $\Delta t = 0.01$

10. (Crecimiento de la población) Cierta población crece de acuerdo con la fórmula $p(t) = 30000 + 60t^2$ en donde t se mide en años. Calcule la tasa de crecimiento cuando

    a) $t = 0$.
    b) $t = 1$.
    c) $t = 7$.
    d) Compare los resultados en (a), (b) y (c) con las correspondientes tasas de crecimiento promedio si $\Delta t = 0.01$

11. (Crecimiento de la población) Se estima que dentro de x meses la población de cierta comunidad será: $P(x) = x^2 + 20x + 8000$

    a) ¿A qué ritmo cambiará la población dentro de 15 meses?

b) ¿Cuánto cambiará realmente la población durante el decimosexto mes?

12. (Función de precio-demanda) De acuerdo a una teoría económica, la demanda $d(x)$ de un producto en un mercado libre disminuye al aumentar el precio x. Suponga que el número de radios de transistores $d(x)$ que los consumidores comprarán por semana en una cierta ciudad al precio x está dado por $d(x) = \dfrac{50000}{x^2+10x+25}$ con $\$5 \leq x \leq \$15$

    a) Encuentre la razón de cambio $d'(x)$, de la demanda con respecto al cambio en el precio

    b) Calcule $d'(5)$ y $d'(10)$ ¿Qué significan?

13. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ utilizando la regla de la cadena

    a) $y = (2x+5)^3$.

    b) $y = (x^2-6)^{3/2}$.

    c) $y = 3(x^2-2)^4$.

    d) $y = 2(x^2+5x)^{-3}$.

    e) $y = \sqrt{x^2+8}$.

    f) $y = \sqrt[3]{3x^2+4}$.

    g) $y = (x^2-4x+4)^{1/2}$.

    h) $y = \dfrac{1}{2x+4}$.

    i) $y = \dfrac{1}{(x^2-3)^8}$.

    j) $y = \dfrac{1}{2x^2-3x+1}$.

14. Evalúe las derivadas obtenidas en el ejercico 13. para $x = 3$.

15. Encuentre la ecuación de la tangente a la gráfica de $y = \dfrac{4}{2x^2-3x+3}$ en el punto $(1, 2)$ utilizando la regla de la cadena para encontrar la pendiente. Escriba la respuesta en la forma $y = mx + b$.

16. Suponga que $f(x_0) = f'(x_0) = 2$ y que $g'(4) = 1$; calcula $(g \circ f^2)'(x_0)$.

17. Obtenga $\left(\dfrac{dx}{dz}\right)$ cuando $z = 9$ si: $x = t^3 + 2$ y $t = z^{1/2}$.

18. Utilice las reglas de difrenciación para obtener $f'(c)$ si:

    a) $f(x) = \left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)^{1/2}$ y $c = 0$.

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+4}\right)$ y $c = 0$.

c) $f(x) = (x^2+1)^7(2x^3-1)^4$ y $c = -1$.

d) $f(x) = xe^{-x^2}$ y $c = 0$.

19. A partir de la <u>definición</u> calcule $f'(c)$ si: $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $c = 10$.

20. Obtenga: $(\sqrt{9x+(2x+1)^3})'(1)$.

I.4. Recta tangente a una curva

1. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x\sqrt{x}$ en el punto $P_0 = (0, f(0))$.

2. Determine las ecuaciones de las <u>dos</u> rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = 4x - x^2$ que pasan por el punto $Q_0 = (2,5)$.

3. Determine las coordenadas de los puntos en donde la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 + 1$ sea:

   a) Paralela al eje x (2soluciones).

   b) Paralela a la recta $y = -x$ (1 solución).

4. ¿En qué punto sobre la parábola $y = 3x^2 - 12x + 5$ es la recta tangente a través de él perpendicular a la recta $x - 6y + 3 = 0$?

5. Verifique que a través del punto $(1,1)$ las curvas $y = x^3$ y $y = x^{1/3}$ tienen rectas tangentes cuyas pendientes con recíprocas.

I.5. La derivada como razón de cambio

1. La relación de demanda de cierto artículo está dada por: $p + \sqrt{q} = 200$ donde q representa el número de artículos y p es el precio unitario. Determine la razón de cambio de la demanda q con respecto al precio cuando el precio es de \$5 por cada artículo.

2. Determine la razón de cambio porcentual de la función $F(L) = 500L^{1/2}$ con respecto a L cuando $L = 400$.

3. El costo total de la fabricación C es una función de la cantidad q de artículos producidos, que a su vez es una función del número t de horas empleadas en su fabricación.

   a) ¿Qué representa la derivada $\left(\dfrac{dC}{dq}\right)$?

b) ¿Qué representa la derivada $\left(\dfrac{dq}{dt}\right)$?

c) ¿Qué representa el producto $\left(\dfrac{dC}{dq}\right)\left(\dfrac{dq}{dt}\right)$?

4. Se estima que en t años cierta población suburbana será de $p(t) = 20 - \dfrac{6}{t+1}$ miles de personas y que el nivel promedio de monóxido de carbono que se producirá será de $c(p) = 2\sqrt{p^2 + p + 58}$ partes por millón cuando la población dea de p miles. Determine la tasa de cambio del nivel promedio del monóxido de carbono con respecto al tiempo a los 2 años.

I.6. Análisis marginal

1. (Costo e ingreso marginal) Calcule el costo marginal $C'(x)$ y el ingreso marginal $R'(x)$ de las funciones de costo e ingreso siguientes:

   a) $C(x) = 40 + (\ln 2)x^2$.

   b) $R(x) = x - 0.01x^2$.

   c) $C(x) = 0.0001x^3 - 0.09x^2 + 20x + 1200$.

   d) $R(x) = 5x - 0.01x^{5/2}$.

   e) $C(x) = 10^{-6}x^3 - (3 \times 10^{-3})x^2 + 36x + 2000$.

   f) $R(x) = 0.01x - 10^{-3}x^2 - 10^{-5}x^{5/2}$.

   g) $R(x) = 100x - (\log 5)x^3(1 + \sqrt{x})$.

2. (Ingreso marginal) Calcule el ingreso marginal $R'(x)$, si la ecuación de demanda es:

   a) $x + 4p = 1000$ cuando $p = 50$.

   b) $\sqrt{x} + p = 10$ cuando $p = 6$.

   c) $x^{2/3} + 21p = 100$ cuando $p = 4$.

   d) $10p + x + 0.01x^2 = 700$ cuando $p = 10$.

3. (Utilidad marginal) Si la función de demanda es $x + 4p = 1000$ y la de costo es $C(x) = 1000 + 5x$, calcule la utilidad marginal con respecto a x cuando $p = 150$.

4. (Utilidad marginal) Si la función de demanda es $\sqrt{x} + p = 10$ y la de costo es $C(x) = 60 + x$, calcule la utilidad marginal con respecto a x cuando $p = 7$.

5. (Utilidad marginal) Si la función de demanda es $x^{2/3} + 50p = 1000$ y la de costo es $C(x) = 50 + x^{3/2}$, calcule la utilidad marginal con respecto a la demanda cuando $p = 16$ y $x = 25$.

6. (Utilidades marginales) El editor de una revista descubre que si fija el precio de \$1 a su revista, vende 20,000 ejemplares al mes; sin embargo, si el precio fijado es de \$1.50, sus ventas sólo serán de 15,000 ejemplares. Si el costo de producir cada ejemplar es de \$0.80 y tiene costos fijos de \$10,000 al mes, suponiendo una ecuación de demanda lineal:

    a) Calcule su función de utilidad marginal y determine el precio de la revista que haga qué la utilidad marginal sea igual a cero. Evalúe la utilidad misma cuando el precio es:

    b) \$1.80 .

    c) \$1.90 .

    d) \$2 .

7. La Secretaría de Finanzas indica que a partir del 2001, el impuesto predial sobre una casa de tres habitaciones es de $P(x) = 60x^{1/2} + 40x + 1200$ pesos, donde x se mide en años. Estime el cambio del monto del impuesto predial durante la primera mitad del año 2005.

8. En determinada fábrica, la producción es de $Q = 600K^{1/2}L^{1/3}$ unidades donde K representa la inversión en capital y L el número de obreros. Estime el incremento porcentual que se generará en la producción a partir de un aumento de 2 % en el número de obreros, si la inversión de capital no cambia. Compare con el incremento porcentual real.

9. Si la relación de demanda es: $q^{2/3} + 50p = 1000$ y la de costo es: $C(q) = 50 + q^{2/3}$, determina la utilidad marginal con respecto a la demanda cuando $p = 18$ y $q = 64$.

10. La relación de demanda de cierto artículo está dada por $2q + \sqrt{p+4} = 11$. Determine:

    a) El precio marginal con respecto a la demanda a un nivel de $q = 3$ unidades.

    b) El ingreso marginal con respecto al precio cuando $p = 21$.

11. La relación de demanda de cierto artículo es: $p(q^2 + 1) = 300$ en donde p es el precio por unidad y q la cantidad demandada. La función de costo es: $C(q) = 3q^2 + 4q$ dólares. Determine:

    a) La función de ingreso marginal con respecto a la cantidad.

    b) La utilidad promedio marginal cuando $q = 2$.

12. (Tasas relacionadas) Una empresa tiene la función de costo $C(x) = 25 + 2x - \frac{1}{20}x^2$ en donde x es el nivel de producción. Si éste es igual a 5 actualmente y está creciendo a una tasa de 0.7 por año, calcule la tasa a la que los costos de producción se están elevando.

13. (Tasas relacionadas) La ecuación de demanda del producto de cierta compañía es $2p+x=300$. Si la demanda cambia a una tasa de 2 unidades por mes cuando la demanda alcanza 40 unidades, ¿A qué tasa está cambiando el ingreso si la compañía ajusta su precio a la demanda cambiante?

14. (Producción marginal) Se estima que la producción semanal de una cierta planta es $Q(x)=-x^3+60x^2+1200x$ unidades, donde x es el número de trabajadores empleados en la planta. Generalmente hay 30 trabajadores empleados en la planta. Use el análisis marginal para estimar el cambio en la producción semanal que resultaría de añadir un trabajador más a la fuerza de trabajo y compare con el cambio real.

15. (Ritmo de producción) Un estudio de productividad sobre el turno matutino en una fábrica indica que un trabajador medio que llega al trabajo a las 8:00 a.m. habrá montado $f(x)=-x^3+6x^2+15$ teléfonos celulares x horas después.

    a) Obtenga una fórmula para el ritmo al que el trabajador estará montando teléfonos después de x horas.

    b) ¿A qué ritmo estará montando teléfonos el trabajador a las 9:00 a.m.?

    c) ¿Cuántos teléfonos montará realmente el trabajador entre las 9:00 y las 10:00 a.m.?

16. (Costo marginal y costo promedio marginal) Suponga que el costo total en dólares de la fabricación de q unidades es: $C(q)=3q^2+q+500$.

    a) Utilice el análisis marginal para estimar el costo de la fabricación de la cuadragésima primera unidad.

    b) Calcule el costo real de fabricación de la cuadragésima primera unidad

    c) ¿Qué costo de fabricación aproxima $C'(41)$?

    d) Halle el costo promedio y el costo promedio marginal de fabricar q unidades.

17. (Producción marginal) En cierta fábrica, la producción diaria es de $600K^{1/2}$unidades, donde K representa la inversión de capital medida en unidades de 1000 dólares. La inversión actual de capital es de 900,000 dólares. Mediante el análisis marginal estime el efecto que una inversión adicional de capital de 1,000 dólares tendrá en la producción diaria.

18. (Producción marginal) En cierta fábrica, la producción diaria es de $3000K^{1/2}L^{1/3}$ unidades, en donde K representa la inversión de capital de la firma medida en unidades de 1,000 dólares y L representa la fuerza de trabajo medida en horas de trabajo. Supongamos que el capital invertido actualmente es de 400,000 dólares y que se usan cada día 1,331 horas de trabajo. Use el análisis marginal para estimar el efecto que una inversión adicional de

capital de 1,000 dólares tendrá en la producción diaria si el tamaño de la fuerza de trabajo no cambia.

19. (Razón porcentual de cambio) Un empleado tiene un salario de 12,000 dólares por año y obtendrá un aumento de 1,000 dólares cada año. (NOTA: Si $S(t)$ denota el salario al tiempo t, la razón porcentual de cambio se define como: $100\dfrac{S'(t)}{S(t)}\ \%$).

    a) Exprese la razón porcentual de cambio de su salario como función del tiempo y dibuje su gráfica.

    b) ¿A qué razón porcentual estará aumentando su salario después de un año?

    c) ¿Qué le sucederá a la larga a la razón porcentual de cambio de su salario?

20. (Demanda de consumo) Un distribuidor de jitomate de Sinaloa estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $D(p) = \dfrac{4374}{p^2}$ kilos de jitomate por mes cuando el precio es de p pesos por kilo. Se estima que dentro de t meses, el precio del jitomate será de: $p(t) = 0.02t^2 + 0.1t + 6$ pesos el kilo. ¿A qué ritmo estará cambiando la demanda de jitomate dentro de 10 meses? ¿Estará creciendo o decreciendo?

21. Una fábrica de cigarros produce x cartones de cigarros al día con un costo diario de $\dfrac{50x(x+200)}{x+100}$ dólares. Compruebe que si crece la producción entonces:

    a) El costo se incrementa.

    b) El costo promedio disminuye.

I.7. Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

1. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ para cada una de las funciones siguientes y simplifique lo más posible:

    a) $y = e^{3x}$.

    b) $y = 7e^{-x}$.

    c) $y = e^{x^2}$.

    d) $y = xe^{x}$.

    e) $y = x^2e^{-x}$.

f) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

g) $y = e^{\sqrt{x}}$.

h) $y = \dfrac{x+1}{e^x}$.

i) $y = \dfrac{e^{x^2}}{e^x}$.

j) $y = \dfrac{e^{x^3}}{e^{x^2}}$.

k) $y = \dfrac{e^x}{1-e^x}$.

l) $y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

m) $y = e^{(3x^2+7x-1)}$.

2. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ para cada una de las funciones siguientes y simplifique lo más posible:

a) $y = \ln(3x+7)$.

b) $y = \ln(x^2)$.

c) $y = \ln(x^2+7)$.

d) $y = \sqrt{\ln x}$.

e) $y = (1+\ln x)^7$.

f) $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

g) $y = x^2 \ln x$.

h) $y = x(\ln x + 1)$.

i) $y = x \ln(x-1)$.

j) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

k) $y = \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$.

l) $y = \dfrac{x+2}{\ln(x+2)}$.

3. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ para cada una de las funciones siguientes y simplifique lo más posible. (NOTA: Utilice las diversas propiedades del logaritmo para facilitar algunos cálculos).

a) $y = e^x \ln x$.

b) $y = \dfrac{\ln x}{e^{2x}}$.

c) $y = e^x \ln(x^2+1)$.

d) $y = \ln\left(\dfrac{x}{e^x}\right)$.

e) $y = \log(e^x)$.

f) $y = \log(3^{(x^2)})$.

g) $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$.

h) $y = \ln\left(\dfrac{(x+2)e^{3x}}{x^2+1}\right)$.

i) $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+4}\right)$.

4. Evalúe, si es posible, las derivadas obtenidas en el ejercicio 3. para $x = 0$ y $x = 1$.

5. Obtenga $f'(c)$ si:

   a) $f(x) = x^3 e^{-x^4}$ y $c = -1$.

   b) $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^x}$ y $c = 0$.

   c) $f(x) = \ln(1 + (x-2)^2)$ y $c = 2$.

   d) $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2e^{-5x}}$ y $c = \dfrac{1}{5}$.

6. Sea $y = e^{-x}$ y $x = \ln(1+t^2)$, calcula $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)$ si $t = -1$.

7. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$a través del punto $(c, f(c))$ si: $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^{3x}}\right)$ y $c = 0$.

8. (Precio marginal) Si x unidades pueden venderse a un precio de p cada una en donde $x + \ln(p+1) = 50$, $0 \le x \le 50$, calcule el precio marginal con respecto a la demanda.

9. (Demanda marginal) La ecuación de demanda de cierto producto está dada por: $2x + 3\ln(p+1) = 60$. Calcule la demanda marginal a un nivel de precio de $p = 2$. Interprete el resultado.

10. (Productividad física marginal) La productividad física de cierta empresa está dada por $P(x) = 500(x+4)^{3/2} - 4000$ en donde x es el número de máquinas en funcionamiento. Determine la productividad física marginal cuando 5 máquinas están en funcionamiento. Interprete el resultado.

11. (Ingresos y utilidades marginales) La ecuación de demanda de cierto producto es $p = 300e^{-x/20}$ en donde x unidades se venden al precio de $\$p$ cada uno. Si el fabricante tiene costos fijos de \$500 y un costo variable de \$20 por unidad, halle la función de ingreso marginal y la función de utilidad marginal.

12. (Ingreso marginal) Si x unidades pueden venderse a un precio de p cada una, en donde: $2p+\ln(x+1) = 70$, encuentre la función de ingreso marginal con respecto a x.

13. La relación de demanda de cierto artíclo está dada por: $5p+\ln(3q+2) = 25$. Determina la función de ingreso marginal con respecto al precio.

14. (Interés compuesto) Se deposita dinero en un banco que ofrece interés a un tipo anual del 6 % compuesto continuamente. Halle la razón porcentual de cambio del saldo con respecto al tiempo.

15. (Depreciación) Cierta maquinaria industrial se deprecia hasta que su valor, pasados t años, es de: $Q(t) = 20000e^{0.4t}$ dólares. (NOTA: la SHCP sólo permite depreciación lineal, sin embargo muchas empresas utilizan otro tipo de depreciaciones internamente para conocer la depreciación real y sólo con fines informativos).

    a) ¿A qué ritmo se está depreciando la maquinaria después de 5 años?
    b) ¿A qué razón porcentual está cambiando el valor de la maquinaria después de t años? ¿Depende esta razón porcentual de t o es constante?

16. Suponga que se invierten 70,000,000 de pesos a un tipo anual de interés del 35 %. Calcule el saldo después de 5 años en cada uno de los siguientes casos:

    a) El interés es simple.
    b) El interés se compone semestralmente.
    c) El interés se compone continuamente.

17. ¿Con qué rapidez se duplicará el dinero si se invierte a un tipo anual de interés del 30 % y el interés se compone:

    a) trimestralmente?
    b) continuamente?

18. ¿Con qué rapidez se duplicará el monto de una inversión si se invierte a un tipo anual de interés simple del 30 %?

19. ¿Cuál es la mejor inversión: 8.2 % anual compuesto trimestralmente ó 8.1 % anual compuesto continuamente?

20. Después de t semanas del brote de una epidemia de cierta clase de gripe, el número de personas contagiadas es aproximadamente de: $f(t) = \dfrac{2}{1+e^{-0.8t}}$ miles de personas.

   a) ¿Cuántas personas tenían la enfermedad al principio del brote?

   b) ¿A qué tasa está creciendo el número de personas contagiadas a las 4 semanas?

   c) Si la tendencia continúa indefinidamente, ¿aproximadamente cuántas personas en total contraerán la enfermedad?

I.8. Límites y derivadas de funciones trigonométricas

1. Los límites trigonométricos básicos son:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t} = 0.$$

   Utilice identidades trigonométricas y estos límites básicos para hallar:

   a) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\tan(t)}{t}$.

   b) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin(2t^2)}{5t^2}$.

   c) $\lim_{t\to 0} \dfrac{1-\cos(2t)}{3t}$.

   d) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\text{1-cos(t)}}{t^2}$.

   e) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\tan(t)-\sin(t)}{t\cos(t)}$.

   f) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\tan(t)-\sin(t)}{t^3}$.

2. Las derivadas trigonométricas básicas son:

$$\frac{d}{dt}(\sin(t)) = \cos(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\cos(t)) = -\sin(t)$$

   Utilícelas para hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\dfrac{d}{dt}(\tan(t))$.

b) $\dfrac{d}{dt}(\cot(t))$.

c) $\dfrac{d}{dt}(\sec(t))$.

d) $\dfrac{d}{dt}(\csc(t))$.

3. Utilice la regla de la cadena para hallar $\dfrac{dy}{dx}$ si:

   a) $y = \sin(2x^2 + 3x + 7)$.

   b) $y = \ln(\cos(x^2 + 3))$.

   c) $y = \tan^2(x^3 - 2x)$.

   d) $y = e^{\cot(x)}$.

   e) $y = 4\sin^2(\cos(3x - 7))$.

   f) $y = \sin(\sin(\sin(x)))$.

4. Calcule $f'(c)$ si:

   a) $f(x) = \ln(\cos x)$ y $c = -\pi/4$.

   b) $f(x) = e^{\tan x}$ y $c = \pi/4$.

   c) $f(x) = \dfrac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ y $c = \pi$.

5. Identifique cada uno de los siguientes límites como una derivada y obtenga su valor:

   a) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(\pi + h)}{h}$.

   b) $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos(x)}{x - \pi/2}$.

6. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de $\sin x$ y $\cos x$ en el punto común $P_0 = (\pi/4, 1/\sqrt{2})$. Ilustre.

7. Determine A, B y C tales que $f(x) = A\sin x + B\cos x + C$ satisfaga: $f(0) = 5$, $f(\pi/2) = 1$ y $f'(0) = 3$.

Capítulo II

OPTIMIZACIÓN Y BOSQUEJO DE GRÁFICAS

II.1. Funciones crecientes y decrecientes

1. Suponga que $f'(x) = x^2 - 7x + 12$. Determine los intervalos en donde la gráfica de la función f es creciente y donde es decreciente.

2. Sea $f(x) = (x^2 - 1)^5$. Determine los intervalos donde la gráfica de la derivada $f'(x)$ es creciente y donde es decreciente.

3. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 17$.

4. Construya un polinomio de grado 3 tal que sea: creciente en $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$, decreciente en $(-2, 1)$ y cuya gráfica pase por el punto $(0, 1)$,

5. Determine el dominio de $f(x) = x^{1/2}(2 - x)^{3/2}$ así como los intervalos donde la gráfica de f es creciente y donde es decreciente.

II.2. Concavidad y puntos de inflexión

1. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, también los intervalos de concavidad positiva y negativa así como las coordenadas de los puntos críticos y de inflexión de:

   a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$.
   b) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 2$.
   c) $f(x) = x^{3/2}$.
   d) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

e) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$.

f) $f(x == \dfrac{2}{1+x^2}$.

2. Muestre que la gráfica de $f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (A \neq 0)$ no posee puntos de inflexión. ¿Qué representa la gráfica de f?

3. Proporcione un ejemplo de una función que sea: creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, no sea diferenciable en $x = 0$ y cuya gráfica tenga un punto de inflexión cuya abcisa sea $x = 0$.

4. Muestre que $f(x) = Px^3 + Qx^2 + Rx + S \quad (P \neq 0)$ tiene un único punto de inflexión cuya abcisa es $x = \dfrac{-\mathrm{Q}}{3P}$.

5. Muestre con diversos ejemplos que la condición $f''(x_0) = 0$ no es ni necesaria ni suficiente para que el punto $(x_0, f(x_0))$ sea un punto de inflexión de la gráfica de f.

II.3. Gráficas de funciones

1. Para cada una de las funciones siguientes:

   a) Indique para qué valores de x es creciente y/o decreciente.
   b) Indique para qué valores de x tiene concavidad positiva y/o negativa.
   c) Encuentre sus puntos críticos.
   d) Encuentre sus extremos relativos y puntos de inflexión.
   e) Encuentre sus asíntotas verticales y/o horizontales.
   f) Indique su dominio y su rango.
   g) Dibuje su gráfica.

      1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.
      2) $f(x) = 2 + (x-1)^3$.
      3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$.
      4) $f(x) = x^{2/3}$.
      5) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$.
      6) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 100$.
      7) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$.
      8) $f(x) = (x^2 - 1)^5$.
      9) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x+1}$.
      10) $f(x) = 6x^2 + \dfrac{12000}{x}$.

11) $f(x) = 1 + x^{1/3}$.
12) $f(x) = 2 + (x-1)^{2/3}$.
13) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$.
14) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
15) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$.
16) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$.
17) $f(x) = 1 - \dfrac{6}{2-e^{3x}}$.

2. Esboce la gráfica de una función continua que tenga todas las propiedades siguientes:

   a) $f'(x) > 0$ cuando $x < -5$ y cuando $x > 1$, $f'(x) < 0$ cuando $-5 < x < 1$, $f(-5) = 4$ y $f(1) = -1$.

   b) $f'(x) < 0$ cuando $x < -1$, $f'(x) > 0$ cuando $-1 < x < 3$ y cuando $x > 3$, $f'(-1) = 0$ y $f'(3) = 0$.

   c) $f'(x) > 0$ cuando $-1 < x < 3$ y cuando $x > 6$, $f'(x) < 0$ cuando $x < -1$ y cuando $3 < x < 6$, $f'(-1) = 0$ y $f'(6) = 0$, $f'(x)$ no está definida en $x = 3$.

   d) $f'(x) > 0$ cuando $x < -1$ y cuando $x > 3$, $f'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 3$, $f'(x) < 0$ cuando $x < 2$, $f'(x) > 0$ cuando $x > 2$.

3. Trace la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes propiedades:

   a) f es continua en todo punto de $\mathbb{R}$.

   b) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$.

   c) $f'(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (3, \infty)$.

   d) $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ y $f''(x) < 0$ en $(-1, 3)$.

   e) $f(0) = 0 = f(2)$ y $f(1) = 1$.

4. Hallar el máximo y mínimo absolutos de la función:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$$

   en el intervalo $-3 \leq x \leq 0$.

5. La derivada de cierta función es: $f'(x) = x^2 - 4x$.

   a) ¿En qué intervalos es f creciente y/o decreciente?

   b) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia arriba y/o hacia abajo?

   c) Halle las abcisas de los extremos relativos y de los puntos de inflexión de f.

6. La derivada de cierta función es: $f'(x) = x^2 - 2x - 8$.
   a) ¿En qué intervalos es f creciente y/o decreciente?
   b) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia arriba y/o hacia abajo?
   c) Halle las abcisas de los extremos relativos y de los puntos de inflexión de f.

7. Sea $f(x) = \dfrac{-4x^3 + 12x^2 + x - 3}{(x-3)(2x+1)}$. Determine la ecuación de cada una de sus asíntotas (tome en cuenta la posibilidad de raíces comunes).

II.4. Aplicaciones de máximos y mínimos

NOTA: Use el criterio de la segunda derivada en cada uno de los ejercicios que así lo requiera.

1. Sea $f : [-1, 8] \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = 12x^5 - 75x^4 - 280x^3 + 10$. Determine las coordenadas de todos los puntos críticos de f y el valor máximo y mínimo de la función en $[-1, 8]$.

2. La policía federal de caminos ha estado registrando la velocidad del tránsito en la salida de la autopista a Toluca. Los datos sugieren que entre la 1:00 y las 6:00 p.m. en un día normal de la semana, la velocidad del tránsito en la salida es aproximadamente de:
$$v(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 40$$
kilómetros por hora, donde t es el número de horas desde el mediodía. ¿En qué momento entre la 1:00 y las 6:00 p.m. el tránsito es más rápido, en qué momento es más lento y cuáles son las velocidades correspondientes?

3. La relación de demanda de cierto artículo es: $q + \sqrt{p} = 12$ mientras que el costo está dado por: $C(q) = 5q^3 - 12q^2 - 36q$. Determine:
   a) El número de unidades q que maximizan la utilidad.
   b) El precio p y el ingreso correspondiente a la utilidad máxima.

4. Cuando se producen q unidades de un cierto artículo, el costo total de fabricación es de:
$$C(q) = 3q^2 + 5q + 75$$
miles de pesos. ¿A qué nivel de producción será menor el costo medio por unidad y cuál es éste?

5. El costo de mantenimiento de cierta flotilla de automóviles se ajusta a la siguiente función: $C(t) = e^{t-6} + 2$ mientras que el valor comercial de la flotilla es $V(t) = e^{-t}$. La suma de las dos funciones da como resultado la función de reposición de la flotilla: $R(t) = C(t) + V(t)$ donde t se mide en años. Determine el tiempo óptimo y el valor óptimo correspondiente (el óptimo ocurre cuando $R(t)$ es mínimo).

6. ¿Para qué valor de x en $[-1, 4]$ está más inclinada la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la gráfica en ese punto?

7. Una proyección a 5 años en la tendencia de cierta población señala que dentro de t años, la población será $P(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 50$ miles de personas:

   a) ¿En qué momento durante el período de 5 años, crecerá la población con mayor rapidez?

   b) ¿En qué momento durante el período de 5 años, crecerá la población con menor rapidez?

8. En cierta fábrica, el costo de puesta a punto es proporcional al número de máquinas utilizadas, y el costo de operación es inversamente proporcional al número de máquinas utilizadas. Demostrar que el costo total es mínimo cuando el costo de puesta a punto es igual al costo de operación.

9. Un fabricante puede producir televisores a un costo de 250 dólares cada uno y estima que si se venden a x dólares cada uno, los consumidores comprarán $500 - x$ televisores por día. ¿A qué precio debe vender los televisores el fabricante para maximizar el beneficio, cuántos televisores debe vender y cuál es el máximo beneficio?

10. Multivisión ha hecho un estudio de los hábitos de sus suscriptores entre las 5:00 p.m. y medianoche. El estudio indica que el porcentaje de la población adulta local que sintoniza Multivisión x horas después de las 5:00 p.m. es: $f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240)$.

    a) ¿En qué momento entre las 5:00 p.m. y medianoche está sintonizado Multivisión por el mayor número de personas?

    b) ¿En qué momento entre las 5:00 p.m. y medianoche está sintonizado Multivisión por el menor número de personas?

11. Una ley económica establece que el beneficio se maximiza cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal.

    a) Use la teoría de extremos para explicar por qué esta ley es cierta.

    b) ¿Qué hipótesis sobre la forma de la curva de beneficio están implícitas en esta ley?

12. Una compañía de autobuses alquila un autobús de 50 plazas a grupos de 35 o más personas. Si un grupo contiene exactamente 35 personas, cada persona paga \$600 pesos. En grupos mayores, la tarifa de todos se reduce en \$100 pesos por cada persona que sobrepase las 35. Determinar el tamaño del grupo para el cual los ingresos de la compañía serán mayores así como los ingresos máximos.

13. (Modelo de inventario) Por cada cargamento de materiales en bruto, un fabricante debe pagar gastos de pedido para cubrir empaque y transporte. Cuando llegan los materiales en bruto deben ser almacenados hasta que se necesiten, por lo que hay un costo de almacenamiento. Si cada cargamento de materiales en bruto es grande, son necesarios pocos cargamentos y los costos de pedido serán bajos, pero los costos de almacenamiento, sin embargo serán altos. Si cada cargamento es pequeño, los costos de pedido serán altos poruqe se necesitarán muchos cargamentos, pero los costos de almacenamiento serán bajos. Así, el costo total está dado por:

$$C_T = C_A + C_p + C$$

donde C_A es el costo de almacenamiento, $C_p$es el costo del pedido y C es el costo total del material. Un fabricante desearía determinar el tamaño del cargamento que minimizaría el costo total.

    a) **Ejemplo:** Un fabricante de bicicletas compra 6,000 llantas al año a un distribuidor y está tratando de decidir la frecuencia de sus pedidos. Los gastos de pedido son de 20 dólares por cargamento, el costo de almacenamiento es de 96 centavos por llanta por año y cada llanta cuesta 25 centavos. Suponga que las llantas se usan a un ritmo constante a lo largo del año, y que cada cargamento llega justo cuando el cargamento precedente ha sido terminado. ¿Cuántas llantas debería pedir cada vez el fabricante para minimizar el costo? (NOTA: Si x representa el número de llantas en cada pedido, entonces con objeto de simplificar se puede suponer que en todo momento se tienen $x/2$ llantas almacenadas).

14. Hay 320 metros de cerca para encerrar un terreno rectangular.

    a) ¿Cómo debería usarse la cerca para que el área encerrada sea la más grande posible?

    b) ¿Será cierto que el rectángulo de perímetro dado que encierra mayor área es el cuadrado?

15. Se ha observado que la proporción de la población que se entera de un rumor después de un tiempo t es igual a: $\dfrac{t^2}{5(1+t^2)^2}$ (t está medido en días y el rumor empieza en $t = 0$).

    a) Encuentre la mayor y menor proporción de población que llega a enterarse del rumor, así como los tiempos en los cuales la proporción de individuos enterados crece más rápidamente y más lentamente.

    b) ¿A la larga, qué ocurre con la proporción de gente enterada?

16. Una librería puede obtener un libro a un costo de \$30 por libro. La librería ha estado vendiendo el libro a \$150 por ejemplar y a este precio,

ha estado vendiendo 200 ejemplares por mes. La librería está planeando bajar su precio para estimular las ventas y estima que por cada \$10 pesos de reducción en el precio se venderán cada mes 20 libros más.

a) ¿A qué precio debería vender el libro la librería para generar el mayor beneficio posible?

b) ¿Qué cantidad adicional de libros son vendidos al nuevo precio?

c) ¿Cuál es el mayor beneficio?

17. Cada máquina de una maquiladora puede producir 50 unidades por hora. El costo de puesta a punto es de 80 dólares por máquina y el costo de operación es de 5 dólares la hora por todas las máquinas. ¿Cuántas máquinas deben usarse para producir 8,000 unidades al menor costo posible?

18. Se estima que el costo de construcción de un edificio de oficinas que tiene n pisos de altura es de:

$$C(n) = 2n^2 + 500n + 600$$

miles de dólares. ¿Cuántos pisos deberá tener el edificio para minimizar el costo medio por piso?

19. Un estudio de productividad del turno matutino en una fábrica indica que un trabajador medio que llega al trabajo a las 8:00 a.m. habrá producido:

$$Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$$

unidades t horas después. ¿En qué momento de la mañana el trabajador está operando más eficientemente? (NOTA: el momento de máxima eficacia es igual al momento en el que el ritmo de producción se maximiza. Tal momento es llamado en ocasiones el punto de los beneficios decrecientes).

20. La función de demanda de cierto artículo está dada por: $p = 15e^{-x/3}$ para $0 \leq x \leq 8$ donde p es el precio por unidad y x está dado en miles de unidades. Determine el precio y la cantidad que maximicen el ingreso, así como dicho ingreso máximo.

21. Un fabricante puede producir cámaras a un costo de 40 dólares cada una y estima que si se venden en p dólares cada una, los consumidores comprarán aproximadamente:

$$D(p) = 800e^{-0.01p}$$

cámaras por semana.

a) ¿A qué precio debe vender el comerciante las cámaras para maximizar el beneficio?

b) ¿A cuánto asciende el mayor beneficio y aproximadamente cuántas deben ser vendidas para alcanzarlo?

22. Considere la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ cuya gráfica representa una parábola.

    a) Usando la primera derivada determine las coordenadas del vértice.

    b) Usando la segunda derivada verifique que la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo de acuerdo a que $a > 0$ o $a < 0$ respectivamente.

23. Determine las constantes A, B yC de modo que la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ tenga todas las siguientes propiedades:

    a) Un máximo relativo en $x = -2$.

    b) Un mínimo relativo en $x = 1$.

    c) Un punto de inflexión en $x = -1/2$.

    d) La gráfica pasa por el punto $(2, 6)$.

II.5. Análisis incremental. Aproximación por diferenciales.

1. El costo total en dólares de fabricar x unidades de un cierto artículo es:

$$f(x) = 3x^2 + 5x + 10.$$

   El nivel actual de producción es de 40 unidades. Estime cómo cambiará el costo total si se producen 40.5 unidades y compare con el cambio real.

2. Se ha proyectado que dentro de t años, la tirada de un periódico local será de:

$$c(t) = 100t^2 + 400t + 5000.$$

   Estime la cantidad en que crecerá la tirada en los próximos 6 meses y compare con el cambio real.

3. Usa diferenciales para aproximar $\sqrt{99.8}$. Compare con el valor que proporciona tu calculadora.

4. La venta anual de un nuevo video se ajusta a la ecuación $V(t) = 3te^{-t}$ donde t es el tiempo en años desde su introducción y $V(t)$ son las ventas correspondientes:

    a) Use diferenciales para estimar en cambio en las ventas durante el segundo trimestre desde que se inicia la introducción del video.

    b) ¿Cuál es el cambio real en las ventas durante ese período? Compare con el valor anterior.

5. La producción diaria en cierta fábrica es de $Q(L) = 900\sqrt[3]{L}$ unidades, donde L representa el tamaño de la fuerza laboral medida en horas-trabajador. Normalmente se utilizan 1000 horas-trabajador cada día. Estime la cantidad de horas-trabajador adicionales necesarias para incrementar la producción diaria en 15 unidades.

6. El editor de cierto texto estima que si se distribuyen x miles de ejemplares de cortesía a los profesores, las ventas serán de $V(x) = 20 - 15e^{-0.2x}$ miles de dólares durante el primer año. En la actualidad, el editor planea distribuir10,000 ejemplares de cortesía. Estime el aumento en las ventas si se distribuyen 500 ejemplares adicionales y compare con el incremento real en las ventas.

7. Se ha proyectado que dentro de t años, la población de una comunidad suburbana será de:
$$P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$$
miles de personas. ¿Cuánto crecerá aproximadamente la población durante el próximo trimestre y cuál es el cambio real?

8. Un estudio de productividad sobre el turno matutino en una cierta maquiladora indica que un trabajador medio que llega al trabajo a las 8:00 a.m. habrá ensamblado:
$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$$
televisores x horas después. ¿Cuántos televisores ensamblará realmente el trabajador enre las 9:00a.m. y las 9:15 a.m.?

9. El costo total de un fabricante es de
$$C(q) = 0.1q^3.0.5q^2 + 200$$
miles de pesos, donde q es el número de unidades producidas. El nivel de producción actual es de 40 unidades, y el fabricante planea disminuirlo a 38 unidades. Estime cuánto cambiará el costo total como consecuencia.

10. Se estima que la producción semanal de cierta planta es: $Q(x) = -x^2 + 2100x$ unidades, donde x es el número de trabajadores empleados en la planta. Usualmente hay 60 trabajadores empleados en la planta.

    a) Estime el cambio en la producción si la fuerza de trabajo se reduce a 55 trabajadores.

    b) Estime el cambio en la producción si la fuerza de trabajo de incrementa a 62 trabajadores.

11. En cierta fábrica, la producción diaria es de $60K^{1/2}$ unidades, donde K representa la inversión de capital medida en unidades de 10,000 pesos. La inversión actual de capital es de 9,000,000 pesos (esto es $K = 900$). Estime el efecto que una inversión adicional de capital de 8,000 pesos tendrá en la producción diaria.

12. En cierta fábrica, la producción diaria es de $3000K^{1/2}L^{1/3}$ unidades, donde K representa la inversión de capital de la firma medida en unidades de 1,000 dólares y L representa la fuerza de trabajo medida en horas de trabajo. Supongamos que el capital invertido actualmente es de 400,000 dólares y que se usan cada día 1,000 horas de trabajo. Estime el efecto sobre la producción si la fuerza de trabajo se reduce a 940 horas sin modificar el capital invertido.

II.6. Aproximación de segundo orden

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)(\Delta x)^2$$

En los siguientes ejercicios, aproxime el valor pedido mediante diferenciales y usando las aproximación de segundo orden. Compare los resultados entre sí y con el valor que ofrece su calculadora.

1. $\sqrt{48}$
2. $\sqrt[4]{82}$
3. $\sin(31^o)$ (NOTA: convierta en radianes).
4. $(2.012)^4$

II.7. Diferenciación implícita

1. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ a través del punto P_0 , si la curva queda implícitamente definida por la relación:

   a) $x = \cos(x^2y) + 3y^2 - 4$ y $P_0 = (0, 1)$.
   b) $32y = (x^3 + y)^2$ y $P_0 = (2, 8)$.
   c) $9x^2 + 4y^2 = 36$ y $P_0 = \left(\sqrt{2}, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$.
   d) $x^2 - x\sqrt{xy} = 3y - 12$ y $P_0 = (4, 4)$.

(Verifique antes que P_0 pertenece a la relación) .

2. Hallar la pendiente de la recta que es tangente a la curva $x^2y^3 + 8 = 5y^3$ cuando $x = 2$.

3. Se estima que el ingreso anual de cierta revista por publicidad será de

$$R(x) = 0.5x^2 + 3x + 160$$

   millones de pesos cuando su circulación sea de x miles. La circulación de la revista es actualmente de 10,000 y está creciendo a un ritmo de 2,000 por año. ¿A qué ritmo está creciendo el ingreso por publicidad?

4. Usando diferenciación implícita, muestre que las rectas tangentes a las curvas: $y^2 = 4x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 14$ en el punto común $P_0 = (1, 2)$ son perpendiculares.

5. Obtenga $\dfrac{dy}{dx}$ para $x = 6$ en la relación $y^3 + 3x^2 + 17 = 0$ como sigue:

    a) Derivando implícitamente.

    b) Despejado y luego derivando (El resultado debe ser el mismo que el del inciso anterior).

6. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ por diferenciación implícita. (NOTA: Si y puede despejarse explícitamente como función de x, derive directamente también y verifique que el resultado coincide con el de la diferenciación implícita).

    a) $3x + 4y = 8$ (Recta).

    b) $x^2 + y^2 = 25$ (Circunferencia).

    c) $x^2 + y = x^3 + y^2$.

    d) $x^3 + y^3 = 9xy$ (Folio de Descartes).

    e) $xy = 1$ (Hipérbola equilátera).

    f) $y^2 + 2xy^2 - 3x + 1 = 0$.

    g) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$.

    h) $(2x + y)^3 = x$.

    i) $(x - 2y)^2 = y$.

    j) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ (Lemniscata de Bernoulli).

    k) $4x^2 + 9y^2 = 36$ (Elipse).

7. Determine las coordenadas de los puntos a través de los cuales la curva $x^2 + y^2 = xy + 12$ tiene una:

    a) Tangente horizontal.

    b) Tangente vertical.

8. Muestre que la recta tangente a la curva cuya ecuación es $4y = (y^2 + x)^2$ en el punto $P_0 = (-3, 1)$ es perpendicular a la recta $y = 3x + 13$.

9. Suponga que x y y representan cantidades de dos materias primas necesarias para un proceso productivo y que la ecuación:

    $$60x^{3/4}y^{1/4} = 3240$$

    unidades describe las cantidades x y y para las cuales la producción es de 3240 unidades. Use la derivación implícita para calcular las razones marginales cruzadas $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dx}{dy}$ en $x = 81$ y $y = 16$.

10. Suponga que la relación de demanda de cierto producto es $p+2x+xp=38$ en donde x está dado en miles de unidades y p es el precio en dólares por unidad. Suponga también que el precio (y en consecuencia la demanda) cambia semanalmente, esto es, p es función del tiempo. ¿A qué rimto está cambiando la demanda cuando $x=4$ si el precio está disminuyenco a razón de 0.40 dólares por semana?

11. Igual que el anterior, pero ahora halle el ritmo de cambio de la demanda si el precio aumenta a razón de 0.20 dólares por semana.

II.8. Diferenciación logarítmica

Ejemplo:
Diferencie la función:

$$f(x)=\sqrt[3]{x+1}$$

Solución:
Utilizando el logaritmo natural de f:

$$\ln f(x)=\frac{1}{3}\ln(x+1)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{3(x+1)}$$

Resolviendo para $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{3(x+1)}\sqrt[3]{x+1}$$

1. Utilizando la diferenciación logarítmica obtenga la derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=e^{5x}$.
   b) $f(x)=3e^{4x+1}$.
   c) $f(x)=x^2e^x$.
   d) $f(x)=xe^{-x}$.
   e) $f(x)=x^2\ln x$.
   f) $f(x)=x\ln\sqrt{x}$.
   g) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.
   h) $f(x)=e^x\ln x$.
   i) $f(x)=\ln e^{2x}$.
   j) $f(x)=e^{(\ln x+x\ln 3x)}$.

k) $f(x) = \dfrac{6}{1+e^{-x}}$.

l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

m) $f(x) = \dfrac{(x+2)^5}{(3x-5)^6}$.

n) $f(x) = 2^x$.

ñ) $f(x) = x^x$.

2. Elija 8 funciones en el ejercicio anterior, derívelas directamente y compruebe que el resultado coincide con el resultado de la diferenciación logarítmica.

3. Calcule $f'(c)$ usando diferenciación logarítmica si:

   a) $f(x) = (x+1)^x + (e^x)^x$ y $c = 0$.

   b) $f(x) = (x)^{e^x} + (x^e)^x$ y $c = 1$.

   c) $f(x) = \dfrac{(x^3)^{1/5}}{(3x+2)^5}$ y $c = -1$.

4. Sea $y = x^r$ con $r = \dfrac{m}{n}$ y m, n números enteros. Use diferenciación logarítmica para probar que $\dfrac{dy}{dx} = rx^{r-1}$. (Sugerencia: como $y = x^{m/n}$ entonces $y^n = x^m$. Ahora use diferenciación logarítmica).

5. Obtenga $f'(x)$ si:

   a) $f(x) = x^{2x+1}$ si $x > 0$.

   b) $f(x) = (\ln \sqrt{x})^x$ si $x > 0$.

6. Para cada una de las funciones siguientes:

   a) Indique para qué valores de x es creciente y/o decreciente.

   b) Indique para qué valores de x tiene concavidad positiva y/o negativa.

   c) Encuentre sus puntos críticos.

   d) Encuentre sus extremos relativos y puntos de inflexión.

   e) Encuentre sus asíntotas verticales y/o horizontales.

   f) Indique su dominio y su rango.

   g) Dibuje su gráfica.

      1) $f(x) = (x+1)^{5/3}$.

      2) $f(x) = \dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$.

3) $f(x) = xe^{-2x}$.
4) $f(x) = e^x - e^{-x}$.
5) $f(x) = \dfrac{4}{1+e^{-x}}$.
6) $f(x) = \ln(x^2+1)$.
7) $f(x) = 700 - 400e^{-0.5x}$.
8) $f(x) = e^x + e^{-x}$.
9) $f(x) = x - \ln x$.
10) $f(x) = x^2e^{-x}$.

7. Se estima que dentro de t años la población de cierto país será de:

$$P(t) = \frac{160}{1+8e^{0.01t}}$$

millones de personas. ¿Cuándo estará creciendo más rápidamente la población?

8. Un fabricante puede producir radios a un costo de 5 dólares cada uno y estima que si se venden por x dólares cada uno, los consumidores comprarán aproximadamente $1000e^{-0.1t}$ radios por semana.

   a) ¿A qué precio debería vender el fabricante los radios para maximizar el beneficio?

   b) ¿Cuál es el máximo beneficio?

   c) Aproximadamente, ¿cuántos radios se venden al precio indicado en a) ?

II.9. Elasticidad de la demanda

Para un artículo dado, sea p el precio por unidad y x el número de unidades que se adquirirán durante un período determinado de tiempo al precio p, y sea $x = f(p)$. La elasticidad de la demanda por lo regular se denota con la letra griega η (eta) y se define como:

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{pf'(p)}{f(p)}.$$

Note que se deriva con respecto a p. Si $R = px$ representa el ingreso, entonces se obtiene: $\dfrac{dR}{dp} = x(1+\eta)$ y $\dfrac{dR}{dx} = p\left(1+\dfrac{1}{\eta}\right)$. Estas fórmulas permiten determinar cambios en el ingreso total correspondientes a pequeños cambios de p y de x respectivamente si se conoce la elasticidad.

1. Calcule la elasticidad de la demanda para las relaciones de demanda siguientes:

a) $x = 100(5 - p)$.

b) $x = 50(4 - \sqrt{p})$.

c) $x = 200\sqrt{9 - p}$.

2. Si la relación de demanda es: $x = 1000 - 5p$, calcule la elasticidad de la demanda como:

   a) $p = 5$.

   b) $p = 10$.

   c) $p = 15$.

3. En el caso de la relación de demanda:

$$\frac{x}{600} - \frac{p}{12} = 1$$

   determine los valores de p y las correspondientes demandas para los cuales:

   a) $\eta = -1$.

   b) $\eta = -2$.

   c) $\eta = -\frac{2}{3}$.

4. La relación de demanda es $x = k(1-p-p^2)$ ($k > 0$ constante). Determine el valor de p y la correspondiente demanda que haga unitaria a la elasticidad de la demanda.

5. Si la relación de demanda es $x^2 + p^2 = 25$ determine la elasticidad de la demanda cuando $p = 4$.

6. Con respecto a la relación de demanda $x^2 + px + p^2 = a$

   a) Calcule la elasticidad de la demanda cuando $p = 2$ y $a = 7$.

   b) Calcula la elasticidad de la demanda cuando $p = 2$ y $a = 12$.

7. Para cualquier función de demanda lineal $p = mx + b$ con $m < 0$ y $b > 0$ verifique que la elasticidad de la demanda es:

   a) elástica si $p > \dfrac{b}{2}$.

   b) inelástica si $p < \dfrac{b}{2}$.

   c) unitaria si $p = \dfrac{b}{2}$.

8. La relación de demanda de cierto producto es $p = 10 - 0.2\sqrt{x}$. Utilice la elasticidad de la demanda para determinar si un pequeño aumento en el precio conlleva a un aumento o a una disminución en el <u>ingreso</u> si la demanda es:

a) $x = 900$.

b) $x = 1600$.

9. La relación de demanda es $x = 500(10 - p)$. Utilice la elasticidad de la demanda para determinar si un pequeño aumento en la demanda da lugar a un aumento o a una disminución en el ingreso si el precio es:

    a) $p = 2$.

    b) $p = 6$.

Capítulo III

INTEGRACIÓN

III.1. Antiderivadas

1. Halle la función cuya tangente tiene una pendiente $x^3 - \dfrac{2}{x^2} + 2$ para toda $x \neq 0$ y cuya gráfica pasa por el punto $(1, 3)$.

2. Encontrar la regla de la función F cuya tangente tiene pendiente $3x^2 + 1$ para cada valor de x y cuya gráfica pasa por el punto (2,6).

3. Se estima que dentro de x meses la población de una cierta ciudad estará cambiando a un ritmo de $2 + 5\sqrt{x}$ personas por mes. La población actual es de 5000.

   a) ¿Cuál será la población dentro de 9 meses?

   b) ¿Cuánto habrá crecido la población entre el noveno y el trigésimo sexto mes?

4. Se estima que dentro de t meses, la población de cierto municipio cambiará a razón de $4 + 5t^{2/3}$ personas por mes. Si la población actual es de 10,000 personas, ¿cuál será la población dentro de 8 meses?

5. Un fabricante considera que el costo marginal de un producto es $6q + 1$ dólares por unidad cuando se han producido q unidades. El costo total (incluidos los costos indirectos) de producción de la primera unidad es de 130 dólares. ¿Cuál es el costo total de producción de las primeras 10 unidades?

6. El ingreso marginal de una empresa por su producto es $I'(x) = 30x^{1/2} + 4x^{1/3}$ dólares:

   a) Determine la función de ingreso del producto (Recuerde $I(0) = 0$) .

   b) ¿Cuál es el ingreso si se venden 64 unidades?

7. El beneficio marginal (**ingreso marginal menos costo marginal)** de una cierta compañía es de $100-2q$ dólares por unidad cuando se producen q unidades. Si el beneficio de la compañía es de 700 dólares cuando se producen 10 unidades, ¿cuál es el mayor beneficio posible de la compañía y a qué nivel de producción alcanza éste?

8. Encuentre la regla de una función cuya gráfica tiene un mínimo relativo cuando $x = 1$ y un máximo relativo cuando $x = 4$.

9. El valor de reventa de cierta maquinaria industrial decrece a un ritmo que cambia con el tiempo. Cuando la maquinaria tiene t años, el ritmo al que está cambiando su valor es $220(t-10)$ dólares por año. Si la maquinaria se compró nueva por 12,000 dólares,

   a) ¿Cúanto valdrá 10 años después?
   b) ¿El valor que encontró en a) es el menor valor de reventa?
   c) ¿Qué ocurre con el valor de reventa después de los 10 años? ¿Es razonable?

10. El ingreso marginal de una empresa está dado por:

$$I'(x) = 10 - 0.02x$$

dólares por unidad cuando se producen x unidades.

   a) Halle la función de ingreso.
   b) Determine la relación de demanda.
   c) Si la función de costo está dada por $C(x) = 5x - 0.005x^2 + 1000$ dólares, determine el número de unidades y el precio correspondiente que maximicen el beneficio y proporcione éste.

III.2. Integrales indefinidas

1. En los siguientes incisos, obtenga la antiderivada pedida. Compruebe sus respuestas mediante diferenciación:

   a) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx$
   b) $\int (x^{1/2} + x^{1/3} + x^{-1/2})\, dx$
   c) $\int (x + \frac{1}{x})^2\, dx$
   d) $\int (2x+3)^5\, dx$

2. Igual que en el problema anterior pero ahora con:

   a) $\int \frac{2}{2x+3}\, dx$

b) $\int x(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2})\, dx$

c) $\int x(\cos(x^2 + 3)\, dx$

d) $\int \tan(x)\, dx$

3. Suponga que $F'(x) = e^{-x^2}$ y que $G'(x) = \dfrac{e^x}{x}$, escriba $2F(x) + 3G(x)$ como una antiderivada.

III.3. Aplicaciones de la integral indefinida

1. El valor de reventa de cierta maquinaria decrece a un ritmo que depende del tiempo. Si la maquinaria tiene t años, el ritmo al que está cambiando su valor es de $220(t - 10)$ dólares por año. Si la maquinaria se compró nueva por 12,000 dólares, ¿Cuál será su valor de reventa 10 años después?

2. Un árbol ha sido trasplantado y después de x años está creciendo a un ritmo de $1 + \dfrac{1}{(x+1)^2}$ metros por año. Después de 2 años, ha alcanzado una altura de 5 metros. ¿Qué altura tenía cuando fue trasplantado?

3. Determine el polinomio de grado 3 de tal modo que su gráfica tenga un mínimo relativo cuando $x = 2$, un máximo relativo cuando $x = 4$, un punto de inflexión si $x = 3$ y tal que su gráfica pase por el origen.

4. La utilidad marginal de cierta empresa es $U'(x) = 100 - 2x$ dólares por unidad cuando se producen x unidades. Si la utilidad de la compañía es de 700 dólares cuando se producen 10 unidades, ¿cuál es la mayor utilidad posible de la empresa y a qué nivel de producción se alcanza ésta?

5. El ingreso marginal de cierta compañía está dado por: $I'(x) = 10 - 0.02x$ dólares cuando se producen x unidades. Determine:

   a) La función de ingreso.

   b) La relación de demanda

   c) Suponga además que la función de costo está dada por $C(x) = 5x - 0.005x^2 + 1000$ dólares. Determine el número de unidades y el precio correspondiente que maximicen la utilidad y menciona cuál es ésta.

6. Se ha proyectado que dentro de t años, la demanda de azúcar refinada de cierto país estará cambiando a un ritmo de $e^{0.02t}$toneladas por año. Si la demanda actual es de 50 toneladas,

   a) ¿Cuánta azúcar se consumirá en el país en los próximos 10 años?

   b) ¿Cuándo se habrá duplicado la demanda inicial?

7. Se estima que dentro de x años el valor de una hectárea de tierra de cultivo estará aumentando a un ritmo de

$$\frac{0.4x^3}{\sqrt{0.2x^4 + 800}}$$

dólares por año. Si la tierra tiene actualmente un valor de 500 dólares por hectárea, ¿cuánto valdrá dentro de 5 años?

8. Encuentre la ecuación de la función cuya tangente tiene una pendiente de $x\sqrt{x^2+5}$ para cada valor de x y cuya gráfica pasa por el punto (2,10).

III.4. Integración por partes

1. Encuentre la antiderivada utilizando el método de integración por partes:

   a) $\int xe^x\,dx$
   b) $\int x\sqrt{x+5}\,dx$
   c) $\int \ln x\,dx$
   d) $\int x^2e^x\,dx$
   e) $\int xe^{-x}\,dx$
   f) $\int xe^{2x}\,dx$
   g) $\int x\ln x\,dx$
   h) $\int x^2\ln x\,dx$
   i) $\int x^3e^{x^2}\,dx$
   j) $\int x^3\ln x\,dx$
   k) $\int (2x+1)e^{3x}\,dx$
   l) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

2. Calcule la antiderivada indicada y compruebe su respuesta derivando:

   a) $\int xe^{x/2}dx$
   b) $\int x\ln x^2dx$
   c) $\int x(x+1)^{10}dx$
   d) $\int x^2e^{3x}dx$

3. Integre por partes dos veces para obtener:

   a) $\int x^3(x^2-1)^{10}dx$
   b) $\int x^7(x^4+5)^8dx$

4. Use la fórmula de integración por partes para obtener la siguiente fórmula de reducción de grado:

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

En seguida úsela tres veces para obtener $\int x^3 e^{5x} dx$.

5. Halle el cambio de variable adecuado para encontrar las antiderivadas siguientes:

   a) $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$
   b) $\int \sin \sqrt{x}\, dx$
   c) $\int x(x^2-1)\ln(x^2-1)\, dx$

6. Después de t horas en el trabajo, un obrero industrial puede producir a un ritmo de $100te^{-0.5t}$ unidades por hora.

   a) ¿Cuántas unidades producirá el trabajador durante las primeras 3 horas?
   b) ¿Cuántas unidades producirá en la tercera hora?

7. Después de t semanas, las contribuciones en respuesta a una campaña financiera local habían llegado a un ritmo de $2000te^{-0.2t}$ dólares por semana. ¿Cuánto dinero se reunió durante las primeras 5 semanas?

8. (Costo marginal) Una empresa tiene un costo marginal por unidad de su producto dado por

$$C'(x) = \frac{5000\ln(x+20)}{(x+20)^2}$$

donde x es el nivel de producción. Si los costos fijos ascienden a $2000, determine la función de costo.

III.5. Método de sustitución

1. Encuentre la antiderivada indicada utilizando el método de integración por sustitución:

   a) $\int (2x+6)^5 dx$
   b) $\int e^{5x} dx$
   c) $\int \sqrt{4x-1}dx$
   d) $\int \dfrac{1}{3x+5}dx$
   e) $\int e^{1-x} dx$
   f) $\int 2xe^{x^2-1} dx$

g) $\int x(x^2-1)^5 dx$

h) $\int \dfrac{2x^4}{x^5+1} dx$

i) $\int \dfrac{\ln 5x}{x} dx$

j) $\int \dfrac{1}{x\ln x} dx$

k) $\int \dfrac{2x\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$

l) $\int \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$

m) $\int x\sin(2x^2) dx$

n) $\int 3x(\sqrt{x^2-1}) dx$

ñ) $\int 6x^4(2x^5+3)^{12} dx$

o) $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

p) $\int x\sin^3(x^2)\cos(x^2) dx$

q) $\int \sin x \sin(\cos x) dx$

r) $\int x^2\cos(x^3+1) dx$

s) $\int \dfrac{\ln x}{x} dx$

t) $\int e^{\sin x}\cos x dx$

2. Calcule por medio de una sustitución adecuada.

   a) $\int x(x+1)^{10} dx$ (Compare con el ejercicio 1, inciso c) de la sección III.4).

   b) $\int x\sqrt{x+5} dx$ (Compare con el ejercicio 4 de la sección III.4).

3. Integre por sustitución:

   a) $\int \dfrac{1}{x\ln x} dx$.

   b) $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

4. Calcule:

   a) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^4+x^3}} dx$ (Factorice x^4 y ponga $u = \dfrac{1}{x}$).

   b) $\int \dfrac{1}{x-\sqrt{x}} dx$ (Factorice $\sqrt{x}$).

5. $\int \frac{x}{(x-5)^6}dx$.

6. Halle el cambio de variable adecuado para encontrar la antiderivada indicada:

   a) $\int \frac{x}{x-1}dx$

   b) $\int x\sqrt{x+1}dx$

   c) $\int \frac{x}{(x-5)^6}dx$

III.6. Tabla de integrales

1. $\int \frac{1}{p^2-x^2}dx = \frac{1}{2p}\ln|\frac{p+x}{p-x}|$

2. $\int \frac{1}{x(ax+b)}dx = \frac{1}{b}\ln|\frac{x}{ax+b}|$, $(b \neq 0)$

3. $\int \frac{1}{x(ax+b)^2}dx = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2}\ln|\frac{ax+b}{x}|$, $(b \neq 0)$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm p^2}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2 \pm p^2}|$

5. $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{1}{a}\ln|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}|$

6. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \int \frac{n}{a}x^{n-1}e^{ax}\,dx$

(NOTA: Se han omitido todas las constantes de integración)

1. Encuentre la antiderivada indicada utilizando la tabla de integrales anterior:

   a) $\int \frac{1}{6-3x^2}dx$

   b) $\int \frac{1}{3x^2-6}dx$

   c) $\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}dx$

   d) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}dx$

   e) $\int x^2e^{5x}dx$

   f) $\int \frac{10}{7x\sqrt{8-2x^2}}dx$

g) $\int \frac{1}{7x - 9x^2} dx$

h) $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{4x - x^3} dx$ (Racionalice)

i) $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 4x + 11}} dx$ (Complete cuadrados)

j) $\int x^2 e^{-0.5x} \, dx$

Capítulo IV

LA INTEGRAL DEFINIDA

IV.1. Integrales definidas

1. Suponga que $\int_{-1}^{4} f(x)dx = 5$, $\int_{2}^{4} f(x)dx = 3$ y $\int_{-1}^{2} g(x)dx = -1$. Obtenga: $\int_{-1}^{2} (3f(x) - 2g(x))dx$.

2. Evalúe:

   a) $\int_2^7 t\sqrt{2+t}\, dt$

   b) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$

   c) $\int_{-3}^{0} \dfrac{3x+1}{\sqrt{1-x}} dx$

   d) $\int_0^{\pi^2/2} \sin\sqrt{2t}\, dt$

3. Encuentre la integral indicada:

   a) $\int_0^3 8x(x^2+1)^3\, dx$

   b) $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x} dx$

   c) $\int_0^{\ln 2} xe^x\, dx$

   d) $\int_0^1 (x^4 - 3x^3 + 1)\, dx$

   e) $\int_1^9 (\sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}\, dt$

   f) $\int_{\ln 1/2}^{\ln 2} (e^u - e^{-u})\, du$

   g) $\int_0^1 u^2 e^{2u}\, du$

   h) $\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$

   i) $\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\, dx$

j) $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$

k) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \, dx$

l) $\int_0^1 2x^2 e^{-3x} \, dx$

m) $\int_1^2 (u+1)(u-2)^9 \, du$

4. Determine el valor promedio de $f(x) = 2x^2 - 1$ en el intervalo $[-1, 1]$.

5. Determine la ecuación de la función cuya gráfica tiene en cada punto una recta tangente con pendiente $x\sqrt{x^2+5}$ y pasa por el punto $P_0 = (2, 10)$.

6. En cierto supermercado, el precio actual de la carne molida preferente es de 50 pesos por kilo. Se estima que en las próximas 8 semanas, el precio estará aumentando a una tasa de $0.03\sqrt{x+1}$ pesos por semana.

   a) ¿Cuál será el precio al final de la octava semana?

   b) ¿En cuál de las 8 semanas será mayor el incremento del precio y cuál es éste?

7. Un estudio indica que dentro de x meses la población de cierto pueblo estará creciendo al ritmo de $2 + 6\sqrt{x}$ personas por mes.

   a) ¿En cuánto crecerá la población del pueblo durante los próximos 4 meses?

   b) ¿Durante el noveno mes?

8. En cierta fábrica, el costo marginal es de $3(q-4)^2$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es de q unidades. ¿En cuánto aumentará el costo total de fabricación si el nivel de producción se eleva de 6 a 10 unidades?

9. En cierta comunidad, la demanda de gasolina está creciendo exponencialmente a un ritmo de 5 % por año. Si la demanda actual es de 16 millones de litros por año, ¿cuánta gasolina se consumirá en la comunidad en los próximos 3 años?

10. Cierto pozo petrolífero que produce 400 barriles de petróleo crudo por mes se secará en 2 años. El precio del petróleo crudo es actualmente de 18 dólares por barril y se espera que aumente a un ritmo constante de 3 centavos por barril por mes. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿Cuál será el ingreso futuro total obtenido del pozo?

11. Se calcula que la demanda de un producto industrial estará creciendo exponencialmente a un ritmo anual del 2 %. Si la demanda actual es de 5000 unidades por año y el precio permanece fijo en 400 dólares por unidad:

    a) ¿Qué ingresos recibirá el fabricante de la venta del producto en los próximos dos años?

b) Si el precio aumenta a un ritmo constante de 20 dólares anuales y la demanda es como en a), ¿cuáles serán los ingresos después de 2 años?

12. Después de t horas en el trabajo, un obrero industrial puede producir $100te^{-0.5t}$ unidades por hora.

 a) ¿Cuántas unidades produce un obrero que llega al trabajo a las 8:00 a.m. entre las 10:00 a.m. y mediodía?
 b) ¿Cuál es el número total de unidades que produce en su turno completo de 8 horas suponiendo que no hay interrupciones?

IV.2. Área bajo curvas

1. Encuentre el área bajo la región acotada por:

 a) Las rectas $y = 2x$, $x = 2$ y el eje X.
 b) La curva $y = -x^2 + 4x - 3$ y el eje X.
 c) La curva $y = \sqrt{x}$, las rectas $x = 4$, $x = 9$ y el eje X.
 d) La curva $y = e^x$, las rectas $x = 0$, $x = \ln 1/2$ y el eje X.

2. Halle el área de la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$, la recta $y = 2-x$ y el eje X (Dibuje la región).

3. Halle el área limitada por la curva $y = x^2$, la recta tangente a la curva en $(1, 1)$ y el eje X (Dibuje la región).

4. Demuestre que el área bajo la gráfica de $y = \sin x$ entre 0 y π es igual a 2. Dibuje tal área.

IV.3. Integrales impropias

1. Evalúe:

 a) $\int_0^\infty xe^{-x^2} dx$
 b) $\int_0^\infty x^2e^{-x} dx$

2. Evalúe:

 a) $\int_0^\infty \frac{x^3}{(x^4+1)^2} dx$
 b) $\int_1^\infty \frac{e^{2x^{-1}}}{x^2} dx$

3. Evalúe:

a) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} dx$

b) $\int_1^\infty \frac{1}{t^{1.01}} dt$

4. Evalúe:

   a) $\int_{14}^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} dx$

   b) $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx$

IV.4. Área entre curvas

1. Calcule el área comprendida entre las curvas $y = -x^2$ y $y = x^2 - 8$. Dibuje la región.

2. Calcule el área limitada por las curvas $y = x^3 - 2x^2 + 5$ y $y = x^2 + 4x - 7$. Dibuje la región.

3. Calcule el área de la región acotada por las curvas $y = x^2 + 1$, $y = 2x - 2$ y las rectas $x = -1$ y $x = 2$. Dibuje la región.

4. Después de x horas en el trabajo, un obrero industrial está produciendo

   $$Q_1(x) = 60 - 2(x-1)^2$$

   unidades por hora, mientras que un segundo trabajador está produciendo

   $$Q_2(x) = 50 - 5x$$

   unidades por hora. Si ambos llegan al trabajo a las 8:00 a.m., ¿cuántas unidades más habrá producido hasta el mediodía el primer trabajador que el segundo? **(utilice el área de una región entre dos curvas)**

IV.5. Aplicaciones de la integral definida

1. Las ganancias netas totales generadas por una maquinaria industrial en cierto período de años es la diferencia entre el ingreso total generado por la maquinaria y el costo total de operación y mantenimiento de ésta. Estas ganancias totales pueden ser interpretadas como el área entre dos curvas.

   a) **Ejemplo:** Cuando tiene x años, cierta maquinaria industrial genera ingresos a un ritmo de

   $$R(x) = 5000 - 20x^2$$

   dólares por año y da por resultado unos costos que se acumulan a in ritmo de

   $$C(x) = 2000 + 10x^2$$

   dólares por año.

1) ¿Cuántos años es provechoso el uso de la maquinaria?
2) ¿Cuáles son las ganancias netas totales generadas por la maquinaria durante el período de tiempo obtenido en 1)?
3) Si se continúa indefinidamente con la operación, ¿en qué momento seon cero las ganancias netas?

2. Un estudio revela que el precio del kilo de pollo t meses después del inicio del año era de $p(t) = 30 + t^2 - 0.12t$ pesos por kilo. ¿Cuál es el precio medio $\overline{p}$ del kilo de pollo durante los primeros 6 meses del año?

3. Use la integral definida para estimar el valor actual de una anualidad que paga 100 dólares por mes en los próximos 2 años si el tipo de interés que prevalece permanece fijo a un 8 % anual compuesto continuamente.

4. Un cuentahabiente tiene una deuda en un banco y el primer día de cada mes deposita 3,000 pesos para liquidarla. Suponiendo que el tipo anual permanece fijo al 5 % y se compone continuamente, estime mediante una integral definida el valor actual de la deuda si aún debe 18 pagos. (Sol: $\int_0^{3/2} 12(3000)e^{-0.05t}dt$)

5. Una cuenta de ahorros paga el 10 % de interés anual compuesto continuamente. Si un cuentahabiente deposita constantemente a razón de 5000 dólares anuales, ¿cuánto tiempo se requiere para que el saldo final alcance 140,000 dólares?

6. Una cuenta de ahorros paga el 10 % de interés anual compuesto continuamente. ¿Qué monto se debe depositar anualmente de manera constante para acumular 100,000 dólares después de 10 años?

7. Una cuenta de ahorros paga el 7.5 % de interés anual compuesto continuamente. ¿Qué monto debe depositarse cada año de manera constante para acumular 100,000 dólares después de 10 años?

8. Determine el valor presente de una anualidad que habrá de pagar 1,500 dólares al año en los próximos 4 años si el tipo de interés anual permanece fijo al 10 % compuesto continuamente.

9. Use la integral definida para plantear una ecuación que indique cuál es el interés compuesto continuamente que debe prevalecer durante 5 años para triplicar el monto de una inversión.

10. La dirección de una cadena de tiendas de helados estadounidense está vendiendo una licencia para cinco años para manejar su nuevo mercado del estado de Morelos. Experiencias pasadas en localidades similares sugieren que dentro de t años la licencia estará generando beneficios a un ritmo de

$$f(t) = 14000 + 490t$$

dólares por año. Si el tipo anual de interés predominante permanece fijo durante los 5 años a un 7 % compuesto continuamente, ¿cuál es el valor actual de la licencia?

11. La función de densidad de probabilidad para la duración de las llamadas telefónicas por medio de teléfonos celulares en cierta ciudad es

$$f(x) = 0.5e^{-0.5x}$$

donde x representa la duración en minutos de una llamada seleccionada aleatoriamente.

a) ¿Qué porcentaje de las llamadas duran entre 2 y 3 minutos?

b) ¿Qué porcentaje de las llamadas duran 2 minutos o menos?

c) ¿Qué porcentaje de llamadas duran más de 3 minutos?

d) Verifique que los resultados en a), b) y c) suman 1. Interprete.

Capítulo V

Soluciones

V.1. La derivada

V.1.1. Incrementos y tasas

1. *a*) $\Delta f = 0.4$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2$.

   b) $\Delta f = 6$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 12$.

   c) $\Delta f = 0.5$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 1$.

   d) $\Delta f = -2.1$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = -7$.

   e) $\Delta f = 7.25$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 14.5$.

   f) $\Delta f = 0.2$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 1$.

2. *a*) $\dfrac{\Delta p}{\Delta t} = -200$.

   b) $\dfrac{\Delta p}{\Delta t} = 280$.

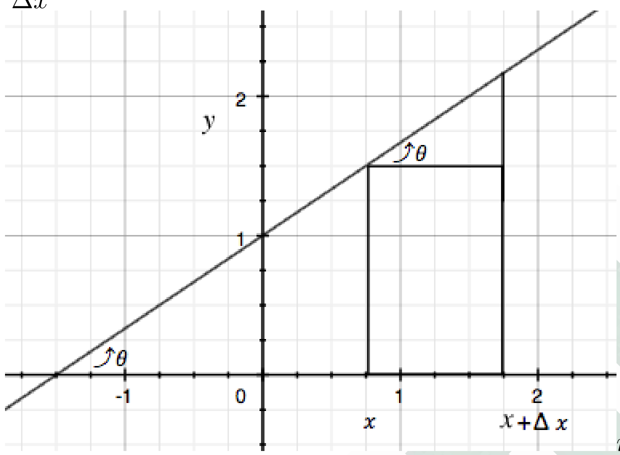
   c) $\dfrac{\Delta p}{\Delta t} = 1000 - 240t - 120\Delta t$.

3. *a*) $\Delta C = 716$.

   b) $\dfrac{\Delta C}{\Delta x} = 16.3$.

   c) $\dfrac{\Delta C}{\Delta x} = 11.3$.

4. $\dfrac{\Delta C}{\Delta x}$ es siempre igual a m y representa la pendiente de la recta $y = mx+b$.



$m = \tan\theta$

5.
   a) $\Delta x = -83.33$.
   b) $\Delta I = 833.33$.
   c) $\dfrac{\Delta I}{\Delta x} = 218.75$.

6. 350 millones de dólares.

7.
   a) 100, 5900 y 5800 respectivamente.
   b) 10, 590 y 580 respectivamente.

8. $e^{-0.1} - e^{-0.2}$ en ambos casos.

9. $\Delta y = \dfrac{24000}{7}$ personas. $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{2400}{7}$.

10. $\dfrac{\Delta R}{\Delta x} = -40$.

V.1.2. Límites

1.
   a) 25
   b) -2
   c) 0
   d) $\dfrac{1}{108}$
   e) $\dfrac{5}{4}$
   f) 2
   g) $\dfrac{1}{2}$

h) -6

i) $-\dfrac{1}{16}$

j) $-\dfrac{1}{4}$

k) $\dfrac{1}{4}$

l) 0

m) $\dfrac{2}{3}$

n) 1

2. a) $-\dfrac{2}{3}$

   b) -4

   c) 0

   d) 0

   e) 1

   f) 2

3. a) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. No es continua pues $f(2) \neq 2$.

   b) $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$. Sí es continua pues $f(1) = -1$.

   c) $\lim_{x\to -3} f(x) = -6$. Sí es continua pues $f(-3) = -6$.

4. $A = 0, \quad B = -4$.

5. $c = -\dfrac{1}{3}$.

6. No existe un número real A tal que $A^2 + 2A + 4 = 0$.

7. $h = 0$.

8. f es discontinua en $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y continua en los demás puntos del intervalo [0,8].

9. a) Falso; $f(c)$ puede estar definido y $\lim_{x\to c} f(x)$ puede no existir.

   b) Falso; además de que $\lim_{x\to c} f(x)$ exista, debe ser igual a $f(c)$.

   c) Verdadero.

10. a) 7

    b) 0

    c) $4x + 5$

    d) 7

    e) $2t + 1$

V.1.3. La derivada

1. *a)* $g'(x) = 6x^2 - 10x + 3$.

   b) $h'(u) = \dfrac{2}{(1-u)^2}$.

   c) $f'(t) = \dfrac{-2}{(2t+3)^2}$.

   d) $y' = 6x^2 - \dfrac{3}{x^2}$.

   e) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 3$.

   f) $y' = 7x^6 - \dfrac{8}{3\sqrt[3]{x^4}}$.

   g) $f'(x) = 2x^2(5x^2 - 6)$.

   h) $f'(x) = 6x^2 - 12x - 1$.

   i) $f'(x) = \dfrac{-7}{(x-2)^2}$.

   j) $f'(x) = \dfrac{2(x^2 - 3x - 1)}{(2x-3)^2}$.

   k) $f'(x) = \dfrac{-3x^2 - 10x - 9}{(x^2-3)^2}$.

   l) $f'(x) = 30x^{7/3} + \dfrac{15}{\sqrt[3]{x^2}}$.

   m) $f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 3x + 1}{\sqrt{x}(x^2 - 3x + 1)^2}$.

   n) $f'(x) = \dfrac{-8x^5 + 5x^4 + 12x^3 - 13x^2 + 4x - 12}{(x^3+2)^2(x^2-3)^2}$.

   ñ) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$.

2. *a)* $D_x = \dfrac{2x^4 - 10}{x^3}$.

   b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{9 - \sqrt{x}}{x^{5/2}}$.

   c) $y' = \dfrac{4(x^4 - 1)}{x^3}$.

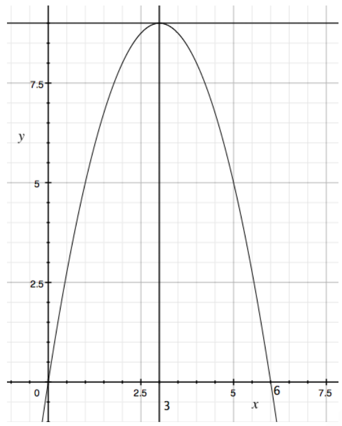
   d) $f'(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 6}{3\sqrt[3]{x^5}}$.

3. *a)* $\dfrac{dy}{dx} = 6 - 2x$.

   b) $m_2 = 2$, $m_4 = -2$.

c) $x = 3$.

d)

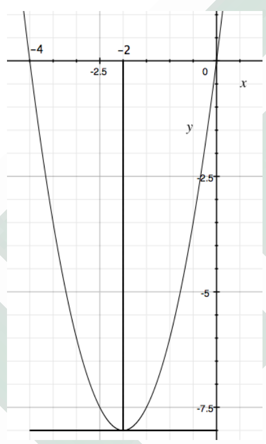


4. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = 4x + 8$.

b) $m_2 = 16$, $m_4 = 24$.

c) $x = -2$.

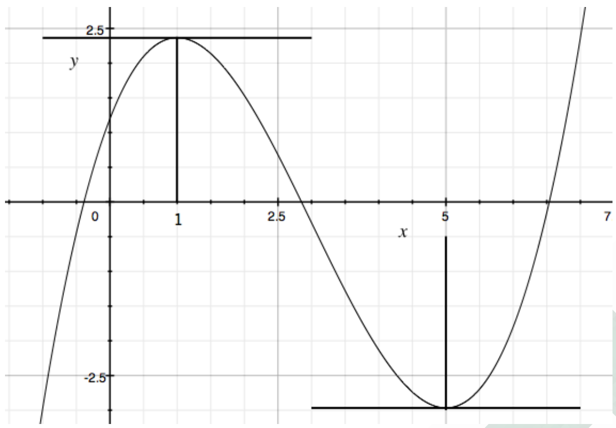
d)



5. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + 6x$.

b) $m_2 = 20$, $m_4 = 56$.

c) $x = 0$, $x = -3$.

6. 

7. $a = -1$, $b = 5$, $c = 0$.

8. $y = 6x$, $y = -14x$.

9.
   a) 2000
   b) 1200
   c) 0
   d) 1998, 1198, -2

10.
    a) 0
    b) 120
    c) 840
    d) 0.6, 120.6, 840.6

11.
    a) 50
    b) 51

12.
    a) $d'(x) = \dfrac{-100000}{(x+5)^3}$.
    b) $d'(5) = -100$, $d'(10) = -29.63$.

13. **Nota: Para ilustrar la regla de la cadena, las siguientes derivadas no han sido simplificadas:**

    a) $y' = 3(2x+5)^2(2)$.
    b) $y' = \frac{3}{2}(x^2-6)^{1/2}(2x)$.
    c) $y' = 12(x^2-2)^3(2x)$.
    d) $y' = -6(x^2+5x)^{-4}(2x+5)$.
    e) $y' = \frac{1}{2}(x^2+8)^{-1/2}(2x)$.
    f) $y' = \frac{1}{3}(3x^2+4)^{-2/3}(6x)$.

g) $y' = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4)^{-1/2}(2x - 4)$.
h) $y' = -(2x + x)^{-2}(2)$.
i) $y' = -8(x^2 - 3)^{-9}(2x)$.
j) $y' = -(2x^2 - 3x + 1)^{-2}(4x - 3)$.

14. a) 726
    b) $9\sqrt{3}$
    c) 24696
    d) -0.000198
    e) $\dfrac{3}{\sqrt{17}}$
    f) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{961}}$
    g) 1
    h) -0.02
    i) $-\dfrac{48}{6^9}$
    j) -0.09
15. $y = -x + 3$.
16. 8.
17. $\dfrac{9}{2}$.
18. a) $-\dfrac{1}{2}$.
    b) $\dfrac{1}{2}$.
    c) 38,784
    d) 1.
19. $\dfrac{1}{6}$.
20. 3.

V.1.4. Recta tangente a una curva

1. $y = 0$.
2. $y = 2x + 1$ y $y = -2x + 9$.
3. a) $(0, 1)$ y $(-1, \dfrac{7}{3})$.

b) $(-1, \frac{7}{3})$.

4. $(1, -4)$.

5. Las rectas tangentes son: $y = 3x - 2$ y $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

V.1.5. La derivada como razón de cambio

1. -390 .

2. $\frac{F'(400)}{F(400)} \cdot 100\,\% = 12.5\,\%$.

3. a) La razón de cambio del costo toal con respecto a la demanda.

   b) La razón de cambio de la demanda con respecto al tiempo.

   c) La razón de cambio del costo total con respecto al tiempo.

4. $\left(\frac{dC}{dt}\right)_2 = \left(\frac{dC}{dp}\right)_{18} \left(\frac{dp}{dt}\right)_2 = \frac{37}{5}$ partes por millón.

V.1.6. Análisis marginal

1. a) $C'(x) = 2(\ln 2)x$.

   b) $R'(x) = 1 - 0.02x$.

   c) $C'(x) = 0.0003x^2 - 0.18x + 20$.

   d) $R'(x) = 5 - 0.025x^{3/2}$.

   e) $C'(x) = 0.000003x^2 - 0.006x + 36$.

   f) $R'(x) = 0.01 - 0.002x - 0.000025x^{3/2}$.

   g) $R'(x) = 100 - (\log 5)(3x^2 + \frac{7}{2}x^{5/2})$.

2. a) $R'(800) = -150$.

   b) $R'(16) = 4$.

   c) $R'(64) = \frac{220}{63}$.

   d) $R'(200) = -90$.

3. $U'(400) = 45$.

4. $U'(9) = 4.5$.

5. -7.879 si $p = 16$, 12.215 si $x = 25$.

6. a) $U'(x) = -0.0002x + 2.2$, precio $= 1.90$.

   b) 2000

   c) 2100

d) 2000

7. $P(4.5) - P(4) = 27.28$.

8. $\dfrac{\Delta Q}{Q} \cdot 100\,\% = 2\,\%$ en ambos casos.

9. $U'(1000) = -24 - 10$ y $U'(64) = 7.47$.

10. *a*) $\dfrac{dp}{dq} = -20$.

    b) $\dfrac{dI}{dp} = \dfrac{39}{20}$.

11. *a*) $\dfrac{dI}{dq} = \dfrac{300 - 300q^2}{(q^2+1)^2}$.

    b) $\left(\dfrac{U(q)}{q}\right)'(2) = -51$.

12. 1.05 por año.

13. 220 por año.

14. 2100 y 2069.

15. *a*) $f'(x) = -3x^2 + 12x$.

    b) $f'(1) = 9$ teléfonos por hora.

    c) $f(2) - f(1) = 11$ teléfonos.

16. *a*) $C'(40) = 241$ dólares.

    b) 244 dólares.

    c) Aproxima el costo de fabricación de la cuadragésima segunda unidad.

    d) $\overline{C}(q) = 3q + 1 + \dfrac{500}{q}$ y $\overline{C}'(q) = 3 - \dfrac{500}{q^2}$.

17. 10 unidades.

18. 825 unidades.

19. *a*) $\dfrac{100}{12+t}$.

    b) $7.69\,\%$.

    c) Tenderá a cero.

20. 6 kilos menos por mes. Está decreciendo.

21. *a*) El costo marginal es igual a $\dfrac{50(x-100)^2 + 500000}{(x+100)^2}$ que es siempre positivo, por lo que el costo se incrementa.

    b) EL costo promedio marginal es igual a $\dfrac{-5000}{(x+100)^2}$ que es siempre negativo, por lo que el costo promedio disminuye.

V.1.7. Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

1. *a*) $3e^{3x}$.
   b) $-7e^{-x}$.
   c) $2xe^{x^2}$.
   d) $(x+1)e^x$.
   e) $(2x-x^2)e^{-x}$.
   f) $(\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$.
   g) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.
   h) $\dfrac{-x}{e^x}$.
   i) $(2x-1)e^{x^2-x}$.
   j) $(3x^2-2x)e^{x^3-x^2}$.
   k) $\dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$.
   l) $\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.
   m) $(6x+7)e^{(3x^2+7x-1)}$.
2. *a*) $\dfrac{3}{3x+7}$.
   b) $\dfrac{2}{x}$.
   c) $\dfrac{2x}{x^2+7}$.
   d) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.
   e) $\dfrac{7(1+\ln x)^6}{x}$.
   f) $\dfrac{-1}{x(\ln x)^2}$.
   g) $x(2\ln x+1)$.
   h) $\dfrac{x}{x+1}+\ln(x+1)$.
   i) $\ln x$.
   j) $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

$k)$ $\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$.

$l)$ $\dfrac{\ln(x+2)-1}{(\ln(x+2))^2}$.

3. $a)$ $e^x(\dfrac{1}{x}+\ln x)$.

   $b)$ $\dfrac{1-x\ln x}{xe^{2x}}$.

   $c)$ $e^x(\dfrac{2x}{x^2+1}+\ln(x^2+1))$.

   $d)$ $\dfrac{1-x}{x}$.

   $e)$ $x\log(e)$.

   $f)$ $2x\log(3)$.

   $g)$ $\dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)(x+1)}$.

   $h)$ $\dfrac{1}{x+2}+3-\dfrac{2x}{x^2+1}$.

   $i)$ $\dfrac{-3x^2-4x+4}{2(x^2+4)(x+1)}$.

4. $a)$ No, e .

   $b)$ No, e^{-2} .

   $c)$ 0, $e(1+\ln 2)$.

   $d)$ No, 0 .

   $e)$ 1, 1 .

   $f)$ 0, $2\log(3)$.

   $g)$ -1, $\frac{1}{2}$.

   $h)$ $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{3}$.

   $i)$ $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{20}$.

5. $a)$ $7e^{-1}$.

   $b)$ -1 .

   $c)$ 0 .

   $d)$ $\dfrac{-30}{e+2}$.

6. $\dfrac{1}{2}$.

7. $y=\dfrac{1}{2}x-\ln 2$.

8. $p'(x) = -e^{50-x}$.
9. $\frac{1}{2}$.
10. 2250 .
11. $R'(x) = e^{-x/20}(300 - 15x)$, $U'(x) = e^{-x/20}(300 - 15x) - 20$.
12. $\dfrac{dI}{dp} = \dfrac{1}{3}(e^{75-5p} - 5pe^{75-5p} - 2)$.
13. $R'(x) = 35 - \dfrac{\ln(x+1)}{2} - \dfrac{x}{2(x+1)}$.
14. 6 % .
15. *a*) Se deprecia 1082.68 dólares por año.
    b) Se deprecia a un ritmo constante de 40 % anual.
16. *a*) 192,500,000
    b) 351,137,090.3
    c) 402,822,187.3
17. *a*) 2.396 años.
    b) 2.31 años.
18. 40 meses.
19. 8.2 % compuesto trimestralmente.
20. *a*) $f(0) = 500$ personas .
    b) $f'(14) = 77.66$ personas por semana.
    c) 2000 personas.

V.1.8. Límites y derivadas de funciones trigonométricas

1. *a*) 1
   b) $\frac{2}{5}$
   c) 0
   d) $\frac{1}{2}$
   e) 0
   f) $\frac{1}{2}$ (use el d))
2. *a*) $\sec^2(t)$.
   b) $-\csc^2(t)$.
   c) $\sec(t)\tan(t)$.

d) $-\csc(t)\cot(t)$.

3. a) $(4x+3)\cos(2x^2+3x+7)$.
   b) $-2x\tan(x^2+3)$.
   c) $2\tan(x^3-2x)\sec^2(x^3-2x)(3x^2-2)$.
   d) $-\csc^2(x)e^{\cot(x)}$.
   e) $8\sin(\cos(3x-7))\cos(\cos(3x-7))(-\sin(3x-7))(3)$.
   f) $\cos(\sin(\sin(x)))\cos(\sin(x))\cos(x)$.

4. a) 1 .
   b) $\dfrac{e}{\sqrt{2}}$.
   c) 0 .

5. a) $\sin'(\pi)=-1$.
   b) $\cos'(\dfrac{\pi}{2})=-1$.

6. $y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\dfrac{\pi}{4})$, $y=-\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\dfrac{\pi}{4})$.

7. $A=3,\ B=7$ y $C=-2$.

V.2. Optimización y bosquejo de gráficas

V.2.1. Funciones crecientes y decrecientes.

1. Crece en $(-\infty,3)\cup(4,\infty)$ y decrece en $(3,4)$.
2. La gráfica de f' crece en $(-\infty,-1)\cup(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})\cup(1,\infty)$ y decrece en $(-1,-\dfrac{1}{3})\cup(\dfrac{1}{3},1)$.
3. Crece en $(-1,0)\cup(2,\infty)$ y decrece en $(-\infty,1)\cup(0,2)$.
4. Por ejemplo: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$.
5. Dominio: $[0.2]$; crece en $(0,\dfrac{1}{2})$ y decrece en $(\dfrac{1}{2},2)$.

V.2.2. Concavidad y puntos de inflexión.

1. a) Crece en $(-1,0)\cup(2,\infty)$, decrece en $(-\infty,-1)\cup(0,2)$. Es cóncava hacia arriba en $(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{7}}{3})\cup(\dfrac{1+\sqrt{7}}{3},\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(\dfrac{1-\sqrt{7}}{3},\dfrac{1+\sqrt{7}}{3})$. Puntos críticos: $(-1,3)$, $(0,2)$ y $(2,30)$. Puntos de inflexión con abcisas en $\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}$ y $\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$.

b) Crece en $(0,\infty)$, decrece en $(-\infty,0)$. Es cóncava hacia arriba en $(-\infty,\infty)$. Punto crítico: $(0,-2)$. No tiene puntos de inflexión .

c) Crece en $(0,\infty)$. Es cóncava hacia arriba en $(0,\infty)$. No tiene puntos críticos ni de inflexión.

d) Crece en $(-1,1)$, decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Es cóncava hacia arriba en $(2,\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1)\cup(-1,2)$. Punto crítico: $(1,\dfrac{1}{4})$. Punto de inflexión: $(2,\dfrac{2}{9})$.

e) Crece en $(-1,0)$, decrece en $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$. Es cóncava hacia arriba en $(-\dfrac{3}{2},0)\cup(0,\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty,-\dfrac{3}{2})$. Punto crítico: $(-1,0)$. Punto de inflexión: $(-\dfrac{3}{2},\dfrac{25}{9})$.

f) Crece en $(-\infty,0)$, decrece en $(0,\infty)$. Es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{3}})\cup(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})$. Punto crítico: $(0,2)$. Puntos de inflexión: $(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{2})$ y $(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{2})$.

2. $f''(x)=2A$ para toda x en $\mathbb{R}$, por lo que no cambia la concavidad. La gráfica de f representa una parábola.

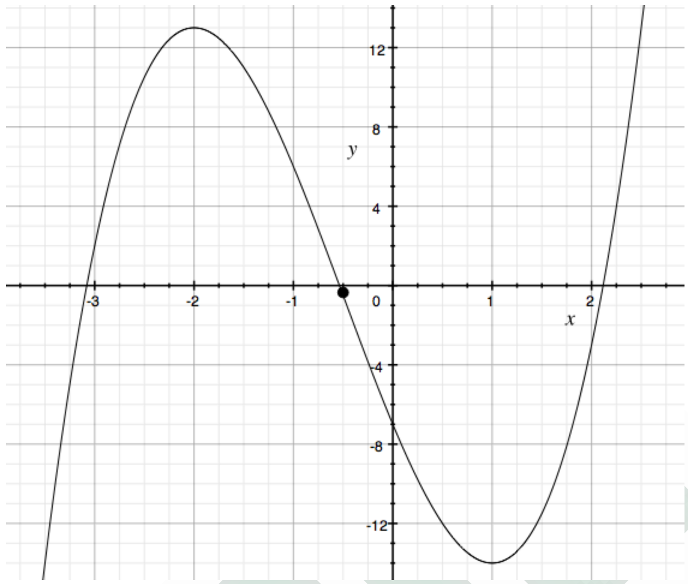
3. $f(x)=x^{1/3}$.

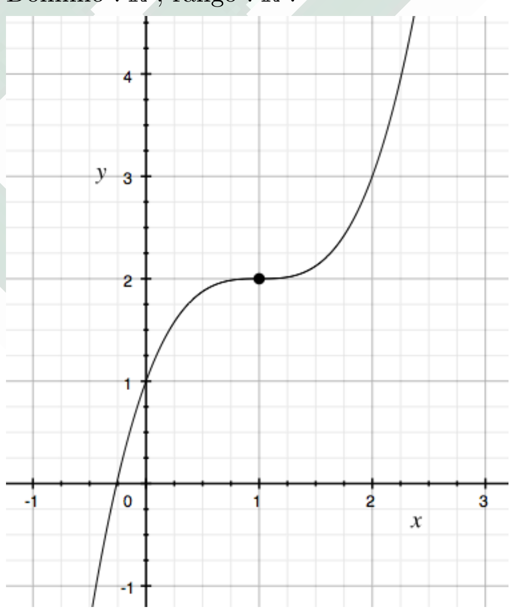
4. $f''(x)=6Px+2Q$ por lo que $f''(x)$ cambia de signo antes y después de $\dfrac{-Q}{3P}$.

5. Sea $f(x)=x^4$, entonces $f''(0)=0$, pero $(0,0)$ no es punto de inflexión. Sea $f(x)=x|x|$ entonces $f''(0)$ no existe pero $(0,0)$ es un punto de inflexión.

V.2.3. Gráficas de funciones

1. 1) a) Creciente: $(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$, decreciente: $(-2,1)$.
   b) Concavidad positiva: $(-1/2,\infty)$, concavidad negativa: $(-\infty,-1/2)$.
   c) Puntos críticos estacionarios: $x=-2$ y $x=1$.
   d) Máximo relativo en $(-2,13)$, mínimo relativo en $(1,-14)$, punto de inflexión en $x=-\frac{1}{2}$.
   e) No tiene.
   f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $\mathbb{R}$.

g) 

2) a) Creciente: $(-\infty, \infty)$.
b) Concavidad positiva: $(1, \infty)$, concavidad negativa: $(-\infty, 1)$.
c) Punto crítico estacionario en $x = 1$.
d) Punto de inflexión en $x = 1$.
e) No tiene.
f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $\mathbb{R}$.
g) 

3) a) Creciente: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, decreciente: $(0, 4)$.

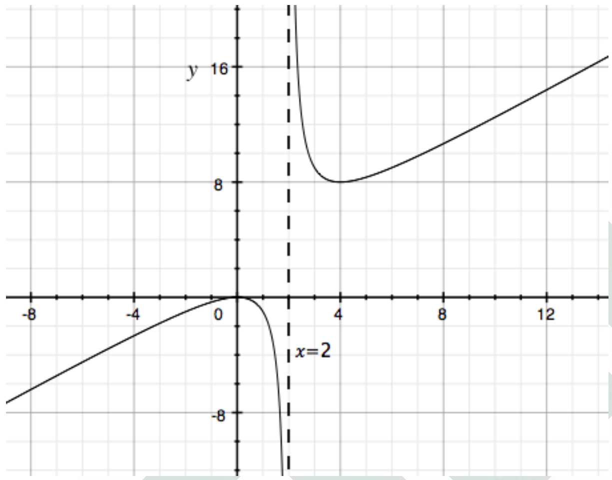
b) Concavidad positiva: $(2, \infty)$, concavidad negativa: $(-\infty, 2)$.

c) Puntos críticos estacionarios: $x = 0$ y $x = 4$.

d) Máximo relativo en $(0, 0)$, mínimo relativo en $(4, 8)$.

e) $x = 2$.

f) Dominio : $\mathbb{R} - \{2\}$, rango : $(-\infty, 0) \cup (8, \infty)$.

g) 

4) a) Creciente: $(0, \infty)$, decreciente: $(-\infty, 0)$.

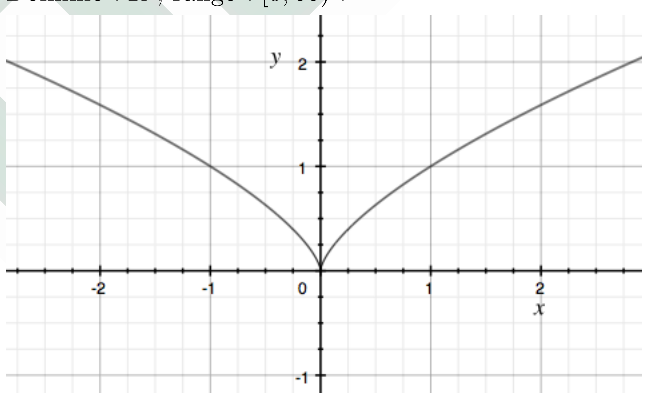
b) Concavidad negativa: $(-\infty, \infty) - \{0\}$.

c) Punto crítico singular en $x = 0$.

d) Mínimo absoluto en $(0, 0)$.

e) No tiene.

f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $[0, \infty)$.

g) 

5) a) Creciente: $(-\infty, -2/3) \cup (0, \infty)$, decreciente: $(-2/3, 0)$.

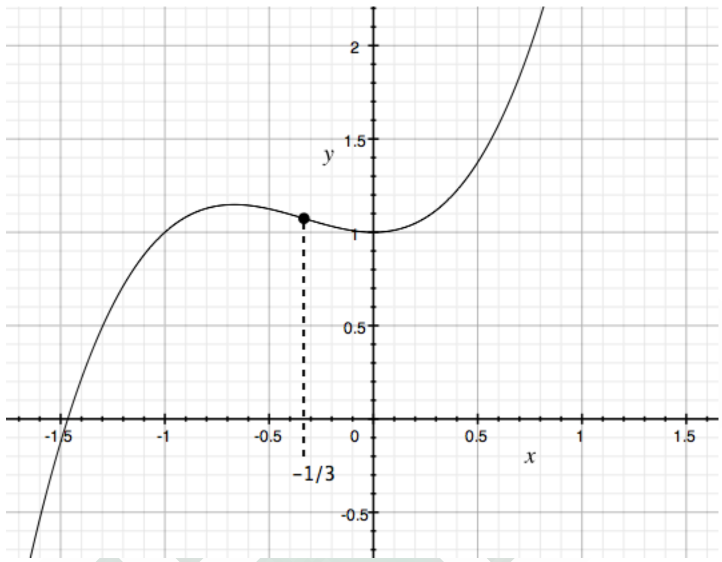
b) Concavidad positiva: $(-1/3, \infty)$, concavidad negativa: $(-\infty, -1/3)$.

c) Puntos críticos estacionarios: $x = 0$ y $x = -2/3$.

d) Máximo relativo en $(-2/3, 31/27)$, mínimo relativo en $(0,1)$, punto de inflexión en $x = -\frac{1}{3}$.

e) No tiene.

f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $\mathbb{R}$.

g) 

6) a) Creciente: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, decreciente: $(0, 4)$.

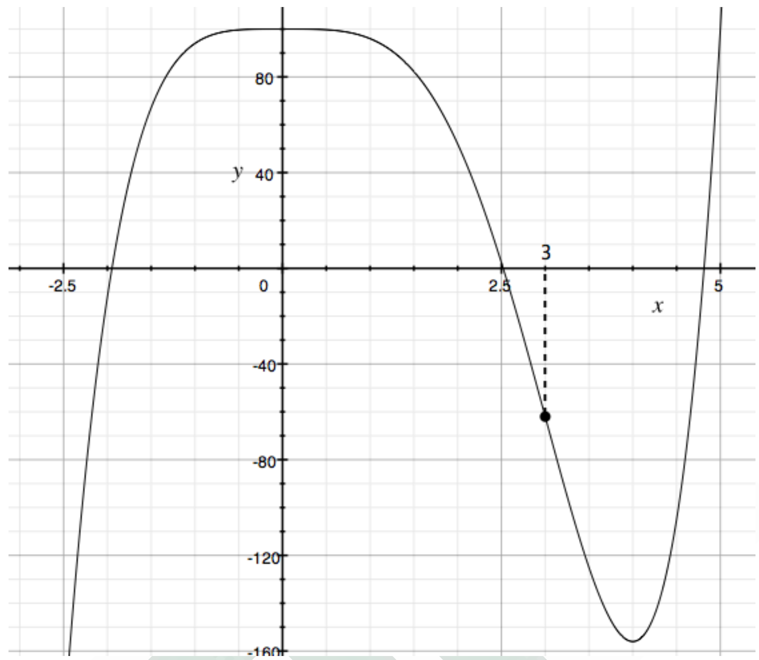
b) Concavidad positiva: $(3, \infty)$, concavidad negativa: $(-\infty, 3)$.

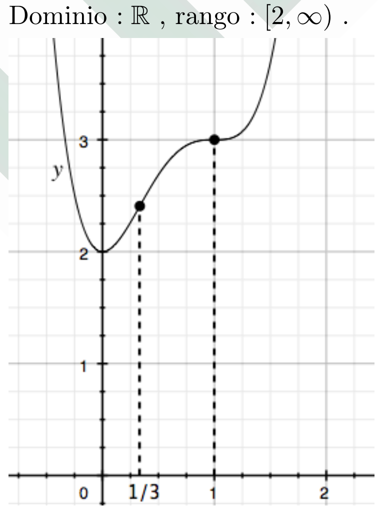
c) Puntos críticos estacionarios: $x = 0$ y $x = 4$.

d) Máximo relativo en $(0, 100)$, mínimo relativo en $(4, -156)$, punto de inflexión en $x = 3$.

e) No tiene.

f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $\mathbb{R}$.

g) 

7) a) Creciente: $(0, \infty)$, decreciente: $(-\infty, 0)$.
   b) Concavidad positiva: $(-\infty, 1/3) \cup (1, \infty)$, concavidad negativa: $(1/3, 1)$.
   c) Puntos críticos estacionarios: $x = 0$ y $x = 1$.
   d) Mínimo absoluto en $(0, 2)$, puntos de inflexión en $x = \frac{1}{3}$ y $x = 1$.
   e) No tiene.
   f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $[2, \infty)$.
   g) 

8) a) Creciente: $(0, \infty)$, decreciente: $(-\infty, 0)$.

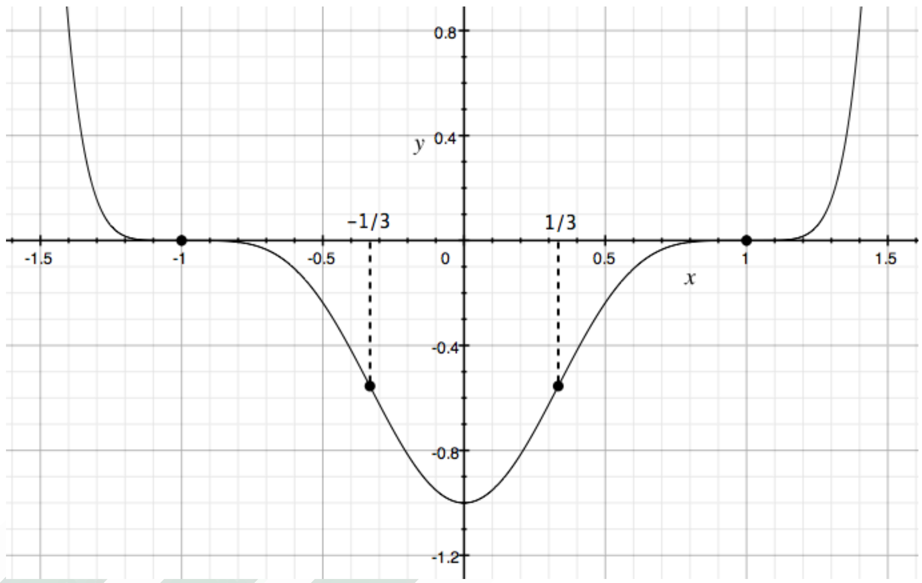
b) Concavidad positiva: $(-\infty,-1)\cup(-1/9,1/9)\cup(1,\infty)$, concavidad negativa: $(-1,-1/9)\cup(1/9,1)$.

c) Puntos críticos estacionarios: $x=0$, $x=1$ y $x=-1$.

d) Mínimo absoluto en $(0,-1)$, puntos de inflexión en $x=-1,\ -\frac{1}{9},\ \frac{1}{9},\ 1$.

e) No tiene.

f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $[-1,\infty)$.

g) 

9) a) Creciente: $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$, decreciente: $(-3,-1)\cup(-1,1)$.

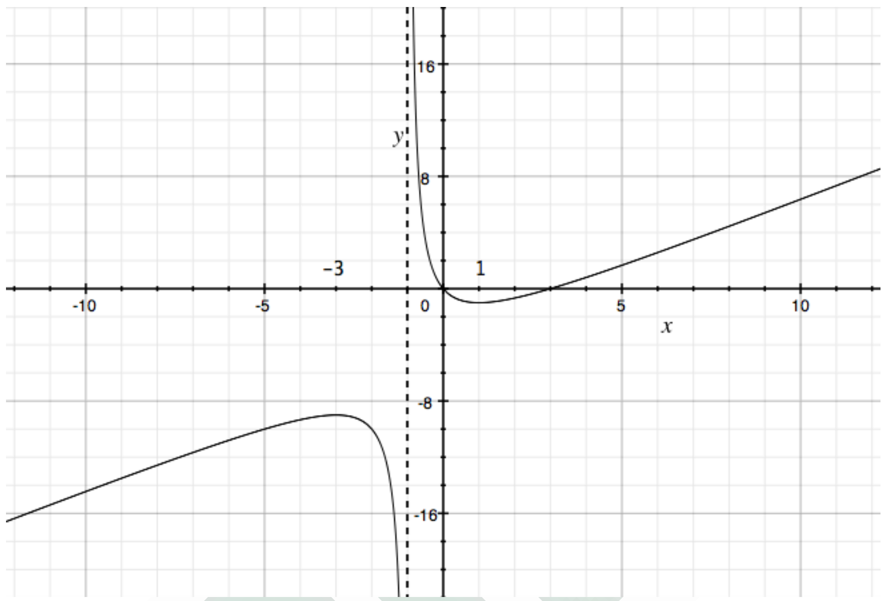
b) Concavidad positiva: $(-1,\infty)$, concavidad negativa: $(-\infty,-1)$.

c) Puntos críticos estacionarios: $x=-3$ y $x=1$.

d) Máximo relativo en $(-3,-9)$, mínimo relativo en $(1,-1)$.

e) $x=-1$.

f) Dominio : $\mathbb{R}-\{-1\}$, rango : $[-\infty,-9)\cup(-1,\infty)$.

g) 

10) a) Creciente: $(10, \infty)$, decreciente: $(-\infty, 0) \cup (0, 10)$.

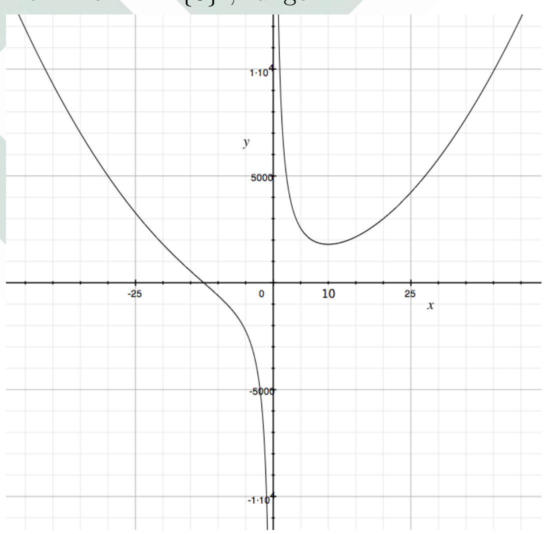
b) Concavidad positiva: $(-\infty, -10(\sqrt[3]{2})) \cup (0, \infty)$, concavidad negativa: $(-10(\sqrt[3]{2}), 0)$.

c) Punto crítico estacionario: $x = 10$.

d) Mínimo relativo en $(10, 1800)$, punto de inflexión en $x = -10(\sqrt[3]{2})$.

e) $x = 0$.

f) Dominio : $\mathbb{R} - \{0\}$, rango : $\mathbb{R}$.

g) 

11) a) Creciente: $(-\infty, \infty)$.

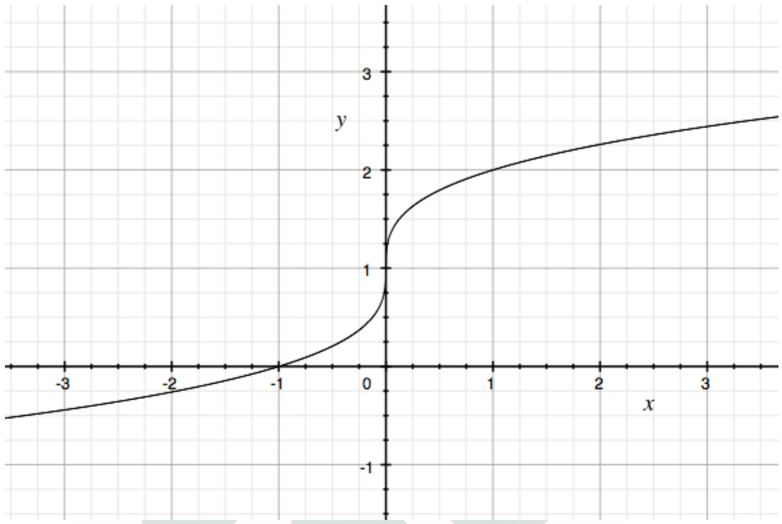
b) Concavidad positiva: $(-\infty, 0)$, concavidad negativa: $(0, \infty)$.

c) Punto crítico singular: $x = 0$.

d) No tiene valores extremos, punto de inflexión en $x = 0$.

e) No tiene.

f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $\mathbb{R}$.

g) 

12) a) Creciente: $(1, /\infty)$, decreciente: $(-\infty, 1)$.

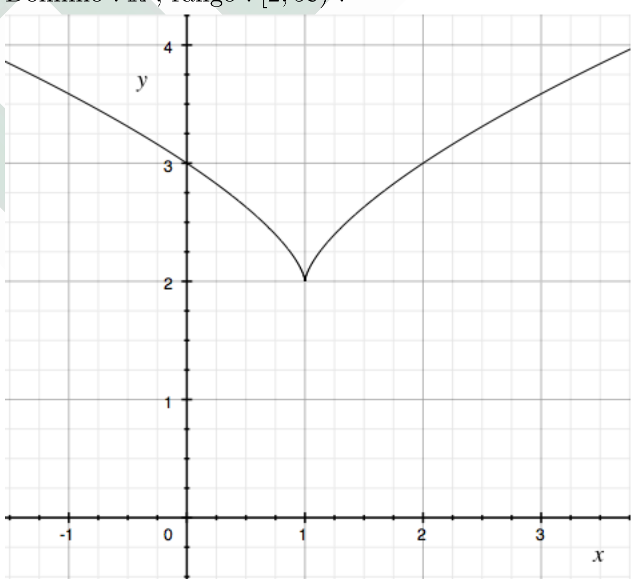
b) Concavidad negativa: $(-\infty, \infty)$.

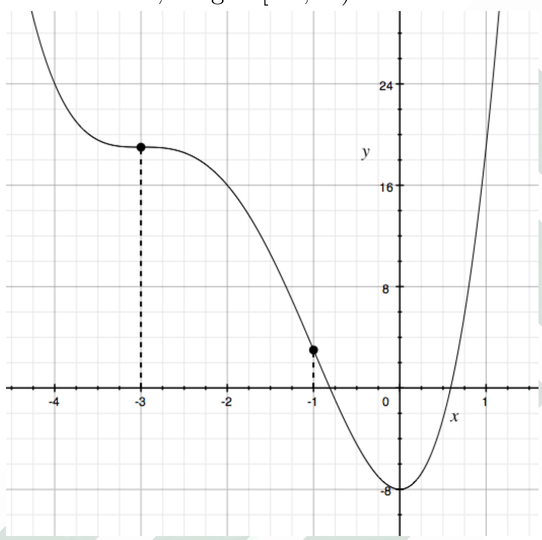
c) Punto crítico singular en $x = 1$.

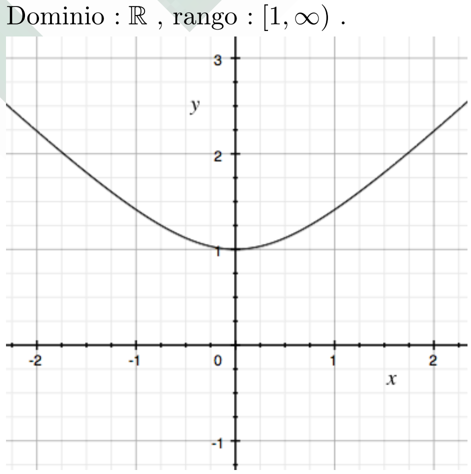
d) Mínimo absoluto en $(1, 2)$.

e) No tiene.

f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $[2, \infty)$.

g) 

13) a) Creciente: $(0, \infty)$, decreciente: $(-\infty, 0)$.
  b) Concavidad positiva: $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$, concavidad negativa: $(-3, -1)$.
  c) Puntos críticos estacionarios: $x = -3$ y $x = 0$.
  d) Mínimo absoluto en $(0, -8)$, puntos de inflexión en $x = -3$ y $x = -1$.
  e) No tiene.
  f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $[-8, \infty)$.
  g) 

14) a) Creciente: $(0, \infty)$, decreciente: $(-\infty, 0)$.
  b) Concavidad positiva: $(-\infty, \infty)$.
  c) Punto crítico estacionario en $x = 0$.
  d) Mínimo absoluto en $(0, 1)$.
  e) No tiene.
  f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $[1, \infty)$.
  g) 

15) a) Creciente: $(-\infty,-4)\cup(0,\infty)$, decreciente: $(-4,-2)\cup(-2,0)$.

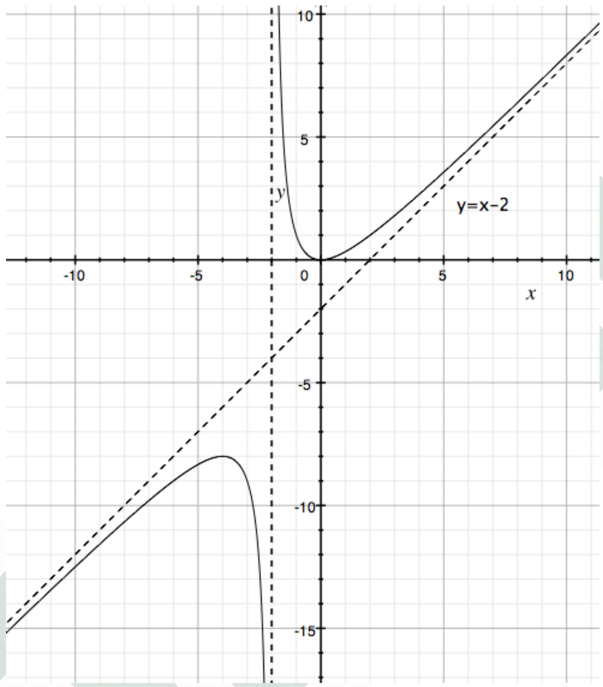
b) Concavidad positiva: $(-2,\infty)$, concavidad negativa: $(-\infty,-2)$.

c) Puntos críticos: $(-4,-8)$ y $(0,0)$.

d) Mínimo local en $(0,0)$ m máximo local en $(-4,-8)$.

e) Vertical: $x=-2$, oblicua: $y=x-2$.

f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $(-\infty,-8]\cup[0,\infty)$.

g) 

16) a) Decreciente: $(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$.

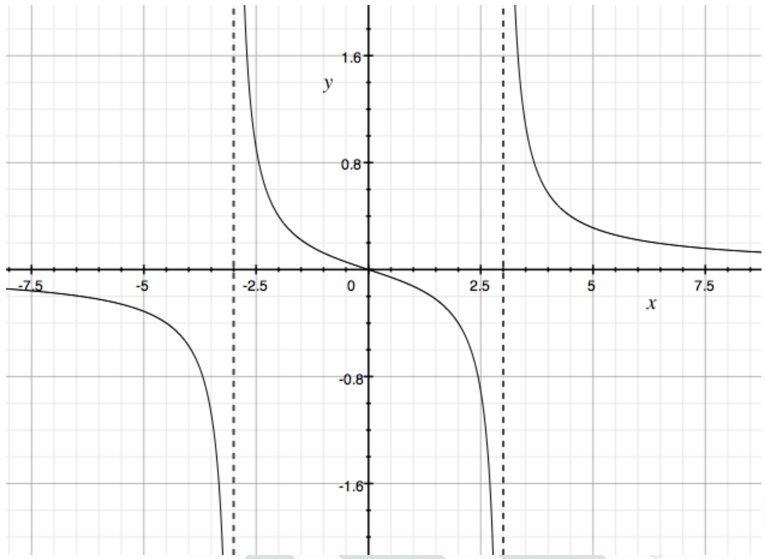
b) Concavidad positiva: $(-3,0)\cup(3,\infty)$, concavidad negativa: $(-\infty,-3)\cup(0,3)$.

c) No tiene.

d) Punto de inflexión: $(0,0)$.

e) Verticales: $x=-3$ y $x=3$, horizontal: $y=0$.

f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $\mathbb{R}$.

g) 

17) a) Creciente: $(-\infty, \infty)$.

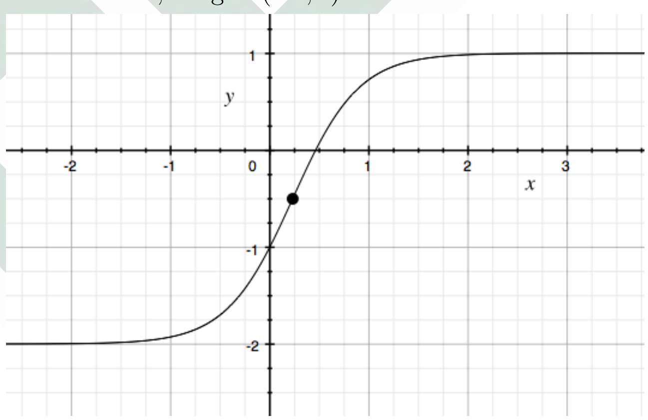
b) Concavidad positiva: $(-\infty, \frac{1}{3}\ln 2)$, concavidad negativa: $(\frac{1}{3}\ln 2, \infty)$.

c) No tiene.

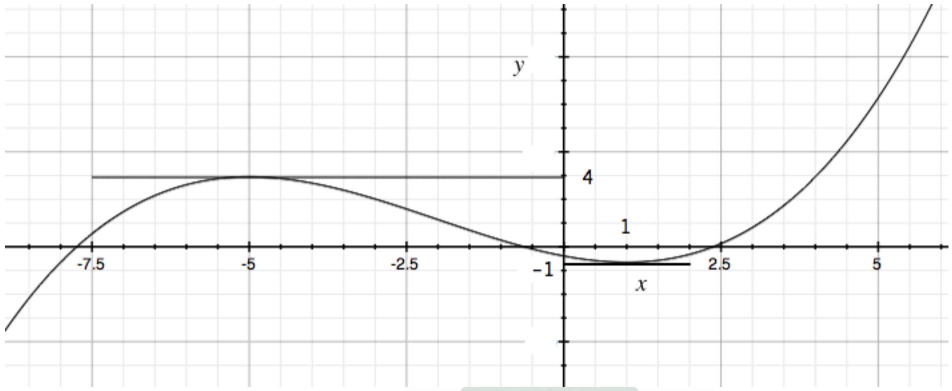
d) Punto de inflexión: $(\frac{1}{3}\ln 2, -\frac{1}{2})$.

e) Horizontales: $y = -2$ y $y = 1$.

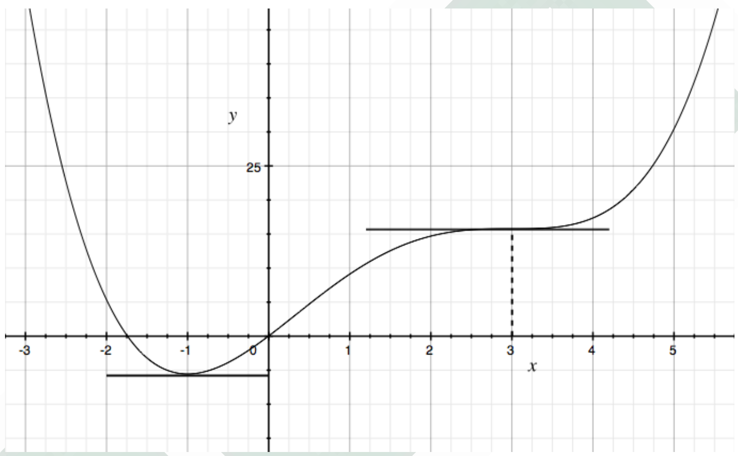
f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $(-2, 1)$.

g) 

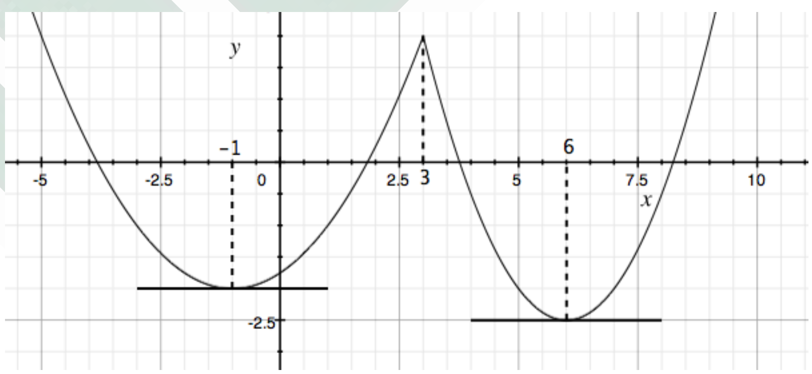
2. *a*)

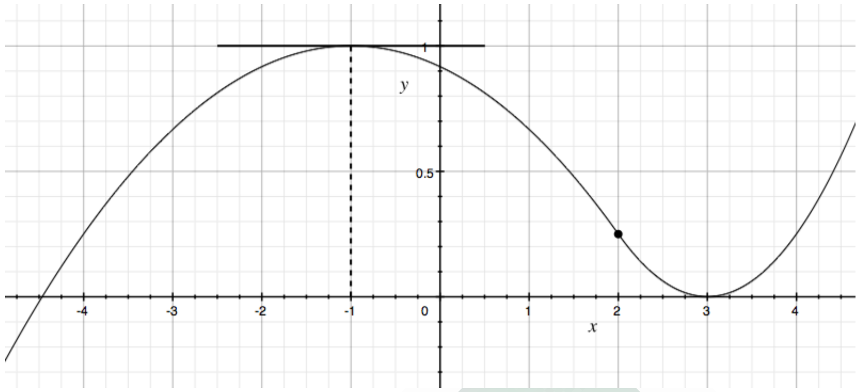


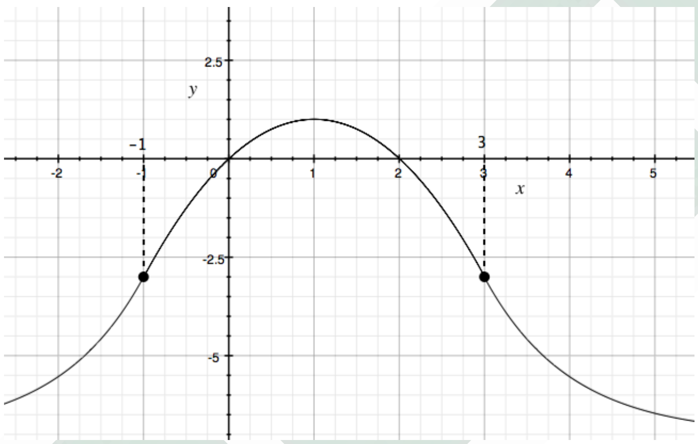
b)



c)



d) 

3. 

4. Máximo absoluto igual a 13 en el punto crítico estacionario $x = 2$. Mínimo absoluto igual a -7 en el punto crítico frontera en $x = 0$.

5. *a*) Creciente: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, decreciente: $(0, 4)$.

   b) Concavidad positiva: $(-\infty, 2)$, concavidad negativa: $(2, \infty)$.

   c) Máximo relativo en $x = 0$, mínimo realtivo en $x = 4$, punto de inflexión en $x = 2$.

6. *a*) Creciente: $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$, decreciente: $(-2, 4)$.

   b) Concavidad positiva: $(-\infty, 1)$, concavidad negativa: $(1, \infty)$.

   c) Máximo relativo en $x = 2$, mínimo relativo en $x = 4$, punto de inflexión en $x = 1$.

7. $f(x) = \dfrac{(x-3)(2x+1)(-2x+1)}{(x-3)(2x+1)} = -2x + 1$ si $x \neq -\dfrac{1}{2}, 3$ por lo que la gráfica de f no tiene asíntotas.

V.2.4. Aplicaciones de máximos y mínimos

1. $(0,10)$ y $(7,-74,421)$. Máximo absoluto: $f(-1)=203$ y mínimo absoluto: $f(7)=-74,421$.

2. Más rápido: 2 p.m., velocidad: 92 kilómetros por hora. Más lento: 5 p.m., velocidad: 65 kilómetros por hora.

3.
   a) $q=3$.
   b) $p=81$, $I(81)=243$.

4. $q=5$, $\overline{C}(50)=35$.

5. $t=3$ y el mínimo es: $e^3+e^{-3}+2$.

6. $x=-1$, $y=-5x-\dfrac{8}{3}$ (NOTA: $x=2$ no es la solución) .

7.
   a) $t=0$.
   b) $t=5$.

8. Costo de operación $=\dfrac{A}{x}$, costo de puesta a punto $=Bx$. El costo total se minimiza en $x=\sqrt{\dfrac{A}{B}}$.

9. \$375. Beneficio máximo: \$65,625.

10.
    a) 5 p.m. (**Punto crítico frontera).**
    b) 11 p.m.

11.
    a) Como $U'(x)=R'(x)-C'(x)$ entonces, $U'(x)=0$ si y sólo si $R'(x)=C'(x)$.
    b) Por lo general, es creciente al principio, llega a su valor óptimo y decrece después.

12. 47 ó 48 personas. Ingreso máximo: \$2,256 en ambos casos.

13. 500 llantas.

14.
    a) Cuadrado de 80 metros de lado.
    b) Sí.

15.
    a) 0 en $t=0$ y $\frac{1}{20}$ en $t=1$.
    b) Tiende a cero.

16.
    a) \$14.
    b) 20 libros.
    c) \$2,340.

17. 3 máquinas.
18. 17 pisos.
19. 11 a.m.
20. $p = 5.52$, $x = 3$ y el ingreso máximo es 16.5545.
21.
    a) 140 dólares.
    b) 19,727.8 dólares, 197 cámaras.
22.
    a) $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{(b^2 - 4ac)}{4a}\right)$.
    b) $f''(x) = 2a$, y de ahí el resultado.
23. $A = \frac{3}{2}$, $B = -6$, $C = 4$.

V.2.5. Análisis incremental. Aproximación por diferenciales.

Aproximación por diferenciales

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

1. $dy = 122.50$, $\Delta y = 123.25$.
2. $dc = 200$, $\Delta c = 225$.
3. Valor aproximado: 9.99 .
4.
    a) $V(\frac{2}{3}) - V(\frac{1}{3}) \simeq 0.2388$.
    b) Valor real: 0.1932 .
5. 5 horas trabajador.
6. Incremento aproximado: 203 libros. Incremento real: 193 .
7. $dP = 1500$, $\Delta P = 1200$.
8. 6 televisores.
9. Disminuirá aproximadamente 880 pesos.
10.
    a) Disminuye 9,900 unidades.
    b) Aumenta 3,960 unidades.
11. Aumenta 8 unidades.
12. Disminuye 12,000 unidades.

V.2.6. Aproximación de segundo orden

	Diferenciales	Segundo orden	Calculadora
1.	6.9285714	6.928207	6.928032
2.	3.0092593	3.0090021	3.0092167
3.	0.5151149	0.5150388	0.515038
4.	16.384	16.387456	16.38747

V.2.7. Diferenciación implícita

1. *a*) $y = \frac{x}{6} + 1$.

   b) $x = 2$.

   c) $y = \frac{-9\sqrt{2}}{4}x + \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   d) $y = \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}$.

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{8}{3}$ en $(2, 2)$.

3. 26,000 pesos por año.

4. Rectas tangentes: $y = 3x - 1$ y $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

5. *a*) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_6 = \left(\frac{-6x}{3y^2}\right)_6 = -\frac{12}{25}$.

   b) $y' = \frac{-2x}{(3x^2 + 17)^{2/3}}$; igual a $-\frac{12}{25}$ si $x = 6$.

6. *a*) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$.

   b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

   c) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2x}{1 - 2y}$.

   d) $\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$.

   e) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

   f) $\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2y^2}{2y(1 - 2x)}$.

   g) $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^2$.

   h) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3(2x + y)^2} - 2$.

i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y - 2x}{8y - 4x - 1}$.

j) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - x^3 - xy^2}{2y + y^3 + x^2 y}$.

k) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{9y}$.

7. *a*) $(2, 4)$ y $(-2, -4)$.

   b) $(4, 2)$ y $(-4, -2)$.

8. La recta tangente es $y = -\dfrac{x}{3}$.

9. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{16}{27}$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{27}{16}$.

10. $\dfrac{dx}{dt} = 0.25$.

11. $\dfrac{dx}{dt} = -0.125$.

V.2.8. Diferenciación logarítmica

1. *a*) $5e^{5x}$.

   b) $12e^{4x+1}$.

   c) $e^x(x^2 + 2x)$.

   d) $e^{-x^2}(1 - 2x^2)$.

   e) $x(2\ln x + 1)$.

   f) $\dfrac{1}{2}(\ln x + 1)$.

   g) $\dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.

   h) $e^x(\ln x + \dfrac{1}{x})$.

   i) 2 .

   j) $27x^2$.

   k) $\dfrac{6e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$.

   l) $\dfrac{1}{1 - x^2}\sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$.

   m) $-(3x + 61)\dfrac{(x + 2)^4}{(3x - 5)^7}$.

   n) $(\ln 2)2^x$.

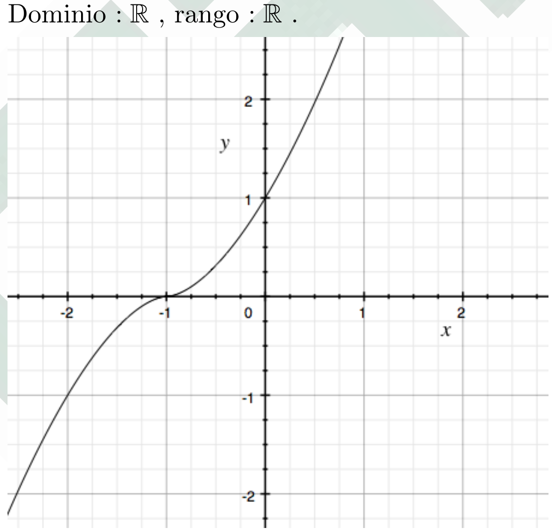
ñ) $(\ln x + 1)x^x$.

2. Verifique sus respuestas contra las respuestas presentadas anteriormente.

3. *a*) 0.
   b) $2e$.
   c) $\frac{78}{5}$.

4. $\frac{y'}{y} = \frac{m}{nx}$ de donde $y' = \frac{my}{nx} = rx^{r-1}$.

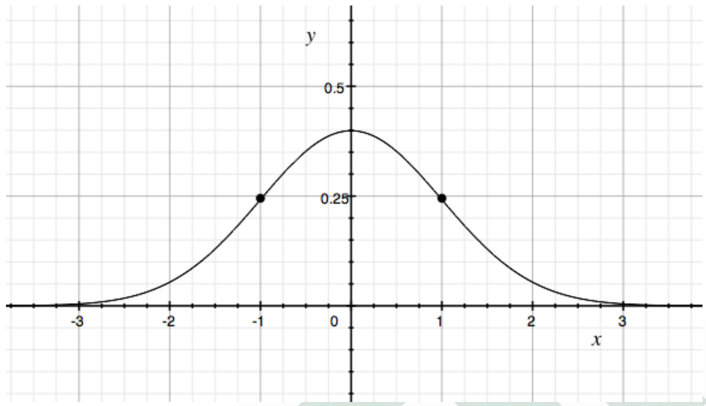
5. *a*) $x^{2x+1}(2\ln x + \frac{2x+1}{x})$.
   b) $\frac{(\ln\sqrt{x})^x}{2}(\ln x + 1)$.

6. 1) a) Creciente: $(-\infty, \infty)$.
      b) Concavidad positiva: $(-1, \infty)$, concavidad negativa: $(-\infty, -1)$.
      c) Punto crítico estacionario en $x = -1$.
      d) Punto de inflexión en $x = -1$.
      e) No tiene.
      f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $\mathbb{R}$.
      g) 

   2) a) Creciente: $(-\infty, 0)$, decreciente: $(0, \infty)$.
      b) Concavidad positiva: $(-\infty, -1)\cup(1,\infty)$, concavidad negativa: $(-1, 1)$.
      c) Punto crítico estacionario en $x = 0$.
      d) Mínimo absoluto en $(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$, puntos de inflexión en $x = -1$ y $x = 1$.

e) $y = 0$.

f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$.

g) 

3) a) Creciente: $(-\infty, \frac{1}{2})$, decreciente: $(\frac{1}{2}, \infty)$.

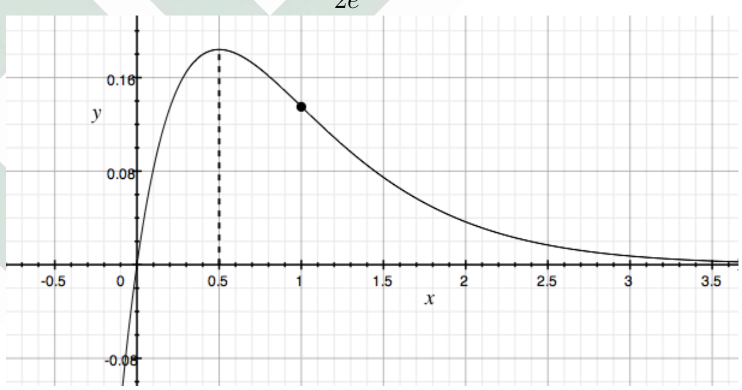
b) Concavidad positiva: $(1, \infty)$, concavidad negativa: $(-\infty, 1)$.

c) Punto crítico estacionario en $x = \frac{1}{2}$.

d) Máximo absoluto en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2e})$, punto de inflexión en $x = 1$.

e) No tiene.

f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $(-\infty, \frac{1}{2e}]$.

g) 

4) a) Creciente: $(-\infty, \infty)$.

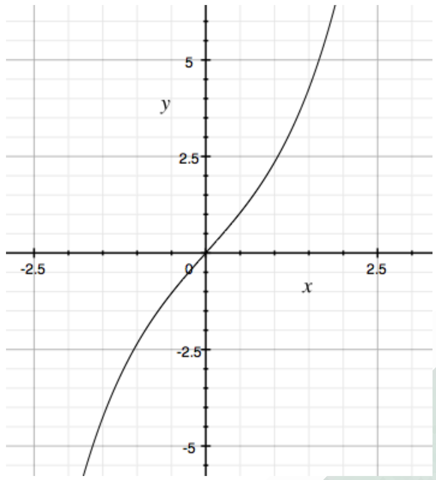
b) Concavidad positiva: $(0, \infty)$, concavidad negativa: $(-\infty, 0)$.

c) No tiene.

d) Punto de inflexión en $x = 0$.

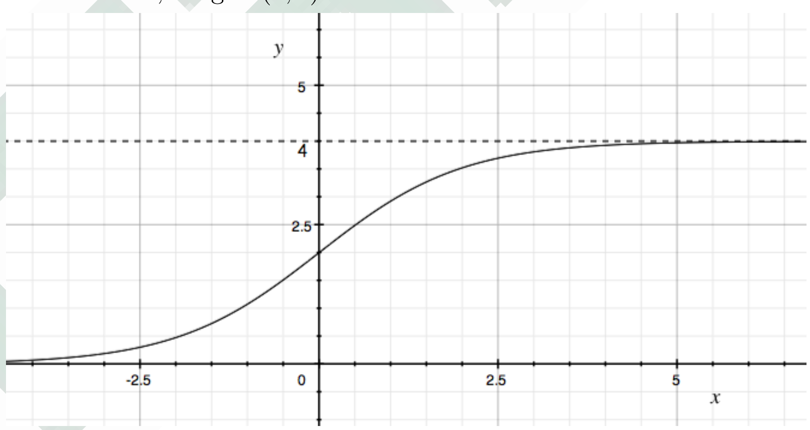
e) No tiene.

f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $\mathbb{R}$.



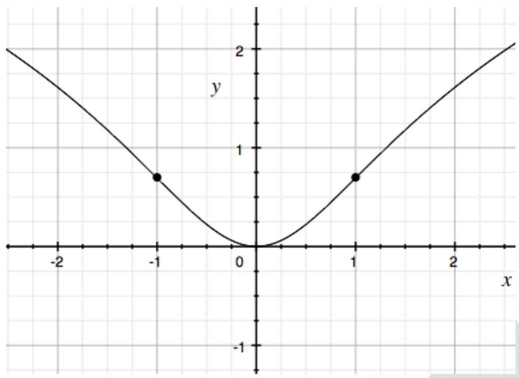
g)

5) a) Creciente: $(-\infty, \infty)$.
   b) Concavidad positiva: $(-\infty, 0)$, concavidad negativa: $(0, \infty)$.
   c) No tiene .
   d) Punto de inflexión en $x = 0$.
   e) $y = 0$ y $y = 4$.
   f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $(0, 4)$.



g)

6) a) Creciente: $(0, \infty)$, decreciente: $(-\infty, 0)$.
   b) Concavidad positiva: $(-1, 1)$, concavidad negativa: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
   c) Punto crítico estacionario en $x = 0$.
   d) Mínimo absoluto en $(0, 0)$, puntos de inflexión en $x = -1$ y $x = 1$.
   e) No tiene.
   f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $[0, \infty)$.

g) 

7)

a) Creciente: $(-\infty, \infty)$.

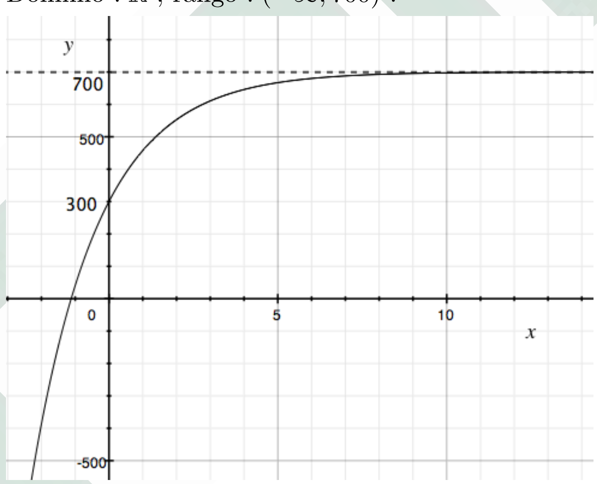
b) Concavidad negativa: $(-\infty, \infty)$.

c) No tiene .

d) No tiene.

e) $y = 700$.

f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $(-\infty, 700)$.

g) 

8)

a) Creciente: $(0, \infty)$, decreciente: $(-\infty, 0)$.

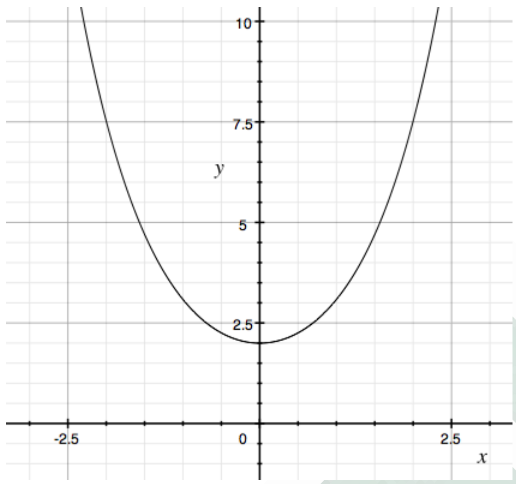
b) Concavidad positiva: $(-\infty, \infty)$.

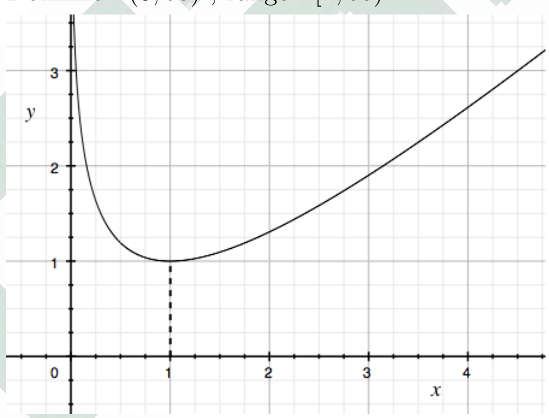
c) Punto crítico estacionario en $x = 0$.

d) Mínimo absoluto en $(0, 2)$.

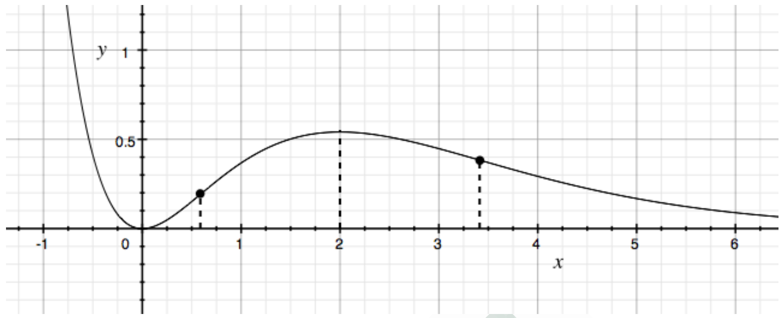
e) No tiene.

f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $[2, \infty)$.

g) 

9) a) Creciente: $(1, \infty)$, decreciente; $(0, 1)$.
b) Concavidad positiva: $(0, \infty)$.
c) Punto crítico estacionario en $x = 1$.
d) Mínimo absoluto en $(1, 1)$.
e) $x = 0$.
f) Dominio : $(0, \infty)$, rango : $[1, \infty)$.
g) 

10) a) Creciente: $(0, 2)$, decreciente; $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.
b) Concavidad positiva: $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$, concavidad negativa: $(2 + \sqrt{2}, \infty)$.
c) Puntos críticos estacionarios en $x = 0$ y $x = 2$.
d) Mínimo absoluto en $(0, 0)$, máximo relativo en $(2, 4e^{-2})$, puntos de inflexión en $x = 2 - \sqrt{2}$ y $x = 2 + \sqrt{2}$.
e) $y = 0$.
f) Dominio : $\mathbb{R}$, rango : $[0, \infty)$.

g) 

7. $t = 0$.

8. *a*) 15 dólares.
   b) 2,231.30 dólares.
   c) 223 radios.

V.2.9. Elasticidad de la demanda

1. *a*) $\dfrac{-100p}{100(5-p)}$.
   b) $\dfrac{-\sqrt{p}}{2(4-\sqrt{p})}$.
   c) $\dfrac{-p}{18-2p}$.

2. *a*) $-\dfrac{1}{39}$.
   b) $-\dfrac{1}{19}$.
   c) $-\dfrac{3}{37}$.

3. *a*) $p = 6$, $x = 300$.
   b) $p = 8$, $x = 200$.
   c) $p = \dfrac{24}{5}$, $x = 360$.

4. $p = \dfrac{1}{3}$, $x = \dfrac{5k}{9}$.

5. $-\dfrac{16}{9}$

6. *a*) $-\dfrac{5}{2}$.
   b) -1 .

7. $\eta = \dfrac{p}{p-b}$ y de aquí las tres afirmaciones.

8. a) $\eta = -\dfrac{4}{3}$, disminuye.
   b) $\eta = -\dfrac{1}{2}$, aumenta.

9. a) $\eta = -\dfrac{1}{4}$, disminuye.
   b) $\eta = -\dfrac{3}{2}$, aumenta.

V.3. Integración

V.3.1. Antiderivadas

1. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2}{x} + 2x - \dfrac{5}{4}$.

2. $F(x) = x^3 + x - 4$.

3. a) 5,108 personas.
   b) 684 personas.

4. 10,080 personas.

5. 436 dólares.

6. a) $I(x) = 20x^{3/2} + 3x^{4/3}$.
   b) 11,008 dólares.

7. 2,300 dólares a 50 unidades.

8. $-2x^3 + 15x^2 - 24x$.

9. a) 1000 dólares.
   b) Sí.
   c) Crece; no.

10. a) $I(x) = 10x - 0.01x^2$.
    b) $p + 0.01x = 10$.
    c) $x = 500$, $p = 5$ y 250 dólares.

V.3.2. Integrales indefinidas

1. a) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} + C$.

   b) $\dfrac{2}{3}x^{3/2} + \dfrac{3}{4}x^{4/3} + 2x^{1/2} + C$.

   c) $\dfrac{x^3}{3} + 2x - \dfrac{1}{x} + C$.

   d) $\dfrac{1}{12}(2x+3)^6 + C$.

2. a) $\ln(2x+3) + C$.

   b) $\dfrac{2}{5}x^{5/2} + \ln x + C$.

   c) $\dfrac{1}{2}\sin(x^2+3) + C$.

   d) $-\ln(\cos x) + C$.

3. $\int(2e^{-x^2} + \dfrac{3e^x}{x})dx$.

V.3.3. Aplicaciones de la integral indefinida

1. 1,000 dólares.
2. $\dfrac{10}{3}$ metros.
3. $p(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x$.
4. 2,700 dólares, $x = 50$.
5. a) $I(x) = 10x - 0.01x^2$.

   b) $p + 0.01x = 10$.

   c) $x = 500$, $p = 5$ y la utilidad máxima es 1,250 dólares.
6. a) 553.51 toneladas.

   b) 1.96 años.
7. 500.69 dólares.
8. $\dfrac{1}{3}(x^2+5)^{3/2} + 1$.

V.3.4. Integración por partes

1. *a*) $xe^x - e^x + C$.

   b) $\frac{2x}{3}(x+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+5)^{3/2} + C$.

   c) $x \ln x - x + C$.

   d) $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$.

   e) $-xe^{-x} - e^{-x} + C$.

   f) $\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$.

   g) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

   h) $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{3} + C$.

   i) $\frac{x^2e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + C$.

   j) $\frac{1}{4}x^4(\ln x - \frac{1}{4}) + C$.

   k) $\frac{1}{3}e^{3x}(2x + \frac{1}{3}) + C$.

   l) $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C$.

2. *a*) $-2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2} + C$.

   b) $x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C$.

   c) $\frac{x(x+1)^{11}}{11} - \frac{(x+1)^{12}}{132} + C$.

   d) $\frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2e^{3x}}{27} + C$.

3. *a*) $\frac{x^2(x^2-1)^{11}}{22} - \frac{(x^2-1)^{12}}{264} + C$.

   b) $\frac{x^4(x^4+5)^9}{36} - \frac{(x^4+5)^{10}}{360} + C$.

4. $\frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{3x^2e^{5x}}{25} + \frac{6xe^{5x}}{125} - \frac{6e^{5x}}{625} + C$.

5. *a*) Sea $u = \sqrt{x}$, así: $\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$.

   b) Sea $u = \sqrt{x}$, así: $\int \sin\sqrt{x}dx = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$.

   c) Sea $u = x^2 - 1$, así: $\int x(x^2-1)\ln(x^2+1)dx = \frac{(x^2-1)^2}{4}\ln(x^2-1) - \frac{(x^2-1)^2}{8} + C$.

6.
   a) 176.87 unidades.
   b) 71.17 unidades.
7. 13,212.06 dólares.
8. $C(x) = 2250 + 250\ln(20) - \dfrac{5000}{(x+20)}(1 + \ln(x+20))$.

V.3.5. Método de sustitución

1.
   a) $\dfrac{(2x+6)^6}{12} + C$.
   b) $\dfrac{e^{5x}}{5} + C$.
   c) $\dfrac{(4x-1)^{3/2}}{6} + C$.
   d) $\dfrac{\ln|3x+5|}{3} + C$.
   e) $-e^{1-x} + C$.
   f) $e^{x^2-1} + C$.
   g) $\dfrac{(x^2-1)^6}{12} + C$.
   h) $\dfrac{2}{5}\ln|x^5+1| + C$.
   i) $\dfrac{\ln^2|5x|}{2} + C$.
   j) $\ln|\ln x| + C$.
   k) $\dfrac{\ln^2(x^2+1)}{2} + C$.
   l) $\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C$.
   m) $-\dfrac{1}{4}\cos(2x^2) + C$.
   n) $(x^2-1)^{3/2} + C$.
   ñ) $\dfrac{3}{65}(2x^5+3)^{13} + C$.
   o) $2e^{\sqrt{x}} + C$.
   p) $\dfrac{1}{8}\sin^4(x^2) + C$.
   q) $\cos(\cos(x)) + C$.
   r) $\dfrac{1}{3}\sin(x^3+1) + C$.
   s) $\dfrac{1}{2}\ln^2|x| + C$.

t) $e^{\sin x} + C$.

2. *a)* $\dfrac{(x+1)^{12}}{12} - \dfrac{(x+1)^{11}}{11} + C$.

   b) $\dfrac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \dfrac{10}{3}(x+5)^{3/2} + C$.

3. *a)* $\ln(\ln x) + C$.

   b) $2e^{\sqrt{x}} + C$.

4. *a)* $-2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} + C$.

   b) $2\ln(\sqrt{x}-1) + C$.

5. $-\dfrac{1}{5(x-5)^5} + C$.

6. *a)* $(x-1) + \ln|x-1| + C$, $(u = x-1)$.

   b) $2\left(\dfrac{(x+1)^{5/2}}{5} - \dfrac{(x+1)^{3/2}}{3}\right) + C$, $(u = \sqrt{x+1})$.

   c) $-\dfrac{1}{4(x-5)^4} - \dfrac{1}{(x-5)^5} + C$, $(u = x-5)$.

V.3.6. Tabla de integrales

1. *a)* $\dfrac{1}{6\sqrt{2}}\ln|\dfrac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}| + C$.

   b) $-\dfrac{1}{6\sqrt{2}}\ln|\dfrac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}| + C$.

   c) $\dfrac{1}{x+1} - \ln|\dfrac{x+1}{x}| + C$.

   d) $\dfrac{1}{2}\ln|2x + \sqrt{4x^2-9}| + C$.

   e) $\dfrac{x^2e^{5x}}{5} - \dfrac{2xe^{5x}}{25} + \dfrac{2e^{5x}}{125} + C$.

   f) $\dfrac{5}{7\sqrt{2}}\ln|\dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}| + C$.

   g) $\dfrac{1}{7}\ln|\dfrac{x}{7-9x}| + C$.

   h) $\dfrac{1}{2}\ln|\dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}| + C$.

   i) $\ln|(x-1) + \sqrt{(x-1)^2+9}| + C$.

   j) $-2e^{-0.5x}(x^2+4x+8) + C$.

V.4. La integral definida

V.4.1. Integrales definidas

1. 8.
2.
   a) $\dfrac{822}{15}$.
   b) 2.
   c) -6.
   d) π.
3.
   a) $9,999$
   b) $\dfrac{1}{2}$
   c) $2\ln 2 - 1$
   d) $\dfrac{9}{20}$
   e) $\dfrac{40}{3}$
   f) 0
   g) $\dfrac{1}{4}(e^2-1)$
   h) $\dfrac{\pi}{2}$ (Sugerencia: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)
   i) $\dfrac{1}{2} - e^{-1}$
   j) 1
   k) 0
   l) $\dfrac{1}{27}\left(4 - \dfrac{34}{e^3}\right) \simeq 0.0854533$
   m) $-\dfrac{23}{100}$
4. $-\dfrac{1}{3}$.
5. $\dfrac{(x^2+5)^{3/2}}{3} + 1$.
6.
   a) 50.54 pesos .
   b) En la octava, 0.087 pesos.
7.
   a) $\int_0^4 (2+6\sqrt{x})dx = 40$ personas.
   b) $\int_8^9 (2+6\sqrt{x})dx \simeq 19.490$ personas.

8. $\int_6^{10} 3(q-4)^2 dq = 208$ dólares.

9. $\int_0^3 16e^{0.05t}dt \simeq 51.787$ millones de litros.

10. $\int_0^{24} 400(18+0.03t)dt = 176,256$ dólares.

11. *a*) $\int_0^2 400(5000e^{0.02t})dt \simeq 4,081,077.3$ dólares.

    b) $\int_0^2 5000(400+20t)e^{0.02t}dt \simeq 4,131,749.3$ dólares.

12. *a*) $\int_2^4 100te^{-0.5t}dt \simeq 131.901$ unidades.

    b) $\int_0^8 100te^{-0.5t}dt \simeq 363.368$ unidades.

V.4.2. Área bajo curvas

1. *a*) $\int_0^2 2xdx = 4$

   b) $\int_1^3 (-x^2+4x-3)dx = \dfrac{4}{3}$

   c) $\int_4^9 \sqrt{x}dx = \dfrac{38}{3}$

   d) $\int_{\ln(1/2)}^0 e^x dx = \dfrac{1}{2}$

2. $\int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^2 (2-x)dx = \dfrac{7}{6}$.

3. $\int_0^1 x^2 dx - \int_{1/2}^1 (2x-1)dx = \dfrac{7}{12}$.

4. $\int_0^\pi \sin x\, dx = \cos 0 - \cos\pi = 2$.

V.4.3. Integrales impropias

1. *a*) $\dfrac{1}{4}$.

   b) 2 .

2. *a*) $\dfrac{1}{12}$.

   b) $\dfrac{1}{2}$.

3. *a*) ∞.

   b) $10e^{-0.01}$.

4. *a*) ∞ .

   b) $\dfrac{1}{2}$.

V.4.4. Área entre curvas

1. $\dfrac{64}{3}$.

2. $\int_{-2}^{2}(x^3 - 3x^2 - 4x + 12)dx + \int_{2}^{3}(-x^3 + 3x^2 + 4x - 12)dx = 32 + \dfrac{3}{4}$.

3. 9 .

4. 120 .

V.4.5. Aplicaciones de la integral definida

1. *a*) 10 años.
   b) 20,000 dólares.
   c) $x = \sqrt{300} \simeq 17.32$ años.

2. $\overline{p} = \dfrac{1}{6}\int_0^6 p(t)dt = 51.70$ pesos.

3. $\int_0^2 1200e^{-0.08t}dt \simeq 2,217.84$ dólares.

4. $\int_0^5 (14,000 + 490t)e^{-0.07}dt = 1000(300 - 335e^{-0.35})$.

5. Se debe hallar T tal que: $\int_0^T 5000e^{0.1(T-t)}dt = 140,000$ y se obtiene $T = 10\ln(3.8) = 13.35$ años.

6. Se debe hallar k tal que: $\int_0^{10} ke^{0.075(10-t)}dt = 100,000$ y se obtiene $k = 5,819.76$ dólares.

7. $6,714.41$ dólares.

8. $4,945.20$ dólares.

9. Se debe hallar $r > 0$ tal que: $\int_0^5 e^{r(5-t)}dt = 3$ y la ecuación que resulta es $e^{5r} - 3r - 1 = 0$.

10. $\int_0^5 f(t)e^{-0.07t}dt \simeq 63.929.49$ dólares.

11. *a*) $\int_2^3 f(x)dx = e^{-1} - e^{-1.5}$
    b) $\int_0^2 f(x)dx = 1 - e^{-1}$
    c) $\int_3^\infty f(x)dx = e^{-1.5} - \text{lím}_{x\to\infty} e^{-0.5x} = e^{-1.5}$
    d) Los tres casos anteriores agotan todas las posibilidades y son ajenos entre sí.

Bibliografía

[1] Arya, J. C. y Lardner R.W. , Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía (quinta edición), Pearson, México, 2009.

[2] Haeussler E. F., Paul R. S. y Wood R. J. , Matemáticas para Administración y Economía (décimosegunda edición), Pearson, 2008

[3] Hoffmann, L. D. Bradley G. L. y Rosen, K. H. , Cálculo aplicado para Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales (octava edición), McGraw-Hill, México, 2006.

[4] Budnick, F.S., Matemáticas Aplicadas para Adimnistración, Economía y Ciencias Sociales (tercera edición), McGraw-Hill, México