Inducción Matemática

Isaac Meza

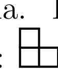
Ejercicio 1 Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Consideremos n distintos puntos sobre una circunferencia y unamos los puntos adyacentes por líneas rectas de modo que formemos un polígono. Demuestra que los ángulos interiores suman $(n-2)180°$.

Ejercicio 2 Supongamos que n cuerdas son dibujadas dentro de un círculo de tal forma que cada cuerda interseque a todas y ninguna terna se intersecta en un solo punto. Demuestra que las cuerdas dividen al círculo en $\frac{n^2+n+2}{2}$.

Ejercicio 3 Consideremos n puntos sobre una circunferencia, y unámoslos con líneas rectas de modo que parten al círculo en distintas regiones. Dados n puntos, ¿Cuál es el número máximo de regiones en el que el círculo puede ser dividido? Verificando los primeros 5 casos podemos llegar a la siguiente conjetura: *El máximo número de regiones dentro del círculo es* $2^n - 1$.

Demuestra que:

- i La conjetura es falsa. (Verifica el caso $n = 6$).
- ii El máximo número de regiones en las que se divide al círculo es $\frac{n^4-6n^3+24n^2-18n+24}{24}$.

Ejercicio 4 [Golomb] Consideremos un tablero de ajedrez de $2^n \times 2^n$ al cual se le ha removido una casilla. Demuestra que puede ser cubierto sin traslapes por trominos: 

Ejercicio 5 [Serie Geométrica] Sean $a, r \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$ y $r \neq 1$. Demuestra que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Ejercicio 6 Sea $k \in \mathbb{Z}$ fijo. Demuestra que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1)\cdots(j+k-1) = \frac{(k+n)!}{(k+1)(n-1)!}$$

(Hint:Considera los coeficientes binomiales)

Ejercicio 7 Demuestra que $\forall n \geq 2$,

$$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$$

Ejercicio 8 Demuestra que $\forall n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Ejercicio 9 [Cardinalidad del Potencia] Demuestra que el número de subconjuntos de un conjunto con $n \in \mathbb{N}$ elementos es 2^n.

Ejercicio 10 [Euler] Sean m, n y p enteros no negativos. Demuestra que,

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{m}{i}\binom{n}{p-i} = \binom{m+n}{p}$$

Ejercicio 11 Sea $1 \leq m \leq n$,

$$\sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \binom{n}{m+i} = \binom{n-1}{m-1}$$

Ejercicio 12 [Sumas Telescópicas] Sean $a_1, a_2, \ldots$ números reales, demuestra que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

Ejercicio 13 Demuestra que para $n \geq 4$,

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + + \frac{1}{n!} < 3 - \frac{1}{n}$$

Ejercicio 14 [Leyes de DeMorgan] Demuestra que para todo $n \geq 1$, si $A_1, \ldots, A_n \subseteq U$, entonces

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} {A_i}^c$$

y

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} {A_i}^c$$

Ejercicio 15 [Diferencia Simétrica] La *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B, denotado como, $\triangle$ es el conjunto de las x tal que $x \in A$ o (exclusivo) $x \in B$ i.e.

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Sean $A_1, \ldots, A_n \subseteq U$. Demuestra que $x \in (A_1 \triangle \cdots \triangle A_{n-1}) \triangle A_n \Leftrightarrow x \in A_j$ para exactamente un número impar de $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Concluye que la diferencia simétrica es asociativa.