Cálculo III
Notas de Clase

Dra. Lorena Zogaib
Departamento de Matemáticas
ITAM

Agosto 1, 2019

Contenido

Prólogo

Este documento constituye un material de apoyo para el curso de Cálculo III para las carreras de Economía y Dirección Financiera en el ITAM. Se trata de una recopilación de mis notas de clase, con el fin de agilizar la discusión de los temas en el aula. El material se presenta en estricto apego al orden del temario vigente, aunque claramente es discutido bajo un enfoque personal y en un lenguaje sencillo, a veces coloquial.

Estas notas no pretenden sustituir la lectura de la bibliografía seleccionada para el curso. Están basadas en material extraído precisamente de esos textos, así como de documentos y libros escritos por mis colegas y amigos del Departamento de Matemáticas del ITAM. Un especial agradecimiento a mi colega y amiga, la Dra. Carmen López Laiseca, por compartir conmigo sus ejercicios y por sus valiosas sugerencias en cuanto al contenido del curso. También quisiera agradecer a Rigel Jarabo García, estudiante de Economía, quien prestó su Servicio Social elaborando una parte del material gráfico de este texto.

Se espera que el estudiante resuelva una gran variedad de ejercicios sobre el tema, que no han sido incluidos en este documento debido a su extensión. Al respecto, el estudiante puede utilizar el documento de trabajo *Cálculo III, Cuaderno de Ejercicios*, Lorena Zogaib, Departamento de Matemáticas, ITAM, agosto 1 de 2019. Mi agradecimiento a Angélica Martínez Leyva, estudiante de Economía y Ciencia Política, quien prestó su Servicio Social transcribiendo a Latex el cuaderno de ejercicios del curso. El material gráfico de ese cuaderno estuvo a cargo de Rigel. Ellas dos realizaron una linda y útil aportación a la comunidad ITAM.

Agradezco todas las sugerencias y correcciones que he recibido de mis colegas y varias generaciones de estudiantes. De antemano ofrezco una disculpa al lector por los errores y omisiones que encuentre en este texto. Siempre serán bienvenidas las correcciones y comentarios que amablemente me hagan llegar.

Lorena Zogaib

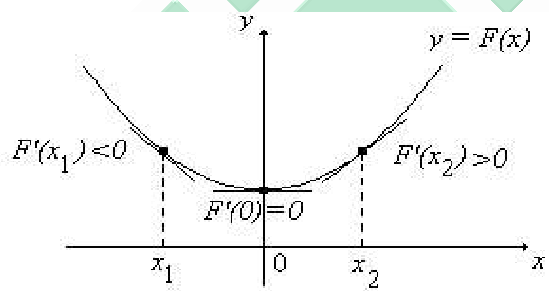
Capítulo 1

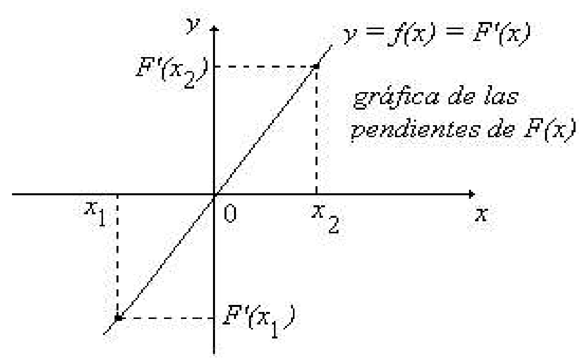
Integración

1.1 Integral indefinida. Integración por sustitución

1.1.1 Antiderivada. Integral indefinida

Dada una función diferenciable $F(x)$, su derivada $f(x) = dF(x)/dx$ se define como la razón de cambio instantánea de F en cada punto interior x de su dominio. Ésta representa la pendiente de la recta tangente a la curva $y = F(x)$ en el punto $(x, F(x))$, como se ilustra en las siguientes gráficas. La gráfica superior muestra una función diferenciable $F(x)$, cuya derivada es la función $f(x) = dF(x)/dx$ mostrada en la gráfica inferior.





En muchas aplicaciones nos interesa resolver el problema inverso, a saber, dada una función f buscamos una función F cuya derivada sea f. En ese caso, decimos que F es una *antiderivada* de f.

Definición. Se dice que la función diferenciable F es una *antiderivada* o *primitiva* de la función f en un intervalo abierto I si, para todo $x \in I$,

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Por ejemplo, una antiderivada de la función $f(x) = 2x$ es la función $F(x) = x^2$, ya que $dx^2/dx = 2x$. Nota que ésta no es la única antiderivada de f, ya que también las funciones $F(x) = x^2 + 1$ o $F(x) = x^2 - 5$ tienen por derivada $2x$. De hecho, el conjunto de antiderivadas de $f(x) = 2x$ es infinito, ya que para cualquier constante C se satisface $d\left(x^2 + C\right)/dx = 2x$. Así, $x^2 + C$ representa el conjunto de todas las antiderivadas de la función $f(x) = 2x$. A esta familia infinita de antiderivadas se le conoce como la *integral indefinida* de f.

Definición. La *integral indefinida de la función $f(x)$ con respecto a x* se denota por $\int f(x)dx$ y representa el conjunto de todas las antiderivadas de f. En ese caso escribimos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

en donde C es una constante arbitraria y F es tal que $dF(x)/dx = f(x)$. El símbolo $\int$ se conoce como *signo de integral*, la función f es el *integrando* y x es la *variable de integración.*

Por ejemplo, como $F(x) = x^2$ es una antiderivada de $f(x) = 2x$, por lo tanto la integral indefinida de f con respecto a x es

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Pero también pudimos haber seleccionado a $F(x) = x^2 + 1$ como antiderivada de f, obteniendo

$$\begin{aligned} \int 2x\,dx &= \left(x^2 + 1\right) + C \\ &= x^2 + (C + 1) \\ &= x^2 + C', \end{aligned}$$

con $C' = C + 1$. En realidad, ambos resultados representan la misma familia de funciones (C y C' son arbitrarias). El primer resultado es más simple.

A partir de la definición de integral indefinida, debe resultar claro que

$$\int \frac{dF(x)}{dx}\,dx = F(x) + C \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x).$$

Ejemplos:

1. $\int r'(\theta)\,d\theta = r(\theta) + C.$
2. $\dfrac{d}{dt}\int e^{\sqrt{t}}\,dt = e^{\sqrt{t}}.$

Propiedades de la integral indefinida

1. $\int [kf(x)]\;dx = k\left[\int f(x)\;dx\right]$, para todo $k \in \mathbb{R}$
2. $\int [f(x) + g(x)]\;dx = \int f(x)\;dx + \int g(x)\;dx.$

Ejemplo:

$$\int \left[5f(x) - \frac{1}{3}g(x)\right] dx = 5\int f(x)\;dx - \frac{1}{3}\int g(x)\;dx.$$

Cuidado: $\int (fg)dx \neq \left(\int f dx\right)\left(\int g dx\right)$ y $\int (f/g)\,dx \neq \left(\int f dx\right) / \left(\int g dx\right)$.

Algunas fórmulas de integración directa

1. $\int dx = x + C.$
2. $\int x^n\;dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$
3. $\int x^{-1}\;dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$
4. $\int \operatorname{sen} x\;dx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos x\;dx = \operatorname{sen} x + C.$
6. $\int \sec^2 x\;dx = \tan x + C.$
7. $\int \csc^2 x\;dx = -\cot x + C.$
8. $\int \sec x\;\tan x\;dx = \sec x + C.$
9. $\int \csc x\;\cot x\;dx = -\csc x + C.$
10. $\int e^x\;dx = e^x + C.$
11. $\int a^x\;dx = \dfrac{1}{\ln a}a^x + C, \quad a > 0,\; a \neq 1.$

Ejemplos:

1. $\int \frac{4x\sqrt{x^3}}{x^5}\,dx = 4\int x^{-5/2}\,dx = 4\left(\frac{x^{-3/2}}{-3/2}\right) + C = -\frac{8}{3}x^{-3/2} + C.$
2. $\int [\sqrt{5} + \sqrt{\sqrt{t}}]\,dt = \int [\sqrt{5} + t^{1/4}]\,dt = \sqrt{5}\,t + \frac{t^{5/4}}{5/4} + C = \sqrt{5}\,t + \frac{4}{5}t^{5/4} + C.$
3. $\int 3^x\,dx = \frac{1}{\ln 3}3^x + C.$
4. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\,dx = \int \sec x\,\tan x\,dx = \sec x + C.$
5. $\int (\ln(2x) - \ln x)\,dx = \int \ln\left(\frac{2x}{x}\right)\,dx = \int \ln 2\,dx = \ln 2\left(\int dx\right) = x\ln 2 + C.$

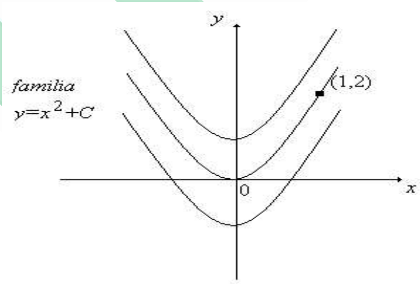
Es importante observar que la integral indefinida siempre debe contener la constante de integración C. Esta constante indica que la integral indefinida representa una infinidad de funciones, o familia de curvas solución, que poseen la misma pendiente en cada punto de su dominio. Por ejemplo, la familia de curvas $y(x)$ cuya pendiente en cada punto x es

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

está dada por

$$y(x) = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C,$$

que representa una infinidad de parábolas desplazadas verticalmente, como se muestra en la siguiente figura.



Sólo cuando se desea seleccionar la curva particular de la familia que pasa por un punto dado (x_0, y_0) entonces la constante C deja de ser arbitraria, para tomar un valor específico. A esto se le conoce como un *problema de valores iniciales*. Por ejemplo, nos preguntamos cuál es la curva $y(x)$ cuya pendiente en cada punto x es $dy/dx = 2x$ y que además pasa por el punto $(1, 2)$. Es decir, buscamos una función $y(x)$ tal que

$$y'(x) = 2x, \quad y(1) = 2.$$

Sabemos que la solución a la ecuación $y'(x) = 2x$ es la familia de curvas $y(x) = x^2 + C$. Como

$$y(1) = 1^2 + C = 2,$$

por lo tanto $C = 1$. Así, la curva que satisface las condiciones anteriores es

$$y(x) = x^2 + 1.$$

Un problema de valores iniciales puede involucrar derivadas de orden superior. En ese caso, cada integral indefinida tiene asociada una constante de integración diferente. Para determinar el valor de todas esas constantes será necesario especificar un número de condiciones iniciales igual al orden de la derivada mayor. Así, por ejemplo, buscamos una función $y(x)$ tal que

$$y''(x) = 6x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1.$$

Para ese fin, llevamos a cabo la primera integración, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \int \frac{d^2y}{dx^2}\, dx \\ &= \int 6x\, dx \\ &= 3x^2 + C_1, \end{aligned}$$

Integrando nuevamente, se tiene

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \frac{dy}{dx}\, dx \\ &= \int (3x^2 + C_1)\, dx \\ &= x^3 + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Por último, para determinar los valores de C_1 y C_2 utilizamos las condiciones iniciales dadas, es decir,

$$\begin{aligned} y(0) &= -2 = (0)^3 + C_1(0) + C_2 \\ y'(0) &= 1 = 3(0)^2 + C_1 \end{aligned}$$

obteniendo $C_1 = 1$ y $C_2 = -2$. De esta manera, la solución a la ecuación $y''(x) = 6x$ con los valores iniciales dados es

$$y(x) = x^3 + x - 2.$$

1.1.2 Integración por sustitución

El método de integración por sustitución se utiliza cuando el integrando es la derivada de una composición de funciones. La idea es introducir un cambio de variable en la integral original, que presenta una forma relativamente compleja, con el fin de convertirla en una integral directa o, al menos, más manejable. Por ejemplo, compara las siguientes integrales

$$\int \operatorname{sen} x \, dx \qquad \text{vs} \qquad \int \operatorname{sen}\left(x^2\right) 2x \, dx.$$

La integral de la izquierda es directa, de la forma $\int f(x)dx$ con $f(x) = \operatorname{sen} x$, dada por

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C.$$

En contraste, la integral de la derecha es de la forma $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$, en donde el integrando es la derivada de la composición $f(g(x))$, con $f(g(x)) = sen\, g(x)$ y $g(x) = x^2$. En ese caso, resulta natural proponer la sustitución $u = x^2$. De este modo, tenemos

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = d(x^2) = 2x \, dx$$

y la integral original se reduce a

$$\int \operatorname{sen}\left(x^2\right) 2x \, dx = \int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C = -\cos(x^2) + C.$$

Método de sustitución para integrales indefinidas. Sea $u = g(x)$, con g diferenciable, y sean f y F tales que $f(u) = \dfrac{dF(u)}{du}$. Entonces

$$\int f(g(x))\, g'(x) \, dx = \int f(g(x)) \, dg(x) = \int f(u) \, du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

Ejemplo:

Determina $\int \sqrt{2+5x} \, dx$.

Para ello, proponemos $u = 2 + 5x$. En ese caso,

$$u = 2 + 5x \quad \Rightarrow \quad du = d(2 + 5x) = 5 \, dx.$$

Observamos que en el integrando hace falta un factor 5 para completar la diferencial du. Como se trata de un factor constante, podemos multiplicar y dividir la integral por 5, de donde

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2+5x}\,dx &= \left(\frac{1}{5}\right)\int \sqrt{2+5x}\;(5\,dx)\\ &= \frac{1}{5}\int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right)+C\\ &= \frac{2}{15}u^{3/2}+C\\ &= \frac{2}{15}\,(2+5x)^{3/2}+C.\end{aligned}$$

Observa que a partir del tercer renglón también pudimos haber escrito $\frac{1}{5}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}+C\right) = \frac{2}{15}\,(2+5x)^{3/2}+\frac{1}{5}C$, que es equivalente al resultado obtenido.

Este método no es útil cuando se tiene una integral de la forma $\int f(g(x))\,dx$ en donde falta el factor $g'(x)$ en el integrando, salvo que $g'(x)$ sea una constante, como en el ejemplo anterior. Por ejemplo, considera la integral

$$\int \operatorname{sen}(x^2)\,dx$$

y vuelve a intentar el cambio de variable $u = x^2$. Notarás que

$$\int \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \int \operatorname{sen} u\,dx = \int \operatorname{sen} u\,\frac{du}{2x} = \int \operatorname{sen} u\,\frac{du}{2\sqrt{u}} = \text{etc},$$

que contiene variables mezcladas, por lo que no puede integrarse ni con respecto a x ni con respecto a u.

El método de sustitución puede complementarse con algún otro método, o con el uso de identidades matemáticas y trucos varios. Por ejemplo, considera las integrales $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$ y $\int \cos^2 x\,dx$. Sabemos que éstas no son directas, ya que las funciones $sen^2 x$ y $\cos^2 x$ no poseen una antiderivada simple. Por esta razón, es útil utilizar las siguientes identidades trigonométricas (¿sabes cómo deducirlas?)

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Con la primera de éstas encontramos $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$ de la siguiente manera

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx.$$

Introduciendo el cambio de variable $u = 2x$ se tiene

$$u = 2x \quad \Rightarrow \quad du = d(2x) = 2\,dx,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \int \frac{1}{2}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{\cos(2x)}{2}\ (2\, dx) \\
&= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos u\, du \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + C \\
&= \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C\,.
\end{aligned}$$

Invitamos al entusiasta lector a demostrar que

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C\,.$$

Con estas dos nuevas fórmulas, ampliamos nuestra tabla anterior, ahora adaptada al caso general de integrales por sustitución.

Algunas fórmulas de integración por sustitución

Sea $u = g(x)$, con g una función diferenciable. Entonces,

1. $\int du = u + C$.
2. $\int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C\,,\quad n \neq -1$.
3. $\int u^{-1}\, du = \int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C,\quad u \neq 0$.
4. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$.
5. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$.
6. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$.
7. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$.
8. $\int \sec u\ \tan u\, du = \sec u + C$.
9. $\int \csc u\ \cot u\, du = -\csc u + C$.
10. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \dfrac{u}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}(2u)}{4} + C$.
11. $\int \cos^2 u\, du = \dfrac{u}{2} + \dfrac{\operatorname{sen}(2u)}{4} + C$.
12. $\int e^u\, du = e^u + C$.
13. $\int a^u\, du = \dfrac{1}{\ln a} a^u + C,\quad a > 0,\ a \neq 1$.

Ejemplos:

1. $\int e^{\frac{2-3x}{4}}\,dx.$

   Sea $u=\dfrac{2-3x}{4}$, de modo que $du=-\frac{3}{4}\,dx$.

   $\therefore \int e^{\frac{2-3x}{4}}dx=\left(-\frac{4}{3}\right)\int e^{\frac{2-3x}{4}}\left(-\frac{3}{4}dx\right)=-\dfrac{4}{3}\int e^{u}du=-\dfrac{4e^{u}}{3}+C=-\dfrac{4e^{\frac{2-3x}{4}}}{3}+C.$

2. $\int \dfrac{\ln(2x)}{x}\,dx.$

   Sea $u=\ln(2x)$, de modo que $du=\dfrac{dx}{x}$.

   $\therefore \int \dfrac{\ln(2x)}{x}\,dx=\int \ln(2x)\left(\dfrac{1}{x}\,dx\right)=\int u\,du=\dfrac{u^2}{2}+C=\dfrac{\ln^2(2x)}{2}+C.$

3. $\int 3^{\cos x}\operatorname{sen}x\,dx.$

   Sea $u=\cos x$, de modo que $du=-\operatorname{sen}x\,dx$.

   $\therefore \int 3^{\cos x}\operatorname{sen}x\,dx=-\int 3^{\cos x}(-\operatorname{sen}x)\,dx=-\int 3^{u}\,du=-\dfrac{3^{u}}{\ln 3}+C=-\dfrac{3^{\cos x}}{\ln 3}+C.$

4. $\int e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx.$

   Sea $u=1-e^{2x}$, de modo que $du=-2e^{2x}\,dx$.

   $$\begin{aligned}\therefore \int e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx&=\left(-\frac{1}{2}\right)\int\sqrt{1-e^{2x}}\,\left(-2e^{2x}\right)\,dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du\\&=-\frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right)+C=-\frac{1}{3}\left(1-e^{2x}\right)^{3/2}+C.\end{aligned}$$

5. $\int \dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\,dx.$

   Este es el ejemplo 4 de la sección anterior, pero ahora lo resolveremos por el método de sustitución. Sea $u=\cos x$, de modo que $du=-\operatorname{sen}x\,dx$.

   $\therefore \int\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\,dx=-\int\dfrac{-\operatorname{sen}x}{(\cos x)^2}\,dx=-\int u^{-2}\,du=\dfrac{1}{u}+C=\dfrac{1}{\cos x}+C=\sec x+C.$

6. $\int x\sqrt{2x-1}\,dx.$

   Método 1:

   Sea $u=2x-1$. Como el factor afuera del radical no es una constante, hay que usar una estrategia diferente que en los ejemplos anteriores. En lugar de obtener du, más bien despejamos x en función de u y obtenemos directamente dx. De $u=2x-1$ se sigue que $x=\dfrac{u+1}{2}$, de modo que $dx=\dfrac{1}{2}du$.

   $$\begin{aligned}\therefore \int x\sqrt{2x-1}\,dx&=\int\left(\frac{u+1}{2}\right)\sqrt{u}\left(\frac{1}{2}\right)du=\frac{1}{4}\int\left(u^{3/2}+u^{1/2}\right)\,du\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{u^{5/2}}{5/2}+\frac{u^{3/2}}{3/2}\right)+C=\frac{1}{10}\left(2x-1\right)^{5/2}+\frac{1}{6}\left(2x-1\right)^{3/2}+C.\end{aligned}$$

Método 2:
Sea $u = \sqrt{2x-1}$ y se procede de manera similar al método 1. De $u = \sqrt{2x-1}$ se sigue que $x = \dfrac{u^2+1}{2}$, de modo que $dx = u\,du$.

$$\therefore \int x\sqrt{2x-1}\,dx = \int \left(\frac{u^2+1}{2}\right)(u)(u)\,du = \frac{1}{2}\int \left(u^4+u^2\right)\,du$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right)+C = \frac{1}{10}\left(2x-1\right)^{5/2}+\frac{1}{6}\left(2x-1\right)^{3/2}+C.$$

1.2 Sumas finitas. Sumas de Riemann. Integral definida

1.2.1 Sumas finitas

Definición. Sean $k_0, n \in \mathbb{Z}$, con $k_0 \leq n$. Una *suma finita* es una expresión de la forma

$$\sum_{k=k_0}^{n} a_k = a_{k_0} + a_{k_0+1} + a_{k_0+2} + \ldots + a_n,$$

en donde $k = k_0, k_0+1, \ldots, n$ se denomina el *índice* de la suma, a_k es el *k-ésimo término*, k_0 es el *índice inferior* y n el *índice superior* de la suma.

Los siguientes ejemplos ilustran la notación:

1. $\sum\limits_{k=-1}^{4} k = -1+0+1+2+3+4 = 9.$
2. $\sum\limits_{k=1}^{3} (-1)^k k^2 + 8 = [\sum\limits_{k=1}^{3} (-1)^k k^2] + 8 = [(-1)^1 1^2 + (-1)^2 2^2 + (-1)^3 3^2] + 8 = 2.$
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} 3^k = 1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}+3^n.$
4. $\sum\limits_{k=1}^{4} 1 = 1+1+1+1 = 4.$
5. $\sum\limits_{k=0}^{4} 1 = 1+1+1+1+1 = 5.$
6. $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = 1+1+\ldots+1 = n.$
7. $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \Delta x_k = x_1^2\Delta x_1 + x_2^2\Delta x_2 + \ldots + x_n^2\Delta x_n.$

Nota que en la suma $\sum\limits_{k=k_0}^{n} a_k$ el resultado final no depende del índice k. Esto significa que k es un índice mudo, por lo que puedes reemplazarlo por cualquier otra letra, con excepción de k_0 y n. Así, por ejemplo,

$$\sum_{k=n-2}^{n} a_k = \sum_{i=n-2}^{n} a_i = a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Asimismo, un mismo resultado puede expresarse de dos maneras aparentemente distintas mediante un cambio de índices, como se muestra en el siguiente ejemplo ($l \geq i$):

$$\sum_{k=i}^{l} F(k) = \sum_{j=0}^{l-i} F(j+i) = F(i) + F(i+1) + \ldots + F(l).$$

Propiedades de la suma

Sean $k_0, n \in \mathbb{Z}$, con $k_0 \leq n$, y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $\sum\limits_{k=k_0}^{n} c = c(n - k_0 + 1)$.
2. $\sum\limits_{k=k_0}^{n} ca_k = c \sum\limits_{k=k_0}^{n} a_k$.
3. $\sum\limits_{k=k_0}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=k_0}^{n} a_k + \sum\limits_{k=k_0}^{n} b_k$.

Ejemplo:

$$\sum_{k=3}^{5} (2k+4) = 2\sum_{k=3}^{5} k + \sum_{k=3}^{5} 4 = 2(3+4+5) + (4+4+4) = 36.$$

Fórmulas de sumas especiales ($k_0 = 1$)

Sea $n \in \mathbb{Z}$, con $n \geq 1$. Entonces

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} (k+2)(k-5) &= \sum_{k=1}^{100} (k^2 - 3k - 10) = \sum_{k=1}^{100} k^2 - 3\sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{100} 10 \\ &= \frac{100(100+1)(2(100)+1)}{6} - \frac{3(100)(100+1)}{2} - 10(100) = 322\,200.\end{aligned}$$

Además de las anteriores, existen otras sumas especiales, que revisten de gran interés debido a sus aplicaciones prácticas. Una de ellas, posiblemente la más importante y útil, es la suma geométrica, que presentamos a continuación.

Definición. Sea $n \in \mathbb{Z}$, con $n \geq 1$. Una *suma geométrica* es una expresión de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1},$$

con $r \in \mathbb{R}$ una constante.

Para encontrar el valor de la suma geométrica, primero nota que si $r = 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} 1^{k-1} = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n.$$

Ahora procedemos a determinar $\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}$ para $r \neq 1$. Para ello es conveniente denotar la suma como $S_n = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1}$, es decir,

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}.$$

Luego utilizamos el truco de multiplicar S_n por r

$$rS_n = r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^{n-1} + r^n,$$

de modo que la substracción $S_n - rS_n$ se convierte simplemente en

$$S_n - rS_n = 1 - r^n,$$

o bien, factorizando S_n en el lado izquierdo,

$$(1 - r)S_n = 1 - r^n.$$

Por último, como hemos supuesto $r \neq 1$, en esta última ecuación podemos despejar S_n, obteniendo

$$S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Concluimos que

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}, \quad r \neq 1.$$

Ejemplos:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\left[1-\frac{1}{2^{20}}\right].$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\cdots-\left(\frac{1}{2}\right)^{9} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\left[1-\frac{1}{2^{10}}\right].$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{97}3^{k-1} = 1+3+3^2+\cdots+3^{96} = \frac{1-3^{97}}{1-3} = -\frac{1}{2}\left[1-3^{97}\right].$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{17}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} = \sum_{n=1}^{17}2^{n-1} = 1+2+2^2+\cdots+2^{16} = \frac{1-2^{17}}{1-2} = 2^{17}-1.$
5. $\displaystyle\sum_{j=1}^{7}r^{2j-2}$, con $|r|\neq 1$.

   $\displaystyle\sum_{j=1}^{7}r^{2j-2} = \sum_{j=1}^{7}(r^2)^{j-1} = 1+r^2+(r^2)^2+\cdots+(r^2)^6 = \frac{1-(r^2)^7}{1-r^2} = \frac{1-r^{14}}{1-r^2}.$
6. El precio actual de un bono cuponado está dado por

$$p = \sum_{t=1}^{N-1} c\beta^t + K,$$

en donde c es el valor del cupón, $0<\beta<1$ es una tasa de descuento, K es un valor terminal (valor nominal) y $N>2$. Encuentra el valor de la suma.

En este caso, se tiene

$$\begin{aligned} p &= \left(\sum_{t=1}^{N-1} c\beta^t\right) + K \\ &= c\beta\left(\sum_{t=1}^{N-1}\beta^{t-1}\right) + K \\ &= c\beta\left(1+\beta+\cdots+\beta^{N-2}\right) + K. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p = c\beta\left[\frac{1-\beta^{N-1}}{1-\beta}\right] + K.$$

Además de la suma geométrica, otro tipo de suma de interés es la familia denominada como sumas telescópicas, definidas a continuación.

Definición. Sean $k_0, n \in \mathbb{Z}$, con $k_0 \leq n$. Una *suma telescópica* es una expresión de la forma

$$\sum_{k=k_0}^{n} (a_{k+1} - a_k).$$

Como una suma telescópica involucra la resta de elementos consecutivos, casi todos los términos se irán cancelando en parejas, sobreviviendo sólo dos de ellos, es decir,

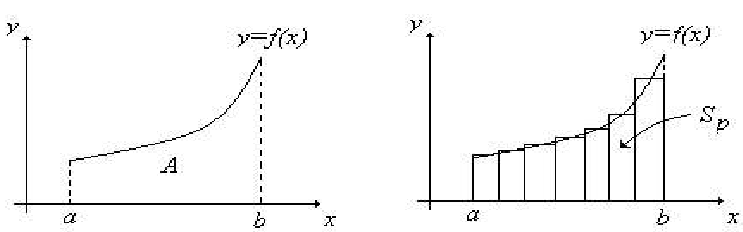
$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{n} (a_{k+1} - a_k) &= (a_{k_0+1} - a_{k_0}) + (a_{k_0+2} - a_{k_0+1}) + (a_{k_0+3} - a_{k_0+2}) \\ &\quad + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) \\ &= a_{n+1} - a_{k_0}\,. \end{aligned}$$

Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right) &= \left(2^2 - 1^2\right) + \left(3^2 - 2^2\right) + \left(4^2 - 3^2\right) \\ &\quad + \ldots + \left(n^2 - (n-1)^2\right) + \left((n+1)^2 - n^2\right) \\ &= -1^2 + (n+1)^2 \\ &= (n+1)^2 - 1. \end{aligned}$$

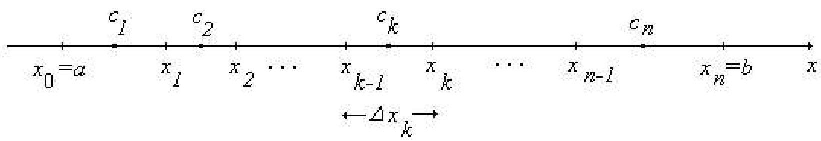
1.2.2 Sumas de Riemann

Las sumas finitas pueden utilizarse para aproximar el área A bajo una curva $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, con f una función no negativa, $f \geq 0$, y acotada. La idea es aproximar esa área por la suma S_P de las áreas de muchos rectángulos delgados, como lo muestra la siguiente figura.



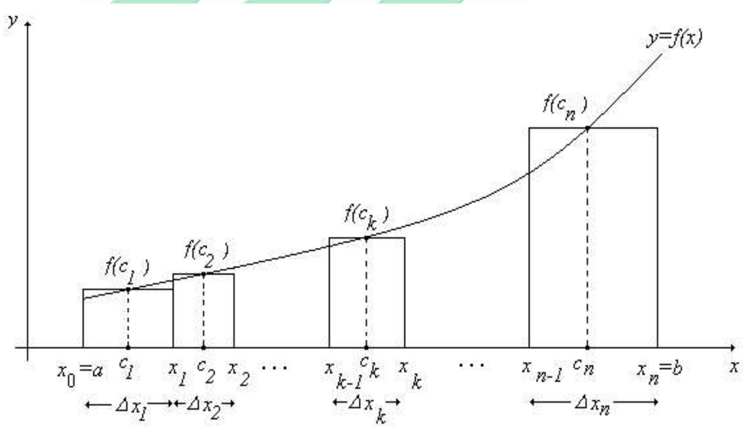
La base de los rectángulos se obtiene construyendo una partición P del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos. Para ello, se selecciona $n-1$ puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$

en $[a, b]$ tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. La partición $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ define entonces una familia de n subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, con longitud $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, para cada $k = 1, \ldots, n$.



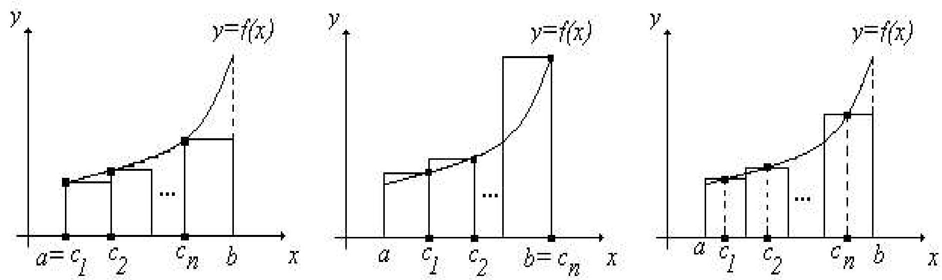
Para determinar la altura del k-ésimo rectángulo se selecciona un punto arbitrario $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ en el subintervalo correspondiente, de modo que su altura estará dada por el valor de la función, $f(c_k)$, en ese punto. Así, el rectángulo tiene por base el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ en el eje X, y por altura $f(c_k)$, de modo que su área es $f(c_k)\Delta x_k$. Al sumar los n productos $f(c_k)\Delta x_k$ obtenemos finalmente el área total S_P del conjunto de rectángulos, es decir,

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$



Esto es lo que se conoce como una *suma de Riemann* para f en el intervalo $[a, b]$.

El valor S_P de una suma de Riemann para aproximar el área A bajo una curva $y = f(x)$ depende del número n de subintervalos considerados, así como de las longitudes Δx_k de los subintervalos. Asimismo, la selección de los números c_k en cada subintervalo k determinará si los rectángulos correspondientes quedarán por debajo, por encima, o cruzando la curva.



A medida que se refina la partición P se incrementa el número de intervalos y los rectángulos se adelgazan. Si la función f es lo suficientemente "decente", entonces es de esperarse que la suma S_P aproxime con mayor exactitud el valor del área A, sin importar si los rectángulos van por debajo o por encima de la curva. En ese caso, es posible demostrar que en el límite cuando el tamaño de la partición tiende a cero, $||P|| \to 0$, el valor de la suma infinita es independiente tanto de la partición utilizada como de la selección de los puntos c_k. Su valor es único y coincide precisamente con el área A, es decir,

$$A = \lim_{||P|| \to 0} S_P = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k.$$

A este límite, cuando existe, se le conoce como integral definida de f entre $x = a$ y $x = b$ y se denota por $\int_a^b f(x)dx$. La notación en términos del signo de integral se hará evidente en la sección 1.3, cuando estudiemos el Teorema Fundamental del Cálculo.

Definición. Sea f una función definida en $[a, b]$ y sea P una partición de $[a, b]$, con puntos de la partición $x_0, x_1, \ldots, x_n$, en donde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Sean $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y $||P|| = \text{máx}\{\Delta x_k\}$. La *integral definida* de f entre $x = a$ y $x = b$ es el límite

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k,$$

cuando este límite existe. En ese caso, se dice que la función f es *integrable,* o *Riemann integrable, en el intervalo* $[a, b]$.

Ejemplo:

Expresa el límite $\lim\limits_{||P||\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} (2c_k - 5)^3 \Delta x_k$ como una integral definida, si P denota una partición del intervalo $[0, 2]$.

En este caso, $f(x) = (2x - 5)^3$, de modo que

$$\lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} (2c_k - 5)^3 \Delta x_k = \int_0^2 (2x-5)^3 dx.$$

El límite $\lim\limits_{||P||\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k$ no siempre existe, es decir, no toda función es Riemann integrable. El siguiente teorema establece una condición suficiente para que ese límite exista.

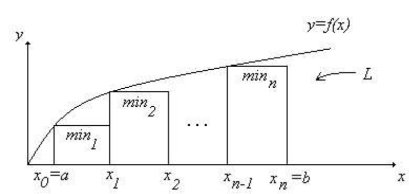
Teorema. Toda función continua es Riemann integrable. Esto es, si una función f es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces existe su integral definida sobre $[a, b]$.

Demostración:

La condición de que la función f sea continua en un intervalo cerrado te garantiza que f siempre alcanza sus valores mínimo y máximo en ese intervalo. De esta manera, la función alcanzará un valor máximo, max$_k$, y un valor mínimo, min$_k$, en cada subintervalo k. La suma de los productos $\min_k \triangle x_k$ asociados con los valores mínimos es el número

$$L = \text{min}_1 \triangle x_1 + \text{min}_2 \triangle x_2 + \ldots + \text{min}_n \triangle x_n,$$

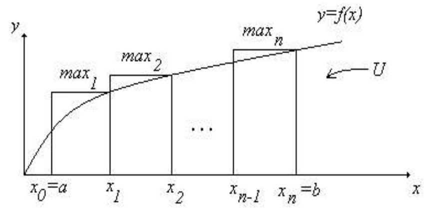
conocido como la *suma inferior* de f en la partición P, que representa el área de los rectángulos que están por debajo de la gráfica $y = f(x)$.



Asimismo, la suma de los productos max$_k \triangle x_k$ asociados con los valores máximos de la función es el número

$$U = \text{max}_1 \triangle x_1 + \text{max}_2 \triangle x_2 + \ldots + \text{max}_n \triangle x_n,$$

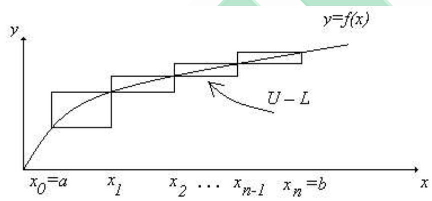
conocido como la *suma superior* de f en la partición P, que representa el área de los rectángulos que están por encima de la gráfica $y = f(x)$.



De esta manera, los números L y U constituyen una cota para la suma de Riemann, es decir,

$$L \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \leq U.$$

La diferencia $U - L$ es por tanto un número no negativo, que representa el área de los bloquecitos mostrados en la siguiente figura.



A medida que $\|P\| \to 0$ los bloquecitos se vuelven más numerosos, estrechos y chaparritos, de modo que la diferencia $U - L$ se hace cada vez más pequeña, es decir,

$$\lim_{||P|| \to 0} (U - L) = 0,$$

o bien,

$$\lim_{||P|| \to 0} L = \lim_{||P|| \to 0} U.$$

En ese límite, se satisface entonces

$$\lim_{||P|| \to 0} L = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \lim_{||P|| \to 0} U,$$

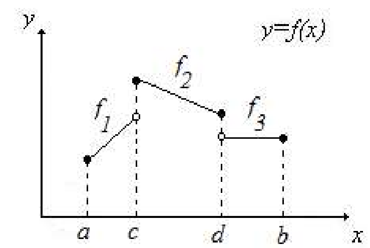
de modo que cuando$\|P\| \to 0$ el valor de la suma de Riemann $\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ coincide tanto con el de la suma inferior L como con el de la suma superior U, independientemente de la partición utilizada y de la selección de los valores representativos c_k. La función es, por tanto, Riemann integrable.

La continuidad de f en $[a, b]$ no es una condición necesaria para que f sea Riemann integrable. El siguiente teorema establece una versión menos restrictiva que la anterior, en relación con la existencia de la integral definida de f sobre $[a, b]$.

Teorema. Si f es acotada en un intervalo $[a, b]$ y si f es continua en $[a, b]$, excepto quizá en un número finito de puntos, entonces f es integrable en $[a, b]$.

De acuerdo con el teorema anterior, un tipo de funciones discontinuas que sí son integrables son las funciones *continuas por tramos*. En este caso, la integral definida sobre el intervalo $[a, b]$ puede escribirse como la suma de integrales sobre los subintervalos de $[a, b]$ en los que la función es continua. Así, por ejemplo, si

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & a \leq x < c \\ f_2(x), & c \leq x \leq d \\ f_3(x), & d < x \leq b \end{cases}$$



con $f_2(c) \neq \lim\limits_{x \to c} f_1(x)$ y $f_2(d) \neq \lim\limits_{x \to d} f_3(x)$, entonces

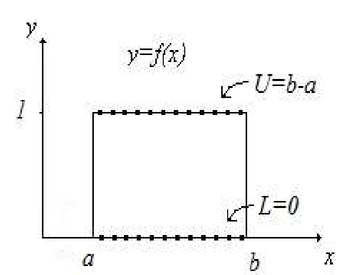
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^d f_2(x)dx + \int_d^b f_3(x)dx.$$

Un tipo especial de funcines discontinuas que no son Riemann integrable son las funciones que no son continuas en ningún subintervalo de $[a, b]$. Un lindo ejemplo al respecto está dado por la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

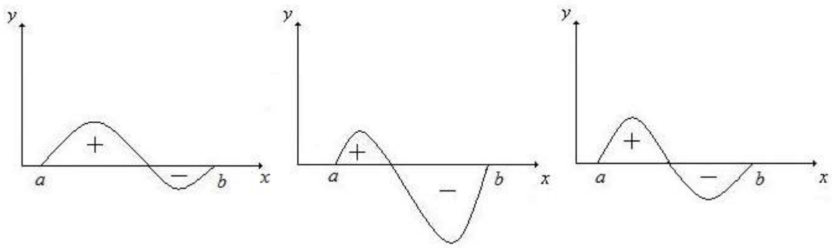
Esta función no es integrable en ningún intervalo $[a, b]$, ya que

$$U = \sum_{k=1}^{n} \max\nolimits_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = b - a,$$
$$L = \sum_{k=1}^{n} \min\nolimits_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0,$$
$$\therefore \lim_{||P|| \to 0} U \neq \lim_{||P|| \to 0} L.$$

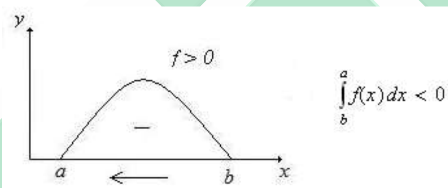


La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ representa un área <u>sólo</u> cuando $f \geq 0$. Cuando f puede tomar valores negativos a lo largo del intervalo $[a, b]$ la integral definida pierde su significado geométrico de área, convirtiéndose en una suma de contribuciones, que puede tomar un valor positivo, negativo o inclusive cero, dependiendo del signo de los productos $f(c_k)\Delta x_k$.

$\int_a^b f(x)\,dx > 0$ $\qquad\int_a^b f(x)\,dx < 0$ $\qquad\int_a^b f(x)\,dx = 0$



También observa que si el intervalo de integración $[a, b]$ se recorre en sentido inverso, es decir de b hacia a, con $b > a$, entonces $\Delta x_k \leq 0$ y el signo de la integral se invierte. Así, por ejemplo, para $f \geq 0$ se tiene $\int_b^a f(x)\,dx < 0$.



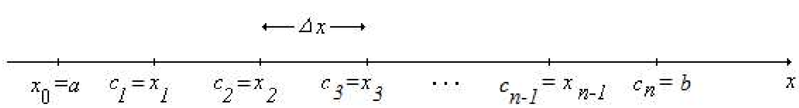
Los siguientes ejemplos ilustran cómo utilizar las sumas de Riemann para determinar el área bajo una función no negativa $f \geq 0$ en un intervalo dado $[a, b]$. Por simplicidad, en todos los casos supondremos que los subintervalos están igualmente espaciados, es decir,

$$\Delta x_k \equiv \Delta x = \frac{b-a}{n},$$

y tomaremos como c_k al punto final del correspondiente subintervalo k, es decir,

$$c_k = a + k\,\Delta x,$$

como se ilustra en la siguiente figura.

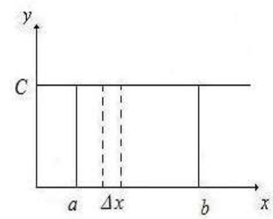


Ejemplos:

1. Encuentra la integral definida de la función constante $f(x) = C$ en el intervalo $[a, b]$, con $C > 0$, $b > a$.

   Aquí $f(c_k) = C$, y nota que Δx no depende de k. De esta manera,

$$\begin{aligned}\int_a^b C\,dx &= \lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} C\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} C\,(\Delta x) \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \lim_{n\to\infty} C\,(\Delta x)\, n \\ &= \lim_{n\to\infty} C \left(\frac{b-a}{n}\right) n \\ &= \lim_{n\to\infty} C\,(b-a) = C(b-a).\end{aligned}$$

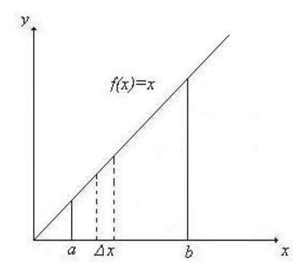


   Como $C > 0$, nota que $C(b-a)$ representa el área del rectángulo entre $f(x) = C$ y el eje x, en el intervalo $[a, b]$.

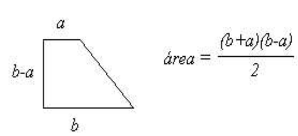
2. Encuentra la integral definida de $f(x) = x$ en $[a, b]$, con $b > a > 0$.

   Aquí $f(c_k) = c_k$. De esta manera,

$$\begin{aligned}\int_a^b x\,dx &= \lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a + k\Delta x)\ \Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ a\,(\Delta x) \sum_{k=1}^{n} 1 + (\Delta x)^2 \sum_{k=1}^{n} k \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ a\,(\Delta x)\, n + (\Delta x)^2 \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ a\left(\frac{b-a}{n}\right) n + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right) \right\} \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$



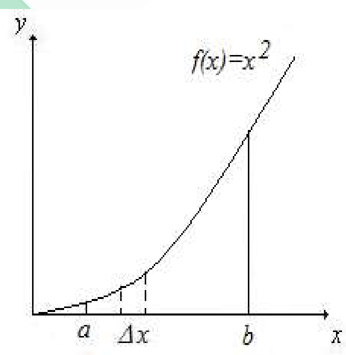
   Aquí $\dfrac{b^2}{2} - \dfrac{a^2}{2}$ representa el área del trapecio entre $f(x) = x$ y el eje x, en el intervalo $[a, b]$ dado.



3. Encuentra la integral definida de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[a, b]$, con $b > a > 0$.

   Aquí, $f(c_k) = (c_k)^2$. De esta manera,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b x^2\,dx &= \lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} (c_k)^2 \;\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a + k\Delta x)^2 \;\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ a^2 \Delta x \sum_{k=1}^{n} 1 + 2a(\Delta x)^2 \sum_{k=1}^{n} k + (\Delta x)^3 \sum_{k=1}^{n} k^2 \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ a^2\,(\Delta x)\,n + 2a(\Delta x)^2 \frac{n(n+1)}{2} + (\Delta x)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ a^2 \left(\frac{b-a}{n}\right) n + 2a \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{b-a}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ a^2(b-a) + a\,(b-a)^2 \left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{(b-a)^3}{6} \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{2n+1}{n}\right) \right\} \\
&= a^2(b-a) + a\,(b-a)^2 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^3}{6} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\
&= a^2(b-a) + a\,(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} \\
&= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.
\end{aligned}
$$



En el siguiente par de ejemplos hay que proceder al revés, es decir, te dan la suma de Riemann y te piden reconocer de qué integral se trata. Para ello, recuerda que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x, \qquad c_k = a + k\cdot\Delta x, \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Ejemplos:

1. Expresa $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)$ como una integral definida.

   En este ejemplo, la respuesta es bastante directa. Sea $c_k = \frac{k\pi}{n}$. Se tiene

$$c_k = \frac{k\pi}{n} \quad\Longrightarrow\quad f(c_k) = \operatorname{sen}(c_k).$$

   Como

$$c_k = \frac{k\pi}{n} = 0 + k\left(\frac{\pi}{n}\right) = a + k\Delta x,$$

   por lo tanto

$$\begin{aligned} a &= 0,\\ \Delta x &= \frac{\pi}{n} = \frac{b-a}{n},\\ b &= \pi + a = \pi. \end{aligned}$$

   Así,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right) = \int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx.$$

2. Expresa $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{2+\frac{4k}{n}}\left(\frac{4}{n}\right)$ como una integral definida.

   En este ejemplo hay dos respuestas, al menos, que son equivalentes entre sí. La idea es identificar c_k en la expresión $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\underbrace{\sqrt{2+\frac{4k}{n}}}_{f(c_k)}\underbrace{\left(\frac{4}{n}\right)}_{\Delta x}$.

   a. Sea $c_k = 2 + \frac{4k}{n}$. Se tiene

$$c_k = 2 + \frac{4k}{n} \quad\Longrightarrow\quad f(c_k) = \sqrt{c_k}.$$

   Como

$$c_k = 2 + \frac{4k}{n} = 2 + k\left(\frac{4}{n}\right) = a + k\Delta x,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} a &= 2, \\ \Delta x &= \frac{4}{n} = \frac{b-a}{n}, \\ b &= 4 + a = 4 + 2 = 6. \end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2 + \frac{4k}{n}} \left(\frac{4}{n}\right) = \int_2^6 \sqrt{x}\, dx.$$

b. Sea $c_k = \frac{4k}{n}$. Se tiene

$$c_k = \frac{4k}{n} \quad \Longrightarrow \quad f(c_k) = (2 + c_k)^2.$$

Como

$$c_k = \frac{4k}{n} = 0 + k\left(\frac{4}{n}\right) = a + k\Delta x,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} a &= 0, \\ \Delta x &= \frac{4}{n} = \frac{b-a}{n}, \\ b &= 4 + a = 4 + 0 = 4. \end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2 + \frac{4k}{n}} \left(\frac{4}{n}\right) = \int_0^4 \sqrt{2+x}\, dx.$$

1.2.3 Integral definida

De las sumas de Riemann de la sección anterior aprendimos que

$$\int_a^b C\, dx = C(b-a), \quad \int_a^b x\, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad \text{y} \quad \int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Así, por ejemplo, la integral definida de x^2 en el intervalo $[-1, 2]$ es

$$\int_{-1}^{2} x^2\, dx = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3.$$

En la sección 1.3 aprenderemos cómo calcular integrales definidas más generales, sin utilizar sumas de Riemann, a partir de su conexión con el concepto de antiderivada.

Nota que la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es un número (no una función), en donde x es una *variable muda* que puedes reemplazar por cualquier otra letra sin que cambie el resultado. Esto es,

$$\int_a^b f(x)\ dx \ = \ \int_a^b f(t)\ dt.$$

Así, por ejemplo, $\int_{-1}^2 x^2\ dx = \int_{-1}^2 t^2\ dt = \int_{-1}^2 y^2\ dy = 3$. Esto difiere del caso de la integral indefinida $\int f(x)dx$, que es una función de x (no un número), de modo que

$$\int f(x)dx \neq \int f(t)dt.$$

Propiedades de la integral definida

Sean f y g funciones Riemann integrables y sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces,

1. $\int_a^a f(x)\ dx = 0$.
2. $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$. Orden de integración
3. $\int_a^b k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int_a^b f(x)\ dx$. Múltiplo constante
4. $\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$. Suma
5. $\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx$. Aditividad
6. $\text{mín} f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \text{máx} f \cdot (b-a)$. Desig. Max-Min
7. $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \geq 0$. Dominación
   $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx$. Dominación

Ejemplos:

1. De la propiedad 4 se sigue que

$$\int_{-1}^2 \left(x^2+2\right)\ dx = \int_{-1}^2 x^2 dx + \int_{-1}^2 2\ dx = 3 + 6 = 9.$$

2. Si $\int_{-1}^5 f(x)\ dx = 3$ y $\int_{-1}^3 f(x)\ dx = 1$, de la propiedad 5 se tiene

$$\int_3^5 f(x)\ dx = \int_{-1}^5 f(x)\ dx - \int_{-1}^3 f(x)\ dx = 3 - 1 = 2.$$

3. Con la desigualdad 6 se puede demostrar que $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\ dx \neq 2$. Para ello, observa que el valor máximo de la función $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$ en el intervalo $[0,1]$ es $\text{máx} f = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ (cuando $x = 0$). De la desigualdad Max-Min se sigue

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\ dx \leq \sqrt{2} \cdot (1-0) = \sqrt{2},$$

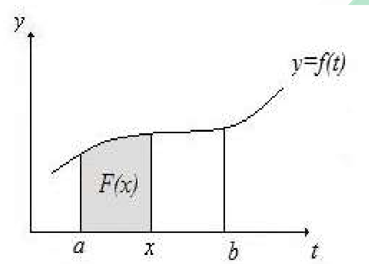
que es un número menor que 2. Concluimos que $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\ dx \neq 2$.

1.3 Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) establece la relación entre los procesos de integración y diferenciación. Para ello, se parte de una función continua $f(t)$ en $[a, b]$, a partir de la cual se define una segunda función $F(x)$ como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

para cada $x \in [a, b]$. La función $F(x)$ es la integral definida de $f(t)$ con límite superior variable, x.



Teorema Fundamental del Cálculo (parte 1)

Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

es derivable en cada punto $x \in (a, b)$ y su derivada está dada por

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x).$$

Demostración:

Sea f continua en $[a, b]$. Sean $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ y $h > 0$. Por lo tanto,

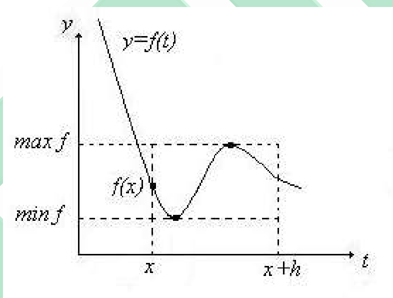
$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

Por la desigualdad Max-Min en el intervalo $[x, x+h]$ se tiene

$$
\begin{aligned}
(\min f)\, h &\leq \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leq (\max f)\, h \\
(\min f)\, h &\leq F(x+h) - F(x) \leq (\max f)\, h \\
\min f &\leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \max f \\
\lim_{h \to 0} \min f &\leq \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \lim_{h \to 0} \max f \\
f(x) &\leq \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x) \\
f(x) &\leq \frac{dF(x)}{dx} \leq f(x)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$



Ejemplos:

1. Encuentra $dF(x)/dx$, si $F(x) = \int_1^x t^2 dt$.
   En este caso particular, podemos encontrar $dF(x)/dx$ por dos métodos diferentes.
   i) El primer método no requiere utilizar el TFC, puesto que la simplicidad del integrando permite efectuar fácilmente la integral que define a $F(x)$:

$$F(x) = \int_1^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = x^2.$$

   ii) El segundo método consiste en utilizar directamente el TFC, sin efectuar previamente la integral, es decir,

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_1^x t^2 dt = x^2.$$

2. Encuentra $dF(x)/dx$, si $F(x) = \int\limits_{2}^{x} e^{-t^2} dt$.

   A diferencia del ejemplo 1, aquí es imposible determinar la integral $F(x)$, por lo que encontramos $dF(x)/dx$ directamente a partir del TFC, es decir,

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int\limits_{2}^{x} e^{-t^2} dt = e^{-x^2}.$$

3. Encuentra $dF(t)/dt$, si $F(t) = \int\limits_{2}^{t} e^{-x^2} dx$.

   Este ejemplo es análogo al anterior, salvo que aquí se han intercambiado las variables x y t. De este modo,

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int\limits_{2}^{t} e^{-x^2} dx = e^{-t^2}.$$

4. Encuentra $dF(t)/dt$, si $F(t) = \int\limits_{5}^{t} \frac{x^{3/2}e^{2t}}{\sqrt{x^2+17}} dx$.

   Aquí la variable independiente, t, aparece no sólo en el límite superior de la integral, sino en el integrando mismo. Se trata entonces de un producto de dos funciones de t, es decir,

$$F(t) = \int\limits_{5}^{t} \frac{x^{3/2}e^{2t}}{\sqrt{x^2+17}} dx = e^{2t} \cdot \int\limits_{5}^{t} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+17}} dx.$$

   Así, $dF(t)/dt$ se obtiene como la derivada de un producto, o sea,

$$\begin{aligned}
\frac{dF(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[e^{2t} \cdot \int\limits_{5}^{t} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+17}} dx\right] \\
&= e^{2t} \cdot \frac{d}{dt}\left[\int\limits_{5}^{t} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+17}} dx\right] + \frac{d}{dt}\left[e^{2t}\right] \cdot \int\limits_{5}^{t} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+17}} dx \\
&= e^{2t} \cdot \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}} + 2e^{2t} \cdot \int\limits_{5}^{t} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+17}} dx \\
&= \frac{t^{3/2}e^{2t}}{\sqrt{t^2+17}} + 2 \int\limits_{5}^{t} \frac{x^{3/2}e^{2t}}{\sqrt{x^2+17}} dx.
\end{aligned}$$

   Nota que este resultado puede expresarse de un modo más simple, notando que la integral en el segundo término es la propia función $F(t)$, es decir,

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{t^{3/2}e^{2t}}{\sqrt{t^2+17}} + 2F(t).$$

5. El precio $P(t)$ al tiempo t de una maquinaria que ha sido adquirida para su renta a lo largo de un período de 20 años está dado por

$$P(t) = \int_t^{20} v(s)e^{r(t-s)}ds,$$

en donde $0 \leq t \leq 20$, $v(s)$ es la renta al tiempo $t = s$ y r es la tasa de interés (constante). Determina cómo cambia el precio de la maquinaria a lo largo del tiempo.

El objetivo aquí es determinar $dP(t)/dt$. Para ello, primero invertimos el orden de integración,

$$P(t) = -\int_{20}^{t} v(s)e^{r(t-s)}ds,$$

para que la variable t aparezca en el límite superior de la integral, como establece el TFC. Luego notamos que P es un producto de funciones de t, dado por

$$P(t) = -e^{rt}\cdot\int_{20}^{t} v(s)e^{-rs}ds.$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
\frac{dP(t)}{dt} &= -\frac{d}{dt}\left[e^{rt}\cdot\int_{20}^{t} v(s)e^{-rs}ds\right] \\
&= -\left\{e^{rt}\cdot\frac{d}{dt}\left[\int_{20}^{t} v(s)e^{-rs}ds\right] + \frac{d}{dt}\left[e^{rt}\right]\cdot\int_{20}^{t} v(s)e^{-rs}ds\right\} \\
&= -\left\{e^{rt}\cdot\left[v(t)e^{-rt}\right] + re^{rt}\cdot\int_{20}^{t} v(s)e^{-rs}ds\right\} \\
&= -\left\{v(t) + r\int_{20}^{t} v(s)e^{r(t-s)}ds\right\} \\
&= -v(t) - r\int_{20}^{t} v(s)e^{r(t-s)}ds \\
&= -v(t) + r\int_{t}^{20} v(s)e^{r(t-s)}ds,
\end{aligned}$$

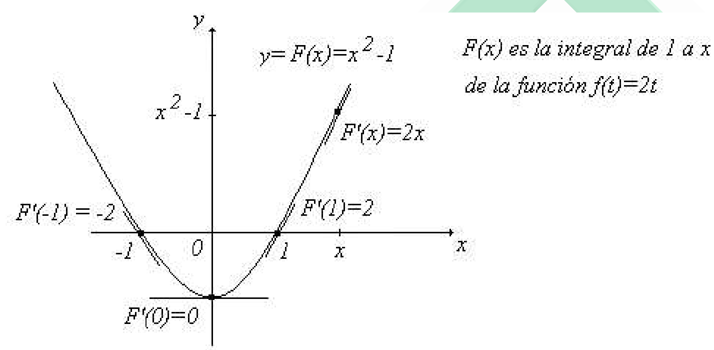
es decir

$$\frac{dP(t)}{dt} = -v(t) + rP(t).$$

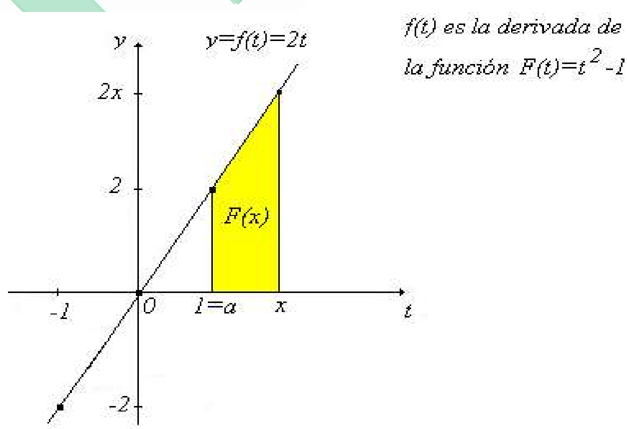
Una consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo es que toda función continua $f(x)$ posee una antiderivada, dada por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, y viceversa, cada función continua $f(x)$ es la derivada de otra función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, es decir, $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$. Así, los procesos de diferenciación y de integración son inversos el uno del otro.

Las siguientes figuras ilustran el significado geométrico del Teorema Fundamental del Cálculo, en donde se ha tomado $f(t) = 2t$ y $a = 1$. Nota que $F(a) = 0$ siempre.

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x 2t\,dt = x^2 - 1$$



$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x 2t\,dt\right) = 2x$$



Regla de la cadena en el Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f continua. Si $u(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\,dt = f(u(x))\cdot\frac{du(x)}{dx}.$$

Demostración:

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, de modo que $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$. Sea $u(x)$ una función diferenciable. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\,dt = \frac{dF(u(x))}{dx} = \frac{dF(u(x))}{du}\cdot\frac{du(x)}{dx} = f(u(x))\cdot\frac{du(x)}{dx},$$

en donde la segunda igualdad se obtuvo utilizando la regla de la cadena.

Ejemplo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{-1}^{senx}\sqrt{1+t^5}\,dt &= \sqrt{1+(senx)^5}\cdot\frac{dsenx}{dx}\\ &= \sqrt{1+(senx)^5}\cdot\cos x.\end{aligned}$$

La regla de la cadena puede generalizarse de acuerdo con el siguiente teorema, conocido como regla de Leibniz.

Regla de Leibniz

Sea f continua. Si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = f(u(x))\cdot\frac{du(x)}{dx} - f(v(x))\cdot\frac{dv(x)}{dx}.$$

Demostración:

Como f es continua, podemos partir la integral en algún punto $t = c$ del dominio de f, es decir,

$$\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = \int_{v(x)}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{u(x)} f(t)\,dt.$$

Reescribiendo esta expresión y utilizando la regla de la cadena anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\left(\int_{v(x)}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{u(x)} f(t)\,dt\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(-\int_{c}^{v(x)} f(t)\,dt + \int_{c}^{u(x)} f(t)\,dt\right)\\
&= -\frac{d}{dx}\int_{c}^{v(x)} f(t)\,dt + \frac{d}{dx}\int_{c}^{u(x)} f(t)\,dt\\
&= -f(v(x))\cdot\frac{dv(x)}{dx} + f(u(x))\cdot\frac{du(x)}{dx}.
\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{5x^3}^{2x^5} \cos\left(t^2\right)\,dt &= \cos\left((2x^5)\right)^2\cdot(10x^4) - \cos\left((5x^3)\right)^2\cdot(15x^2)\\
&= 10x^4\cos(4x^{10}) - 15x^2\cos\left(25x^6\right).
\end{aligned}$$

Por último, el Teorema Fundamental del Cálculo constituye una herramienta útil para encontrar la solución formal a problemas con condiciones iniciales, particularmente en el caso de funciones que no posean una antiderivada conocida, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Encuentra la solución al problema de condiciones iniciales

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^5}, \quad y(2) = 5.$$

Observa que no hay una antiderivada simple de la función $\sqrt{1+x^5}$. Tampoco puedes dejar indicada la solución como $y(x) = \int \sqrt{1+x^5}\;dx + C$, ya que no puedes determinar el valor de C a partir de la información $y(2) = 5$ (no hay dónde sustituir $x = 2$ en la integral indefinida). Una forma elegante de resolver el problema es la siguiente. Sabemos que

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^5} \quad\Longrightarrow\quad y(x) = \int_a^x \sqrt{1+t^5}\,dt,$$

con a una constante indeterminada. También sabemos que

$$y(2) = \int_a^2 \sqrt{1+t^5}\,dt,$$

de modo que

$$\begin{aligned} y(x)-y(2) &= \int_a^x \sqrt{1+t^5}\;dt - \int_a^2 \sqrt{1+t^5}\;dt \\ &= \int_a^x \sqrt{1+t^5}\;dt + \int_2^a \sqrt{1+t^5}\;dt \\ &= \int_2^x \sqrt{1+t^5}\;dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y(x) = \int_2^x \sqrt{1+t^5}\;dt + y(2).$$

Como $y(2)=5$, la solución del problema de condiciones iniciales es

$$y(x) = \int_2^x \sqrt{1+t^5}\;dt + 5.$$

En efecto, esta función $y(x)$ cumple las dos condiciones dadas, a saber

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\int_2^x \sqrt{1+t^5}\;dt + 5\right) = \sqrt{1+x^5}, \\ y(2) &= \int_2^2 \sqrt{1+t^5}\;dt + 5 = 0+5 = 5. \end{aligned}$$

Este tipo de problemas aparece a menudo en economía y en finanzas, y su importancia radica en que permite encontrar la solución, independientemente de que puedas o no determinar la integral obtenida.

Desde el punto de vista matemático, una de las aplicaciones más útiles del Teorema Fundamental del Cálculo es que proporciona una manera muy simple de calcular integrales definidas, como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema Fundamental del Cálculo (parte 2)

Si f es continua en $[a,b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\;dx = \left.F(x)\right|_a^b = F(b)-F(a).$$

Demostración:

De acuerdo con la parte 1 del Teorema Fundamental del Cálculo, sabemos que existe una antiderivada de f, dada por $G(x)=\int_a^x f(t)\;dt$. Cualquier otra antiderivada $F(x)$ de f debe cumplir $F(x)=G(x)+C$ en (a,b), para alguna constante C.

Así,

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= [G(b)+C]-[G(a)+C] \\ &= G(b)-G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(t)\,dt. \end{aligned}$$

La importancia de esta versión del Teorema Fundamental del Cálculo es que permite relacionar la integral definida de una función con su antiderivada. Es decir, si $f(x) = dF(x)/dx$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\frac{dF(x)}{dx}\right)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Así, por ejemplo, se tiene

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = \int_0^\pi \left[\frac{d(-\cos x)}{dx}\right]\,dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

Nota que la integral definida no lleva el término $+C$ que aparece en la indefinida. Si en lugar de $-\cos x$ hubieras considerado la antiderivada más general $-\cos x + C$ de todos modos se cancelaría C, ya que

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x + C]_0^\pi = (-\cos\pi + C) - (-\cos 0 + C) = 2.$$

1.4 Sustitución en integral definida

El método de sustitución en integrales definidas se utiliza de manera similar al de las integrales indefinidas, con la diferencia de que los límites de integración también deben modificarse de acuerdo con la sustitución propuesta, como se enuncia a continuación.

Método de sustitución en integral definida

Sea $u = g(x)$ diferenciable y sean f y F tales que $f(u) = \dfrac{dF(u)}{du}$. Entonces

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F[g(b)] - F[g(a)].$$

1.4 Sustitución en integral definida

Ejemplo:

Para calcular $\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$ proponemos la sustitución $u = 1 + x$, de modo que

$$u = 1 + x \quad \Rightarrow \quad du = dx.$$

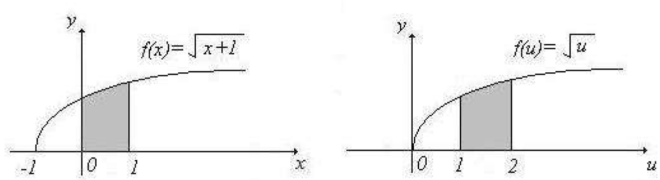
Correspondientemente, los nuevos límites de integración son

$$u(0) = 1 + 0 = 1, \qquad u(1) = 1 + 1 = 2.$$

De esta manera,

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx = \int_1^2 \sqrt{u}\, dx = \left[\frac{2u^{3/2}}{3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1\right).$$

Nota que los límites de integración fueron modificados, y que además en el resultado (un número) no aparece el término $+C$. La modificación en los límites de integración se debe a que la sustitución $u = x + 1$ representa un corrimiento horizontal de la gráfica de la función, como se observa en las siguientes figuras.



Ejemplos:

1. Calcula $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x + 1)^2}$.

   Sea $u = \ln x + 1$, de modo que

   $$u = \ln x + 1 \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

   y los nuevos límites de integración son

   $$u(1) = \underbrace{\ln 1}_{0} + 1 = 1, \qquad u(e) = \underbrace{\ln e}_{1} + 1 = 2.$$

   De esta manera,

   $$\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x + 1)^2} = \int_1^e \frac{dx/x}{(\ln x + 1)^2} = \int_1^2 \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

2. Calcula $\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$.

   Sea $u = 1 + x$, de modo que

$$x = u - 1 \quad \Rightarrow \quad dx = du$$

   y los nuevos límites de integración son

$$u\,(0) = 1 + 0 = 1, \qquad u\,(3) = 1 + 3 = 4.$$

   De esta manera,

$$\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \int\limits_1^4 \frac{u-1}{\sqrt{u}}dx = \int\limits_1^4 \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right) du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2} - 2\sqrt{u}\right]_1^4 = \frac{8}{3}.$$

3. Desde un punto de vista formal, la función logaritmo natural $\ln x$ se define como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt,$$

   para todo $x > 0$. Demuestra las siguientes propiedades de $\ln x$, para todos $a, b > 0$: i) $\ln 1 = 0$, ii) $\ln (ab) = \ln a + \ln b$, iii) $\ln (a/b) = \ln a - \ln b$, iv) $\ln a^r = r \ln a$.

   i) Por definición,

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0.$$

   ii) Se tiene

$$\ln (ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t}dt.$$

   Para la segunda integral proponemos la sustitución $u = \frac{t}{a}$, de modo que

$$u = \frac{t}{a} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{a}dt$$

   y los nuevos límites de integración son

$$u\,(a) = 1, \qquad u\,(ab) = b.$$

   De este modo,

$$\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_a^{ab} \frac{a}{t}\left(\frac{1}{a}dt\right) = \int_1^b \frac{1}{u}du.$$

   Por lo tanto,

$$\ln (ab) = \int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_1^b \frac{1}{u}du = \ln a + \ln b.$$

iii) Por el inciso anterior,

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right),$$

con

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \int_1^{1/b} \frac{1}{t}dt.$$

Proponemos la sustitución $u = \frac{1}{t}$, de modo que

$$u = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{1}{t^2}dt$$

y los nuevos límites de integración son

$$u(1) = 1, \qquad u(1/b) = b.$$

De esta manera,

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \int_1^{1/b} \frac{1}{t}dt = -\int_1^{1/b} t\left(-\frac{1}{t^2}dt\right) = -\int_1^{b} \frac{1}{u}du = -\ln b.$$

Por lo tanto,

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

iv) Sabemos que

$$\ln a^r = \int_1^{a^r} \frac{1}{t}dt.$$

Proponemos la sustitución $u = t^{1/r}$, de modo que

$$u = t^{1/r} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{r}t^{\frac{1}{r}-1}dt$$

y los nuevos límites de integración son

$$u(1) = 1, \qquad u(a^r) = a.$$

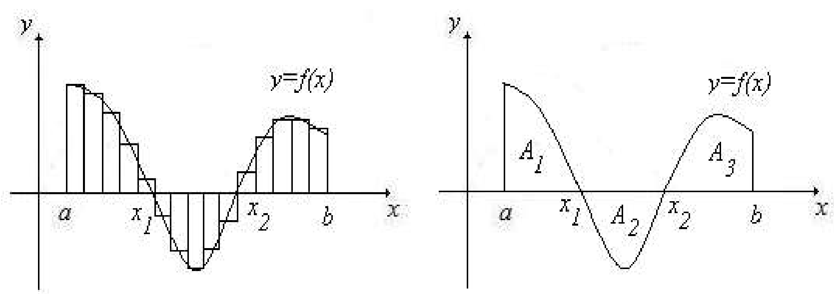
De esta manera,

$$\ln a^r = r\int_1^{a^r} \frac{1}{t^{1/r}}\left(\frac{1}{r}t^{\frac{1}{r}-1}dt\right) = r\int_1^{a} \frac{1}{u}du = r\ln a.$$

1.5 Aplicaciones de la integral definida

1.5.1 Área bajo una curva. Área entre curvas

Como ya mencionamos, si una función integrable f toma valores tanto positivos como negativos en un intervalo $[a, b]$, entonces las sumas de Riemann para f en $[a, b]$ toman en cuenta las contribuciones de los rectángulos que están sobre el eje x así como de los rectángulos que están por debajo de él. En consecuencia, la integral definida correspondiente es un número menor que el área total entre la curva $y = f(x)$ y el eje x.



Por ejemplo, para el caso mostrado en las figuras anteriores la integral definida de f en $[a, b]$ está dada por

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx \\ &= A_1 - A_2 + A_3\,,\end{aligned}$$

en donde

$$A_1 = \int_a^{x_1} f(x)\,dx > 0, \quad A_2 = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx > 0 \quad \text{y} \quad A_3 = \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx > 0$$

representan las áreas correspondientes a cada región. Así, la integral definida puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo del valor de $A_1 - A_2 + A_3$.

Por otra parte, si lo que interesa determinar no es la integral definida de f a lo largo de $[a, b]$ sino el <u>área</u> A de la región entre la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$, el cálculo correspondiente sería

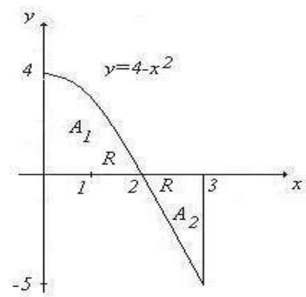
$$A = \int_a^{x_1} f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nota este signo}}}{-} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx = A_1 + A_2 + A_3.$$

Ejemplo:

Calcula el área A de la región R entre la curva $y = 4 - x^2$ y el eje x, en el intervalo $0 \leq x \leq 3$.

Para plantear la integral correspondiente debemos determinar los subintervalos dentro del intervalo $[0, 3]$ en donde f es positiva o es negativa. Estos pueden obtenerse graficando la función f, como se muestra en la figura. Observamos que $f > 0$ en $0 \leq x < 2$ y $f < 0$ en $2 < x \leq 3$, de modo que

$$A_1 = \int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \frac{16}{3}$$
$$A_2 = -\int_2^3 (4 - x^2)\, dx = -\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{3}$$



$$\therefore \quad A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}.$$

Una manera alternativa de plantear este problema, que resulta más elegante y concisa, involucra el concepto de *valor absoluto*. En efecto, tomando en cuenta que

$$|4 - x^2| = \begin{cases} 4 - x^2, & -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4, & x \leq -2 \text{ o } x \geq 2, \end{cases}$$

se tiene

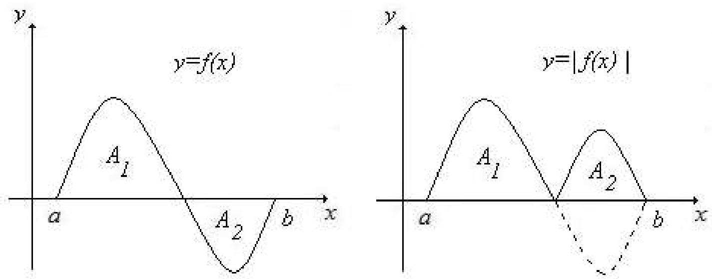
$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_0^2 (4 - x^2)\, dx - \int_2^3 (4 - x^2)\, dx \\ &= \int_0^2 (4 - x^2)\, dx + \int_2^3 (x^2 - 4)\, dx \\ &= \int_0^3 |4 - x^2|\, dx. \end{aligned}$$

Definición. Sea f una función integrable en $[a, b]$. El *área* A *entre la curva* $y = f(x)$ *y el eje* x en el intervalo $[a, b]$ es el número no negativo

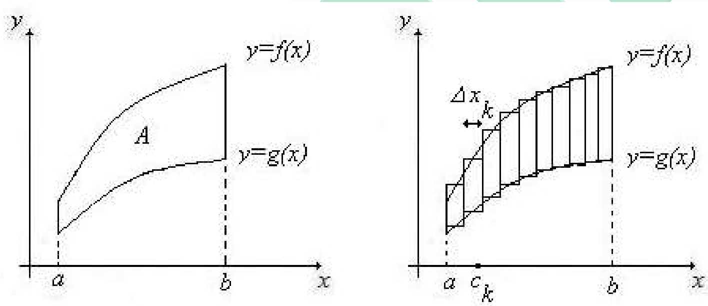
$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Nota que $A = \int_a^b |f(x)|\, dx \neq \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$ (¿es esto claro para ti?).

Geométricamente, la idea es convertir el integrando original, $f(x)$, en una función no negativa, $|f(x)|$, para que la integral definida de esta última represente efectivamente un área. El resultado así obtenido es completamente equivalente a partir "a mano" la integral original para asignar los signos correspondientes.



El objetivo ahora es determinar el área A de la región comprendida entre las gráficas de dos funciones integrables, f y g, en un intervalo dado $[a, b]$, donde $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.



En este caso, es posible demostrar (ver Thomas-Finney) que el área de la región entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es el límite de una suma de Riemann,

$$A = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)] \ \Delta x_k,$$

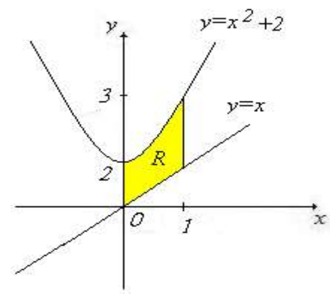
donde $f(c_k) - g(c_k)$ es la altura del k-ésimo rectángulo encerrado por las dos curvas. En este límite, la suma se convierte en la siguiente integral

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] \ dx.$$

Ejemplo:

Calculemos el área A de la región R entre las gráficas de $y = x^2 + 2$ y $y = x$ en el intervalo $[0, 1]$. Sean $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = x$. Para verificar que $f - g \geq 0$ en $[0, 1]$ notamos primero que la función $f(x) - g(x) = x^2 + 2 - x$ no tiene raíces en los reales, de modo que nunca cambia de signo. Además, como sabemos que $f(0) - g(0) = 2 > 0$, por tanto la resta es siempre positiva. Así, $f(x) > g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [(x^2+2) - x]\ dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

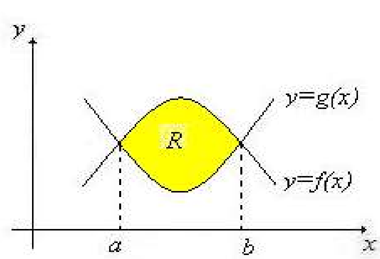


En general, si no se sabe *a priori* cuál de las funciones f o g es la mayor en el intervalo $[a, b]$, el área A de la región entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en ese intervalo se expresa simplemente en términos de la función valor absoluto, como establece la siguiente definición.

Definición. Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$. El *área A de la región R entre las curvas* $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es el número no negativo

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx.$$

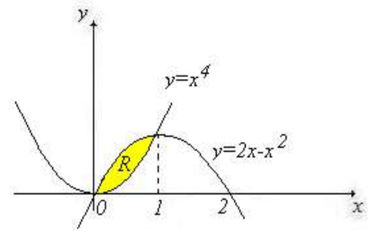
La integral definida también puede utilizarse para determinar el área A de la región finita R comprendida entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ que se intersecan en dos puntos con abscisas $x = a$ y $x = b$, tomando precisamente estos puntos como los límites de integración.



Ejemplo:

Calculemos el área A de la región finita R comprendida entre las curvas $y = x^4$ y $y = 2x - x^2$. Como se muestra en la figura, las curvas se intersecan en dos puntos. Las abscisas de esos puntos se obtienen al igualar las dos ecuaciones, es decir,

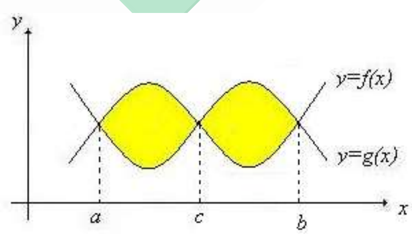
$$\begin{gathered} x^4 = 2x - x^2 \\ \therefore x^4 + x^2 - 2x = 0 \\ \therefore x(x-1)(x^2+x+2) = 0 \\ \therefore x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1. \end{gathered}$$



Después se determina cuál de estas dos funciones toma valores mayores en el intervalo $0 < x < 1$. Por ejemplo, en $x = 1/2$ se tiene $(1/2)^4 < 2(1/2) - (1/2)^2$, de modo que escogemos $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x^4$. Así, el área A entre estas dos curvas está dada por

$$A = \int_0^1 \left[\left(2x - x^2\right) - x^4 \right] \, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{7}{15}.$$

Cuando las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ se cruzan en más de dos puntos dentro del intervalo $[a, b]$, es claro que $f \geq g$ en algunos subintervalos y $g \geq f$ en otros. En ese caso, el área total A será la suma de las áreas en cada subintervalo, como lo muestra la figura.

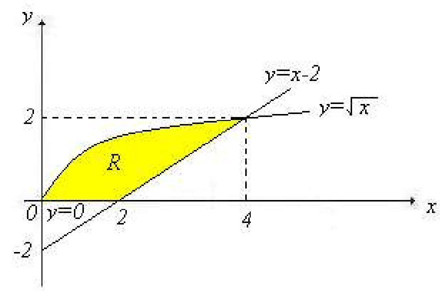


$$A = \int_a^c \left[f(x) - g(x) \right] \, dx + \int_c^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nota el cambio de orden en la resta}}}{\left[g(x) - f(x) \right]} \, dx$$

El siguiente ejemplo ilustra cómo encontrar el área de una región limitada por las gráficas de más de dos funciones.

Ejemplo:

Calculemos el área A de la región R en el primer cuadrante que está limitada por arriba por $y = \sqrt{x}$, y por debajo, por el eje x y por la recta $y = x - 2$.



De la gráfica se observa que la función superior es simplemente $f(x) = \sqrt{x}$. Sin embargo, la función inferior $g(x)$ cambia dependiendo de los valores de x,es decir,

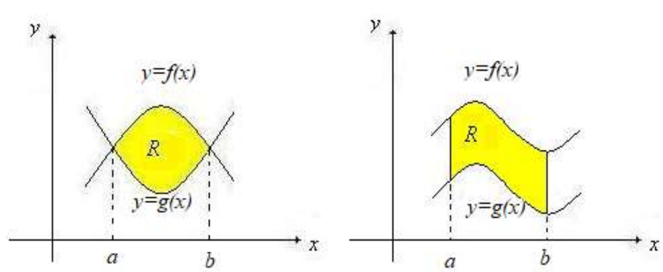
$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

De esta manera, el área A de la región correspondiente está dada por

$$A = \int_0^2 \sqrt{x}\, dx + \int_2^4 \left[\sqrt{x} - (x - 2)\right]\, dx = \frac{10}{3}.$$

En los ejemplos anteriores hemos supuesto que la región R de la que deseamos calcular el área está limitada superior e inferiormente por funciones de x, a las que hemos denominado $f(x)$ y $g(x)$. En ese caso decimos que se trata de una *región y-simple* o verticalmente simple, definida por

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,| a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\right\}.$$

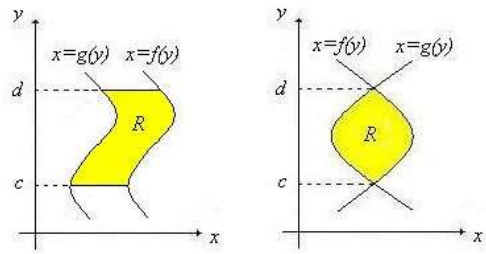


Región y-simple

Pero también puede suceder que la región R no necesariamente está definida entre como funciones de x, sino más bien como funciones de y, digamos $f(y)$ y $g(y)$.

En ese caso, decimos que se trata de una *región x-simple* u horizontalmente simple, definida por

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, | c \leq y \leq d, \; g(y) \leq x \leq f(y) \right\}.$$



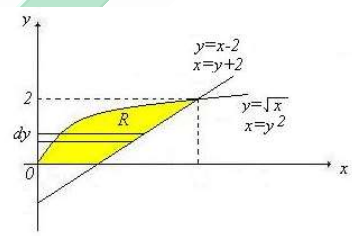
Región x-simple

En este último caso, el área A de la región R está dada por

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] \; dy.$$

En muchos casos, esta representación puede resultar más simple que la expresada en términos de integrales definidas con respecto a x. Así, por ejemplo, para el último ejercicio que resolvimos se tendría

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [(y+2) - y^2] \; dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$



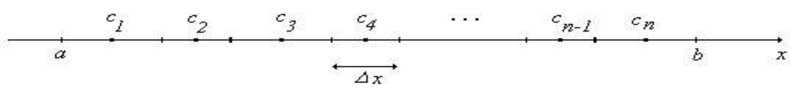
Volveremos a este tema en el capítulo 3.

1.5.2 Valor promedio. Teorema del Valor Medio para integrales

Para entender la definición del valor promedio de una función a lo largo de un intervalo, consideremos primero el caso de una función f de las variables discretas $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Si $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n)$ son los n valores que toma la función f, entonces su valor promedio $\overline{f}$ es simplemente la media aritmética de estos valores, a saber,

$$\overline{f} = \frac{f(c_1) + f(c_2) + \ldots + f(c_n)}{n}.$$

Para encontrar una expresión equivalente a ésta para el caso de una variable discreta x primero identificamos las variables $c_1, c_2, \ldots, c_n$ como los puntos representativos de una partición P del intervalo real (continuo) $[a, b]$ y definimos como $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ la longitud de cada uno de los n subintervalos de la partición.



En ese caso, el promedio $\overline{f}$ puede escribirse como

$$\overline{f} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) = \frac{\Delta x}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x.$$

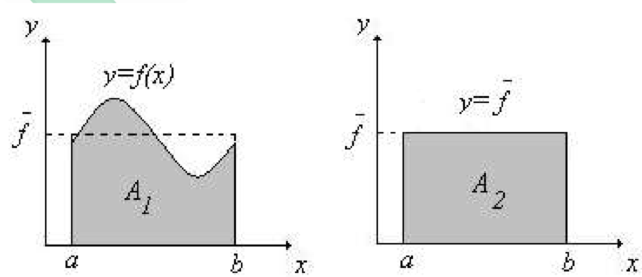
En el límite cuando el tamaño de la partición tiende a cero $(\Delta x \to 0,\ n \to \infty)$ la suma anterior se convierte en la integral definida

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Definición. Si f es integrable en $[a, b]$, su *valor promedio* en $[a, b]$ es el número

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Para entender su significado geométrico consideremos una función no negativa, $f \geq 0$, en un intervalo $[a, b]$. La idea del valor promedio es determinar qué altura $\overline{f}$ debe tener una función constante $y = \overline{f}$ en ese mismo intervalo de tal modo que el área $A_2 = \overline{f} \cdot (b-a)$ bajo esta función sea igual al área $A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$ bajo la curva $y = f(x)$.

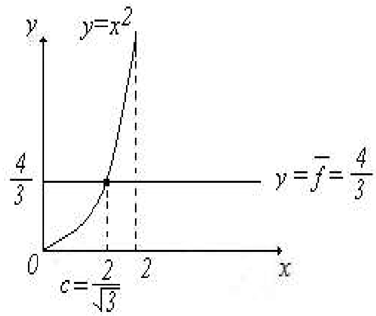


$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \\ (b-a)\overline{f} &= \textstyle\int_a^b f(x)\,dx \\ \overline{f} &= \frac{1}{b-a}\textstyle\int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

Ejemplo:

Calculemos el valor promedio $\overline{f}$ de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$. De acuerdo con la definición,

$$\begin{aligned}\overline{f} &= \frac{1}{2-0} \int_0^2 x^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$



De hecho, observamos que la función $f(x) = x^2$ alcanza su valor promedio $\overline{f} = \frac{4}{3}$ en el punto $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ dentro del intervalo $[0, 2]$, es decir,

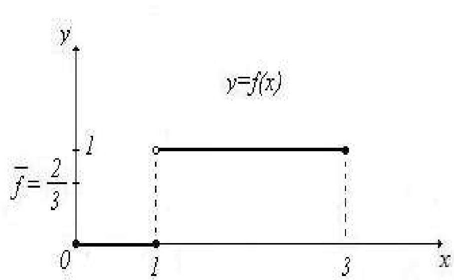
$$f(c) = f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3} = \overline{f}.$$

Nos preguntamos si esto es siempre posible, es decir, si para cualquier f existirá una $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \overline{f}$. Lamento decirte que no, como se muestra en siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Calculemos el promedio $\overline{f}$ en el intervalo $[0, 3]$ de la siguiente función tipo escalón:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 3. \end{cases}$$



Para esta función,

$$\begin{aligned}
\overline{f} &= \frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)\ dx \\
&= \frac{1}{3}\left\{\int_0^1 f(x)\ dx + \int_1^3 f(x)\ dx\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{\int_0^1 0\ dx + \int_1^3 1\ dx\right\} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Así, se tiene que $\overline{f} = \frac{2}{3}$, aunque no existe $c \in [0,3]$ tal que $f(c) = \frac{2}{3}$. ¿Ya te imaginaste cuál es la razón de esto? La función $f(x)$ no es continua en $[0,3]$. Eso es precisamente lo que establece el siguiente teorema.

Teorema del valor medio (TVM) para integrales definidas

Si f es continua en un intervalo $[a,b]$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \overline{f}$, es decir,

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx.$$

Demostración:

Sea

$$G(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

para todo $x \in [a,b]$. Por el teorema fundamental del cálculo, G es diferenciable en (a,b), con $G'(x) = f(x)$. Por el teorema del valor medio para derivadas, existe $c \in (a,b)$ tal que

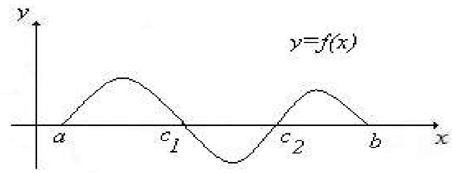
$$G'(c) = \frac{G(b)-G(a)}{b-a}.$$

En otras palabras, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\begin{aligned}
f(c) &= \frac{G(b)-G(a)}{b-a} \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f(t)\ dt - \int_a^a f(t)\ dt\right] \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Por ejemplo, con este teorema podemos demostrar que si f es continua en $[a, b]$ y $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ al menos una vez en $[a, b]$.

$$f(c_1) = f(c_2) = 0$$



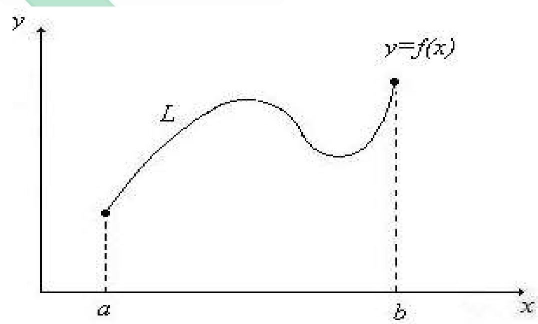
En efecto, como f es continua en $[a, b]$, por el TVM para integrales definidas existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\begin{aligned} f(c) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = 0$ al menos una vez en $[a, b]$.

1.5.3 Longitud de curvas

La integral definida también puede utilizarse para determinar la longitud L en el intervalo $[a, b]$ de una curva plana suave $y = f(x)$, es decir, una curva descrita por una función con primera derivada continua.

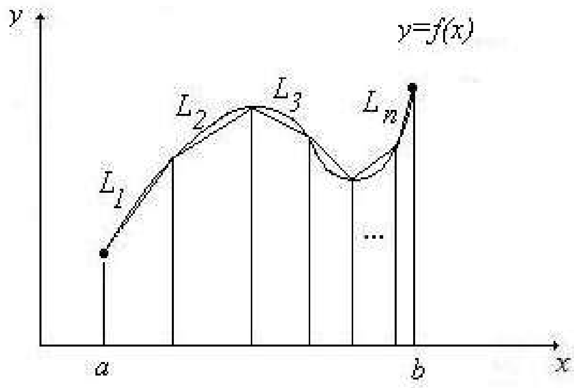


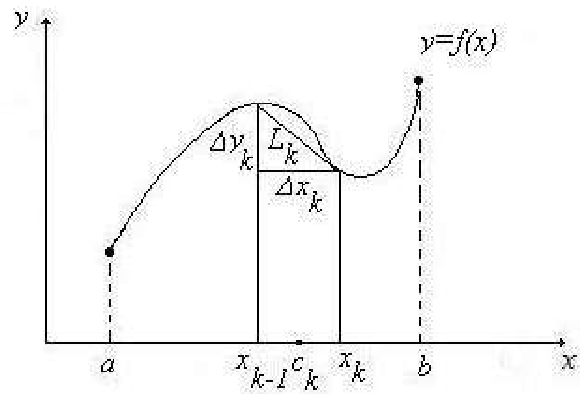
Para encontrar la longitud L de la curva, retomamos el concepto de suma de Riemann,

$$L = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} L_k,$$

donde L_k es la longitud del segmento de recta que une a los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$

y $(x_k, f(x_k))$, como se muestra en la figura.





La longitud L_k de cada segmento k es la hipotenusa de un triángulo de lados Δx_k y Δy_k. Por el teorema de Pitágoras,

$$L_k^2 = (\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2,$$

de modo que

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\ \Delta x_k. \end{aligned}$$

Así,

$$L = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\ \Delta x_k.$$

Por último, en el límite cuando $\|P\| \to 0$ se tiene $\Delta x_k \to 0$. En ese caso, es posible reemplazar $\dfrac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$ por la derivada $f'(c_k)$, y la suma por una integral definida, obteniendo

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx.$$

Definición. Si f es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), la *longitud* L de la curva $y = f(x)$ en este intervalo es la integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx.$$

Ejemplo:

Calculemos la longitud L de la curva $y = \frac{1}{3}x^{3/2}$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Como $f(x) = \frac{1}{3}x^{3/2}$, por lo tanto $f'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2}$. Así,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}x^{1/2}\right]^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x}{4}}\, dx \\ &= 4\int_1^{5/4} \sqrt{u}\, du \\ &= \frac{8}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^{5/4} \\ &= \frac{8}{3}\left[\frac{5^{3/2}}{8} - 1\right]. \end{aligned}$$

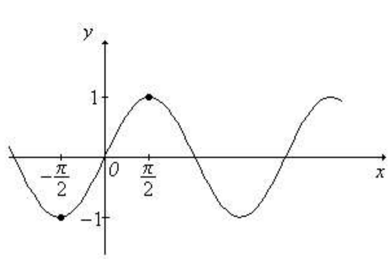
1.6 Integrales relacionadas con las funciones trigonométricas inversas

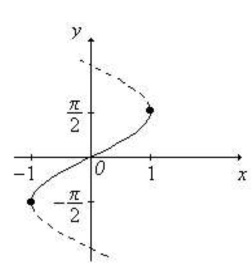
El objetivo de esta sección es deducir las fórmulas de integración para las funciones trigonométricas inversas, ya que serán utilizadas en la sección 1.7. Para ello, discutiremos brevemente su definición y algunas de sus propiedades importantes.

Las funciones trigonométricas son periódicas y, por tanto, no son inyectivas; en general, tampoco son sobreyectivas. Sin embargo, es posible definir un dominio e imagen (rango) limitados en donde éstas sean biyectivas, de tal modo que pueda asociárseles una función inversa. Al respecto, a continuación se muestra las gráficas de las funciones trigonométricas y sus correspondientes inversas.

$f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$
$f(x) = \operatorname{sen} x$

$f^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$
$f^{-1}(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$

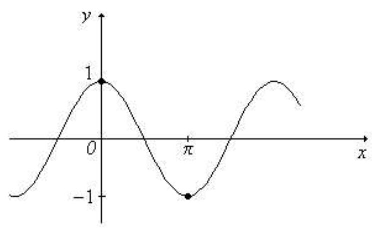


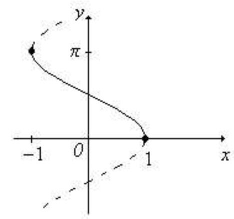


1.6 Integrales relacionadas con las funciones trigonométricas inversas

$$f : [0,\pi] \to [-1,1]$$
$$f(x) = \cos x$$

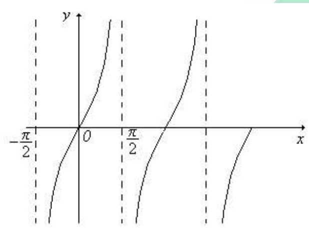
$$f^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$$

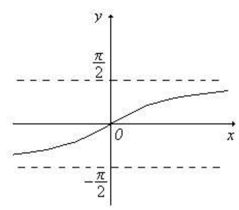




$$f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \tan x$$

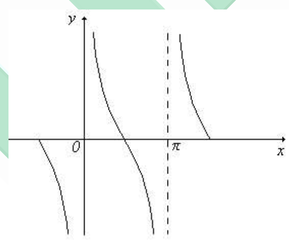
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$
$$f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$$

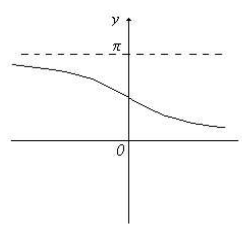




$$f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \cot x$$

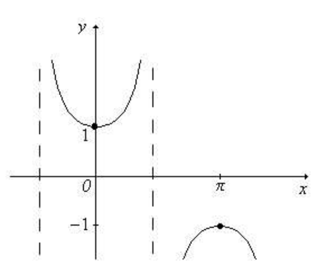
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$$
$$f^{-1}(x) = \cot^{-1} x$$

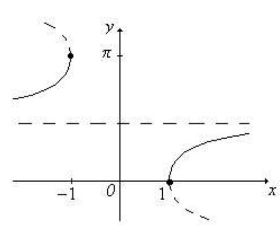




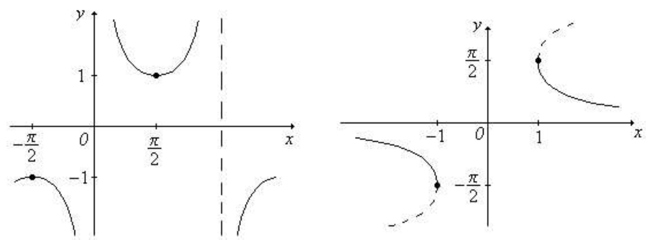
$$f : [0,\pi/2) \cup (\pi/2,\pi) \to (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$$
$$f(x) = \sec x$$

$$f^{-1} : (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \to [0,\pi/2) \cup (\pi/2,\pi)$$
$$f^{-1}(x) = \sec^{-1} x$$





$$f : [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2] \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \qquad f^{-1} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$$
$$f(x) = \csc x \qquad\qquad f^{-1}(x) = \csc^{-1} x$$



La siguiente tabla muestra algunos valores importantes de las funciones trigonométricas para ángulos entre 0 y π.

θ en grados	θ en radianes	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0	0	0	1	0	∞	1	∞
$30°$	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2
$45°$	$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60°$	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	2	$2/\sqrt{3}$
$90°$	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
$120°$	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	-2	$2/\sqrt{3}$
$135°$	$3\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$150°$	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-2/\sqrt{3}$	2
$180°$	π	0	-1	0	$\mp\infty$	-1	$\pm\infty$

Usando esa tabla se pueden calcular los valores de las funciones trigonométricas inversas (ángulos), como se muestra en los siguientes ejemplos:

a) $\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

b) $\cot^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

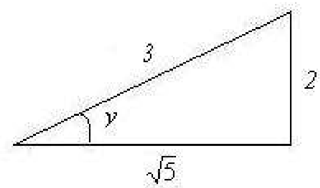
A partir de su definición como funciones inversas, puedes realizar distintas manipulaciones algebraicas con las funciones trigonométricas inversas, como se muestra a continuación.

Ejemplos:

1. Sea $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$. Encuentra: a) $\cos y$, b) $\tan y$.

$$\text{Como } y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$\therefore \operatorname{sen} y = \frac{2}{3}$$

De acuerdo con la figura,

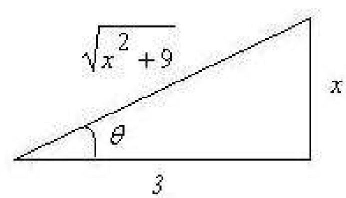


$$\text{a) } \cos y = \frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$\text{b) } \tan y = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

2. Demuestra que $\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

$$\text{Sea } \theta = \tan^{-1}\frac{x}{3}$$
$$\therefore \tan\theta = \frac{x}{3}$$

De acuerdo con la figura,

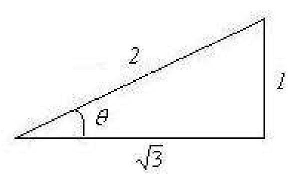


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$
$$\therefore \operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}.$$

3. Calcula $\csc^{-1}(2)$. (¿Podrías obtener la respuesta con una calculadora de bolsillo?).

De acuerdo con la figura,

$$\csc^{-1}(2) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = 30°.$$



Debes tener mucho cuidado de no inventar propiedades en relación con las funciones trigonométricas inversas. Por ejemplo, si bien en el caso de las funciones trigonométricas simples (no inversas) se cumple una propiedad tal como

$$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)},$$

no existe una propiedad equivalente para las trigonométricas inversas, es decir,

$$\csc^{-1}(x) \neq \frac{1}{\operatorname{sen}^{-1}(x)},$$

como se observa claramente en el problema 3 anterior. También nota que las funciones trigonométricas y las trigonométricas inversas no son recíprocas entre sí, es decir,

$$\operatorname{sen}^{-1} x \neq \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

No olvides que $\operatorname{sen}^{-1} x$ es un ángulo, mientras que $\operatorname{sen} x$ es un número.

Tomando en cuenta que las funciones trigonométricas inversas representan ángulos, y en vista de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es π, por lo tanto se cumplen propiedades tales como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x &= \frac{\pi}{2} \\ \tan^{-1} x + \cot^{-1} x &= \frac{\pi}{2} \\ \sec^{-1} x + \csc^{-1} x &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Asimismo, tomando en cuenta que $\operatorname{sen}^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ y $\csc^{-1} x$ son funciones impares (ver gráficas correspondientes), es decir que cumplen la condición $f(-x) = -f(x)$, se tiene

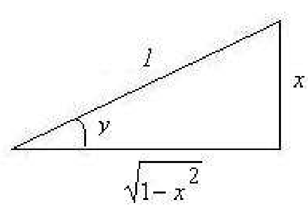
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^{-1}(-x) &= -\operatorname{sen}^{-1} x \\ \tan^{-1}(-x) &= -\tan^{-1} x \\ \csc^{-1}(-x) &= -\csc^{-1} x. \end{aligned}$$

Si deseas conocer algunas otras propiedades adicionales, te recomiendo consultar alguno de los libros de texto (por ejemplo, el Thomas-Finney).

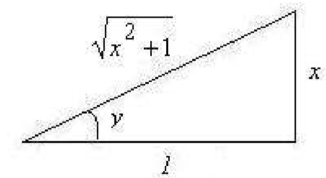
Derivada de las funciones trigonométricas inversas

Para obtener las fórmulas de derivación para las funciones trigonométricas inversas utilizamos diferenciación implícita, auxiliándonos gráficamente con triángulos, como se muestra a continuación.

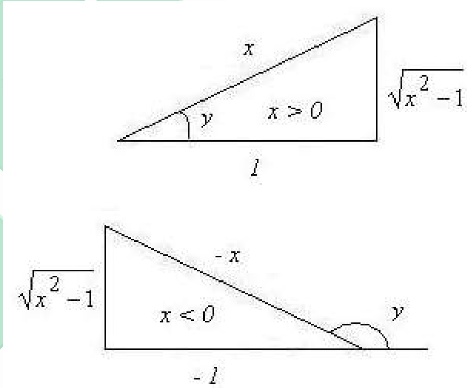
$$\begin{aligned} y &= \operatorname{sen}^{-1} x \\ \operatorname{sen} y &= x \\ \cos y \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y} \\ \therefore \frac{d\operatorname{sen}^{-1} x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
y &= \tan^{-1} x \\
\tan y &= x \\
\sec^2 y \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} \\
\therefore \frac{d \tan^{-1} x}{dx} &= \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
y &= \sec^{-1} x \\
\sec y &= x \\
\sec y \tan y \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec y \tan y} \\
\therefore \frac{d \sec^{-1} x}{dx} &= \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1.
\end{aligned}
$$



En resumen, se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{sen}^{-1} x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
\frac{d \tan^{-1} x}{dx} &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \\
\frac{d \sec^{-1} x}{dx} &= \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1.
\end{aligned}
$$

Como ejercicio de práctica te recomiendo demostrar las tres fórmulas restantes, a saber,

$$
\begin{aligned}
\frac{d \cos^{-1} x}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x| < 1 \\
\frac{d \cot^{-1} x}{dx} &= -\frac{1}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R} \\
\frac{d \csc^{-1} x}{dx} &= -\frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}}, \ |x| > 1.
\end{aligned}
$$

Los resultados anteriores se generalizan de la siguiente manera.

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

Si $u = f(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d\,\mathrm{sen}^{-1} u}{dx} &= \frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}},\ |u|<1, & \frac{d\cos^{-1} u}{dx} &= -\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}},\ |u|<1\\
\frac{d\tan^{-1} u}{dx} &= \frac{du/dx}{1+u^2},\ u\in\mathbb{R}, & \frac{d\cot^{-1} u}{dx} &= -\frac{du/dx}{1+u^2},\ u\in\mathbb{R}\\
\frac{d\sec^{-1} u}{dx} &= \frac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}},\ |u|>1, & \frac{d\csc^{-1} u}{dx} &= -\frac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}},\ |u|>1
\end{aligned}$$

Ejemplos:

1. $\dfrac{d\,\mathrm{sen}^{-1}(x^3)}{dx} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$, si $|x^3| < 1$, es decir, si $-1 < x < 1$.
2. $\dfrac{d\cos^{-1}(\ln x)}{dx} = -\dfrac{(1/x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$, $|\ln x| < 1$, es decir, si $e^{-1} < x < e$.
3. $\dfrac{d\tan^{-1}(\cos x)}{dx} = \dfrac{-\mathrm{sen}\, x}{1+(\cos x)^2} = -\dfrac{\mathrm{sen}\, x}{1+\cos^2 x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
4. $\dfrac{d\sec^{-1}(e^x)}{dx} = \dfrac{e^x}{|e^x|\sqrt{(e^x)^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$, si $e^{2x} > 1$, es decir, si $x > 0$.
5. $\dfrac{d\csc^{-1}(-2x^5)}{dx} = -\dfrac{-10x^4}{|-2x^5|\sqrt{(-2x^5)^2-1}} = \dfrac{5}{|x|\sqrt{4x^{10}-1}}$, si $|-2x^5| > 1$, es decir, si $x < -2^{-1/5}$ o $x > 2^{-1/5}$.

De las fórmulas de derivación anteriores se deducen las siguientes fórmulas de integración.

Integrales que conducen a las funciones trigonométricas inversas

Si $u = f(x)$ es una función diferenciable y $a > 0$ es una constante, entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \quad |u| < a \\ \int \frac{du}{u^2+a^2} &= \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \quad u \in \mathbb{R} \\ \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} &= \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C, \quad |u| > a.\end{aligned}$$

Ejemplos:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + C$, para $|x| < 4$, o sea, $-4 < x < 4$.

2. $\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\operatorname{sen}^{-1} x]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}/2} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

3. $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{3}{2}\operatorname{sen}^{-1}(u) + C$
$= \frac{3}{2}\operatorname{sen}^{-1}(x^2) + C$, para $|x^2| < 1$, o sea, $-1 < x < 1$.

4. $\int \frac{dx}{3+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{3+(2x)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{3+u^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + C$
$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$, para $x \in \mathbb{R}$.

5. $\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = [\sec^{-1}|x|]_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \sec^{-1}(\sqrt{2}) - \sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$.

6. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+4} = \int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$
$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C$.

1.7 Técnicas de integración

Además del método de integración por sustitución de las secciones 1.1.2 y 1.4 existen otros métodos alternativos de gran utilidad. A continuación describiremos algunos de los más importantes.

1.7.1 Procedimientos algebraicos

Los procedimientos algebraicos suelen utilizarse en combinación con cualquiera de los otros métodos. La idea es poder reescribir el integrando de tal forma que éste presente una forma más manejable para su integración. Entre los diversos procedimientos a seguir, se destacan los siguientes.

i) Reducción de una fracción impropia

Por ejemplo, considera $\int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2}\, dx$. Como el integrando es una fracción impropia (grado del numerador $\geq$ grado del denominador), éste puede separarse en un polinomio más una fracción propia, mediante el cociente de los polinomios:

$$\begin{array}{r|l} & \quad x - 3 \\ \hline 3x + 2 & 3x^2 - 7x \\ & \underline{-3x^2 - 2x} \\ & \qquad -9x \\ & \qquad \underline{9x + 6} \\ & \qquad\qquad 6 \end{array}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2}\, dx &= \int \left(x - 3 + \frac{6}{3x + 2} \right) dx \\ &= \int x\, dx - \int 3\, dx + \frac{6}{3} \int \frac{3\, dx}{3x + 2} \\ &= \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \ln|3x + 2| + C. \end{aligned}$$

ii) Separar fracciones

Por ejemplo, considera $\int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$. Aquí el numerador puede separarse en dos términos, quedando

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx &= 3 \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx + 2 \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \\ &= -3 \int \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\, dx + 2 \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \\ &= -3\sqrt{1 - x^2} + 2\mathrm{sen}^{-1} x + C. \end{aligned}$$

iii) Completar cuadrados

Por ejemplo, considera $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$. Completando cuadrados en el denominador obtienes

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-4)^2}} \\ &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right)+C.\end{aligned}$$

iv) Desarrollar potencias

Por ejemplo, considera $\int \left(\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right)^2 dx$. Aquí no funcionaría una sustitución de la forma $u = \sqrt{x}+3/x$, ya que du no está en el integrando; esto es, la integral no es de la forma $\int u^2 du$. En este caso, basta con desarrollar el cuadrado, obteniendo

$$\begin{aligned}\int \left(\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right)^2 dx &= \int \left(x+\frac{6}{\sqrt{x}}+\frac{9}{x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2}+12\sqrt{x}-\frac{9}{x}+C.\end{aligned}$$

v) Sumar 0 o multiplicar por 1

Por ejemplo, considera $\int \frac{x}{x-1}\,dx$. Al numerador en el integrando puede sumársele 0, mediante el siguiente truco:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x-1}\,dx &= \int \frac{x-1+1}{x-1}\,dx \\ &= \int \frac{x-1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= \int dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= x+\ln|x-1|+C.\end{aligned}$$

Como un segundo ejemplo, considera $\int \sec x\ dx$. Multiplicamos por 1 el integrando, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\int \sec x\ dx &= \int \sec x \cdot \frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx \\ &= \ln|\sec x+\tan x|+C.\end{aligned}$$

vi) Utilizar identidades trigonométricas

Por ejemplo, considera $\int (\sec x + \tan x)^2 \; dx$. Desarrollando el cuadrado, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int (\sec x + \tan x)^2 \; dx &= \int \left(\sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x\right) \; dx \\
&= \int \left(\sec^2 x + 2 \sec x \tan x + (\sec^2 x - 1)\right) \; dx \\
&= \int \left(2 \sec^2 x + 2 \sec x \tan x - 1\right) \; dx \\
&= 2 \tan x + 2 \sec x - x + C.
\end{aligned}$$

1.7.2 Integración por partes

El método de integración por partes suele utilizarse cuando el integrando consiste en un producto de dos funciones, es decir, para integrales del tipo $\int f(x)g(x)dx$ (recuerda que $\int f \cdot g \; dx \neq \int f \; dx \cdot \int g \; dx$). Pero no siempre que tengas un producto de funciones se utiliza este método. Por ejemplo, la integral $\int xe^{x^2} dx$ debe verse como una de la forma $\int e^u du$ y no como la integral de un producto.

El método se basa en la derivada de un producto, con el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
\frac{d[f(x)g(x)]}{dx} &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\int \frac{d[f(x)g(x)]}{dx} dx &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \\
\int f(x)g'(x)dx &= \int \frac{d[f(x)g(x)]}{dx} dx - \int f'(x)g(x)dx \\
\int f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.
\end{aligned}$$

Observa que la última expresión debería contener un término $+C$ por la integral realizada, pero éste suele omitirse. Por último, definiendo

$$u = f(x), \quad v = g(x)$$

se tiene

$$du = f'(x)dx, \quad dv = g'(x)dx,$$

y el resultado anterior se convierte en

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Esta última se conoce como la fórmula de integración por partes.

Fórmula de la integración por partes

Sean $u, v,$ funciones diferenciables de x. Entonces

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Ejemplo:

Consideremos la integral $\int x \cos x \; dx$ e identifiquemos las funciones $u, v,$ como se muestra a continuación,

$$\begin{array}{lcl} u = x & \rightarrow & du = dx \\ dv = \cos x \; dx & \rightarrow & v = \operatorname{sen} x. \end{array}$$

De este modo,

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ u}}{x} \, \underset{\substack{\uparrow \\ dv}}{(\cos x \; dx)} = \underset{\substack{\uparrow \\ u}}{x} \, \underset{\substack{\uparrow \\ v}}{\operatorname{sen} x} - \int \underset{\substack{\uparrow \\ v}}{\operatorname{sen} x} \; \underset{\substack{\uparrow \\ du}}{dx} = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

En general es muy importante seleccionar adecuadamente las funciones u, v. Por ejemplo, si en $\int x \cos x \; dx$ hubiéramos propuesto

$$\begin{array}{lcl} u = \cos x & \rightarrow & du = -\operatorname{sen} x \, dx \\ dv = x \; dx & \rightarrow & v = \dfrac{x^2}{2}, \end{array}$$

la nueva integral sería más compleja que la original

$$\int \cos x \;\; (x \, dx) = \frac{x^2}{2} \cos x - \int \frac{x^2}{2} \left(-\operatorname{sen} x\right) \; dx = ???$$

En ejemplos como el anterior, la idea consiste en ir reduciendo el grado de las potencias de x, en lugar de incrementarlo, como ocurrió en la segunda selección. De hecho, el método puede utilizarse repetidamente, hasta llegar a reducir el grado de x a un valor que nos permita ya la integración directa (ésta, sin embargo, no es una regla general).

Ejemplo:

Considera la integral $\int x^2 e^{-3x} dx$. En este caso, conviene proponer

$$\begin{array}{lcl} u = x^2 & \rightarrow & du = 2x dx \\ dv = e^{-3x} \; dx & \rightarrow & v = \dfrac{e^{-3x}}{-3}, \end{array}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{-3x} dx &= (x^2)\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right) - \int \left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)(2x)\,dx \\
&= -\frac{x^2 e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\int x e^{-3x} dx.
\end{aligned}$$

Ahora vuelves a aplicar el método de integración por partes a la integral que te quedó, proponiendo

$$\begin{aligned}
u = x \qquad &\rightarrow \quad du = dx \\
dv = e^{-3x}\,dx &\rightarrow \quad v = \frac{e^{-3x}}{-3},
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{-3x} dx &= -\frac{x^2 e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\left[(x)\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right) - \int \left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right) dx\right] \\
&= -\frac{x^2 e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\left[-\frac{x e^{-3x}}{3} + \frac{1}{3}\int e^{-3x} dx\right] \\
&= -\frac{x^2 e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\left[-\frac{x e^{-3x}}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)\right] + C \\
&= -\frac{x^2 e^{-3x}}{3} - \frac{2x e^{-3x}}{9} - \frac{2e^{-3x}}{27} + C.
\end{aligned}$$

La integración por partes también puede utilizarse en algunas integrales en donde el integrando contiene una sola función, y no un producto de dos funciones.

Ejemplo:

Considera la integral $\int \ln x\, dx$. En este caso propones

$$\begin{aligned}
u = \ln x \quad &\rightarrow \quad du = \tfrac{1}{x} dx \\
dv = dx \quad &\rightarrow \quad v = x,
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int \ln x\, dx &= (\ln x)(x) - \int (x)\left(\frac{1}{x}\right) dx \\
&= x \ln x - \int dx \\
&= x \ln x - x + C.
\end{aligned}$$

A continuación mostramos un ejemplo de otro tipo, en que la integral por partes es función de la propia integral original.

Ejemplo:

Considera $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$. Aquí podemos proponer

$$\begin{array}{lcl} u = e^x & \rightarrow & du = e^x dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx & \rightarrow & v = -\cos x, \end{array}$$

de modo que

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx.$$

Volvemos a integrar por partes, proponiendo

$$\begin{array}{lcl} u = e^x & \rightarrow & du = e^x dx \\ dv = \cos x\, dx & \rightarrow & v = \operatorname{sen} x \end{array}$$

(¡cuidado! si propones $u = \cos x$ y $dv = e^x dx$ vuelves a regresar a la integral original) y así

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx,$$

de modo que al agrupar los términos con $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ se obtiene

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x,$$

de donde se concluye que

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2} + C.$$

El método de integración por partes también se aplica en integrales definidas, como se muestra a continuación.

Ejemplo:

Considera $\int_0^1 xe^{2x}\, dx$. En este caso,

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{2x}\, dx &= \left.\frac{1}{2}xe^{2x}\right|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\, dx \\ &= \left.\frac{1}{2}xe^{2x}\right|_0^1 - \left.\frac{1}{4}e^{2x}\right|_0^1 \\ &= \left.\left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right)\right|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot e^2 - \frac{1}{4}e^2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 \cdot e^0 - \frac{1}{4}e^0\right) = \frac{1}{4}\left(e^2+1\right). \end{aligned}$$

¿Cómo seleccionar u y dv en una integral por partes? Existe una regla simple para establecer el orden de selección de la función u sobre la diferencial dv resumida en la palabra ILATE, en donde cada letra denota la función prioritaria (de izquierda a derecha): I=inversa, L=logarítmica, A=algebraica, T=trigonométrica y E= exponencial. Por ejemplo, en $\int x^3 \operatorname{sen}^{-1} x \, dx$ la selección deberá ser $u = \operatorname{sen}^{-1} x$.

1.7.3 Fracciones parciales

El *método de fracciones parciales* o *método de coeficientes indeterminados* se utiliza para integrar funciones racionales de la forma $f(x) = p(x)/q(x)$, donde p y q son polinomios en la variable x. La idea es escribir esta fracción en términos de fracciones más simples, con denominadores de grado 1 o 2. Por ejemplo,

$$\underbrace{\int \frac{-2x^5 + 3x^2 + 1}{x - x^3} \, dx}_{integral\ fea} = \underbrace{\int \left(2x^2 + 2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{1-x} \right) dx}_{integrales\ bonitas}.$$

Para ello, se llevan a cabo los siguientes pasos:

Paso 1. Si f es una fracción impropia, se efectúa la división para obtener la suma de un polinomio más una fracción propia. Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{-2x^5 + 3x^2 + 1}{x - x^3} = \underbrace{2x^2 + 2}_{\text{polinomio}} + \underbrace{\frac{3x^2 - 2x + 1}{x - x^3}}_{\text{fracción propia}}$$

Paso 2. Si $f = p/q$ es una fracción propia, se factoriza $q(x)$ como el producto de factores lineales, o factores cuadráticos irreducibles. Por ejemplo,

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{x - x^3} = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x(1+x)(1-x)}.$$

Paso 3. Para cada uno de los factores obtenidos en el denominador se introducen coeficientes indeterminados, como se muestra en los siguientes ejemplos:

a) Factores lineales distintos:

$$\frac{p(x)}{x(1+x)(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-x}.$$

b) Factores lineales repetidos:

$$\frac{p(x)}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}.$$

c) Factores cuadráticos irreducibles distintos:

$$\frac{p(x)}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

d) Factores cuadráticos irreducibles repetidos:

$$\frac{p(x)}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^3}.$$

Así, por ejemplo, si $p(x)$ es un polinomio de grado menor que 7, entonces

$$\frac{p(x)}{x(x-3)(x+1)^3(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{(x+1)^3} + \frac{Fx+G}{x^2+1}.$$

Paso 4. Se calculan los coeficientes indeterminados A, B, C,..., sumando nuevamente las fracciones parciales e igualando el numerador con $p(x)$, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

1. Encuentra $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\, dx$.

   En el integrando se tiene una fracción propia, por lo que efectuamos directamente la descomposición en fracciones parciales, dada por

$$\begin{aligned} \frac{5x-3}{x^2-2x-3} &= \frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} \\ &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \\ &= \frac{A(x+1)+B(x-3)}{(x-3)(x+1)} \\ &= \frac{(A+B)x+(A-3B)}{x^2-2x-3}. \end{aligned}$$

   Comparando el último término con el primero tenemos

$$\begin{aligned} A+B &= 5 \\ A-3B &= -3, \end{aligned}$$

   de modo que $A=3$ y $B=2$. De esta manera,

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+1}.$$

   Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\, dx &= \int \frac{3}{x-3}\, dx + \int \frac{2}{x+1}\, dx \\ &= 3\ln|x-3| + 2\ln|x+1| + C \\ &= \ln\left|(x-3)^3(x+1)^2\right| + C. \end{aligned}$$

2. Encuentra $\int \dfrac{-2x^5+3x^2+1}{x-x^3}\,dx$ (ejemplo inicial de esta sección).

En el integrando se tiene una fracción impropia, por lo que primero efectuamos la división de polinomios, obteniendo

$$\frac{-2x^5+3x^2+1}{x-x^3} = 2x^2+2+\frac{3x^2-2x+1}{x-x^3}.$$

De esta manera,

$$\int \frac{-2x^5+3x^2+1}{x-x^3}\,dx = \int \left(2x^2+2+\frac{3x^2-2x+1}{x-x^3}\right)\,dx.$$

Ahora efectuamos la descomposición en fracciones parciales de la fracción propia en el integrando. Para ello, escribimos

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2-2x+1}{x-x^3} &= \frac{3x^2-2x+1}{x(1+x)(1-x)} \\
&= \frac{A}{x}+\frac{B}{1+x}+\frac{C}{1-x} \\
&= \frac{A(1+x)(1-x)+Bx(1-x)+Cx(1+x)}{x(1+x)(1-x)} \\
&= \frac{x^2(-A-B+C)+x(B+C)+A}{x(1+x)(1-x)}.
\end{aligned}$$

Comparando el último término con el primero tenemos

$$\begin{aligned}
A &= 1 \\
B+C &= -2 \\
-A-B+C &= 3,
\end{aligned}$$

de modo que $A=C=1$ y $B=-3$. Así,

$$\frac{3x^2-2x+1}{x-x^3} = \frac{1}{x}-\frac{3}{1+x}+\frac{1}{1-x}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{-2x^5+3x^2+1}{x-x^3}\,dx &= \int \left(2x^2+2+\frac{1}{x}-\frac{3}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\,dx \\
&= \frac{2x^3}{3}+2x+\ln|x|-3\ln|1+x|-\ln|1-x|+C \\
&= \frac{2x^3}{3}+2x+\ln\left|\frac{x}{(1+x)^3(1-x)}\right|+C.
\end{aligned}$$

3. Encuentra $\int \frac{6x}{x^2+4x+4}\, dx$.

   Se tiene una fracción propia. De esta manera,

$$\frac{6x}{x^2+4x+4} = \frac{6x}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+(2A+B)}{x^2+4x+4}.$$

   Comparando términos, tenemos

$$\begin{aligned} A &= 6 \\ 2A+B &= 0, \end{aligned}$$

   de modo que $A=6$ y $B=-12$. Así

$$\frac{6x}{x^2+4x+4} = \frac{6}{x+2} - \frac{12}{(x+2)^2}.$$

   Por lo tanto,

$$\int \frac{6x}{x^2+4x+4}\, dx = 6\int \frac{dx}{x+2} - 12\int \frac{dx}{(x+2)^2} = 6\ln|x+2| + \frac{12}{x+2} + C.$$

4. Encuentra $\int \frac{4}{x^4-1}\, dx$.

   Se tiene una fracción propia. De esta manera,

$$\begin{aligned} \frac{4}{x^4-1} &= \frac{4}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\ &= \frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)}{x^4-1}. \end{aligned}$$

   Comparando términos, tenemos

$$\begin{aligned} A+B+C&=0 \\ A-B+D&=0 \\ A+B-C&=0 \\ A-B-D&=4, \end{aligned}$$

   de modo que $A=1$, $B=-1$, $C=0$ y $D=-2$. Así

$$\frac{4}{x^4-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}.$$

   Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{x^4-1}\, dx &= \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx - 2\int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \ln|x-1| - \ln|x+1| - 2\tan^{-1} x + C \\ &= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - 2\tan^{-1} x + C. \end{aligned}$$

Por último, a continuación deduciremos una fórmula general para encontrar $\int \frac{du}{a^2-u^2}$, con $a \neq 0$ una constante. Se tiene,

$$\frac{1}{a^2-u^2} = \frac{A}{a-u} + \frac{B}{a+u} = \frac{A(a+u)+B(a-u)}{(a-u)(a+u)} = \frac{(A-B)u+(Aa+Ba)}{a^2-u^2}.$$

Comparando términos, tenemos

$$\begin{aligned} A-B&=0 \\ Aa+Ba&=1, \end{aligned}$$

de modo que $A = B = \frac{1}{2a}$. Así,

$$\frac{1}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-u}\right) + \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+u}\right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{a^2-u^2} &= \frac{1}{2a}\int \frac{du}{a-u} + \frac{1}{2a}\int \frac{du}{a+u} \\ &= -\frac{1}{2a}\ln|a-u| + \frac{1}{2a}\ln|a+u| + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C. \end{aligned}$$

Así, hemos obtenido la siguiente fórmula

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C.$$

Ejemplos:

1. $\int \frac{dx}{7-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+x}{\sqrt{7}-x}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{7}}{x-\sqrt{7}}\right| + C.$

2. $\int \frac{e^t\,dt}{16-e^{2t}} = \int \frac{e^t\,dt}{16-(e^t)^2} = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{4+e^t}{4-e^t}\right| + C = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{e^t+4}{e^t-4}\right| + C.$

3. $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}} = \int \frac{e^x\,dx}{(e^x)^2-1} = \int \frac{du}{u^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+e^x}{1-e^x}\right| + C.$

Capítulo 2
Formas indeterminadas e integrales impropias

2.1 Formas indeterminadas. Regla de L'Hopital

Cuando estudiaste el concepto de límite en tu primer curso de Cálculo seguramente te enfrentaste al cálculo de límites tales como

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{5x-3}{x^2+2x+1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \text{etc...}$$

que eran de la forma $0/0$ o ∞/∞. Estos son casos particulares de lo que se conoce como *formas indeterminadas*, que en ejemplos como los anteriores pueden calcularse mediante simples manipulaciones algebraicas o geométricas. Sin embargo, no siempre es posible aplicar estos métodos en el caso general, de modo que es útil contar con alguna técnica alternativa.

A continuación veremos un método muy útil para calcular el límite en formas indeterminadas, conocida como la *regla de L´Hopital*, utilizada para calcular límites de la forma $0/0$, es decir,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad f(a) = g(a) = 0.$$

Regla de L'Hopital (forma débil)

Suponga que $f(a) = g(a) = 0$, que $f'(a)$ y $g'(a)$ existen y que $g'(a) \neq 0$. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left.\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|_{x=a} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demostración:

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} \overset{L}{=} \left.\dfrac{2x}{1}\right|_{x=2} = 4.$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \overset{L}{=} \left.\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}\right|_{x=0} = \dfrac{1}{2}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{L}{=} \left.\dfrac{\cos x}{1}\right|_{x=0} = 1.$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x-\operatorname{sen} x}{x} \overset{L}{=} \left.\dfrac{3-\cos x}{1}\right|_{x=0} = 2.$

La forma débil de la regla de L'Hopital falla cuando al derivar vuelve a obtenerse $\frac{0}{0}$, como por ejemplo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} \overset{L}{=} \left.\frac{1-\cos x}{3x^2}\right|_{x=0} =???$$

En ese caso, es necesario reemplazar la regla de L'Hopital por la siguiente versión.

Regla de L'Hopital (forma fuerte)

Suponga que $f(a) = g(a) = 0$ y que f y g son diferenciables en un intervalo abierto I que contenga al punto a. Suponga también que $g'(x) \neq 0$ en I, para todo $x \neq a$. Entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ver demostración en el apéndice B.

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{6x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6} = \dfrac{1}{6}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x+x^2} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+2x} = \dfrac{0}{1} = 0.$

La regla de L'Hopital deja de utilizarse en el momento que ya no se tiene un límite de la forma $\frac{0}{0}$. Así, el mal uso de la regla en el ejemplo 2 te llevaría a que

$$¡¡¡ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{senx}{1+2x} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2} \;!!!$$

Es posible demostrar que la regla de L'Hopital también se aplica directamente a límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \overset{L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Asimismo, se usa para calcular límites indeterminados de la forma $0\cdot\infty$, o bien, $\infty-\infty$, reescribiendo primero estos como $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, como se ilustra a continuación.

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = 0.$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0.$

3. $$\lim_{x\to(-\infty)} [e^{-2x}\ln(1+3e^{2x})] = \lim_{x\to(-\infty)}\left[\frac{\ln(1+3e^{2x})}{e^{2x}}\right] \overset{L}{=} \lim_{x\to(-\infty)}\frac{\left(\frac{6e^{2x}}{1+3e^{2x}}\right)}{2e^{2x}} = \lim_{x\to(-\infty)}\frac{3}{1+3e^{2x}} = 3.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{2^x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2^x}{x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{-2^x\ln 2}{1} = -\ln 2 = \ln(1/2).$

Adicionalmente, la regla puede utilizarse en combinación con las propiedades del logaritmo, para calcular límites indeterminados del tipo ∞^0, 0^0 o 1^∞, como se muestra a continuación.

Ejemplos:

1. $$\lim_{x\to\infty}(1+2^x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+2^x)^{1/x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{(1+2^x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+2^x)}{x}} \overset{L}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2}{1+2^x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln 2}{2^{-x}+1}} = e^{\ln 2} = 2.$$

2. $$\lim_{x\to 0^+}(x^x)^x = \lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{x^2\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}}} \overset{L}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{-2x^{-3}}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2}} = e^{-0} = 1.$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+r/x)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+r/x)} = \lim_{y\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+ry)}{y}}$$
$$= e^{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\ln(1+ry)}{y}} \overset{L}{=} e^{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\frac{r}{1+ry}}{1}} = e^{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{r}{1+ry}} = e^r.$$

4. La función CES (Constant Elasticity of Substitution) $w:\mathbb{R}^2_{++}\to(0,\infty)$ está dada por
$$w(x_1,x_2) = \left(\delta_1 x_1^\rho + \delta_2 x_2^\rho\right)^{1/\rho},$$
en donde $\delta_1,\delta_2>0$ y $\rho\neq 0$. Demuestra que si $\delta_1+\delta_2=1$, entonces en el límite $\rho\to 0$ esta función se convierte en una Cobb-Douglas, es decir,
$$\lim_{\rho\to 0} w(x_1,x_2) = x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2}.$$

Si sustituyes directamente $\rho=0$ en $w=\left(\delta_1 x_1^\rho+\delta_2 x_2^\rho\right)^{1/\rho}$ obtienes $(\delta_1+\delta_2)^\infty = 1^\infty$, que es una forma indeterminada y puede calcularse con la regla de L'Hopital. Para ello, primero escribimos
$$\lim_{\rho\to 0} w = \lim_{\rho\to 0} e^{\ln w} = e^{\lim\limits_{\rho\to 0}\ln w}.$$
Ahora bien,
$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0}\ln w &= \lim_{\rho\to 0}\ln\left(\delta_1 x_1^\rho+\delta_2 x_2^\rho\right)^{1/\rho}\\
&= \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\ln\left(\delta_1 x_1^\rho+\delta_2 x_2^\rho\right)}{\rho}\right) \overset{L}{=} \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\frac{d}{d\rho}\ln\left(\delta_1 x_1^\rho+\delta_2 x_2^\rho\right)}{1}\right)\\
&= \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\frac{d}{d\rho}\left(\delta_1 x_1^\rho+\delta_2 x_2^\rho\right)}{\delta_1 x_1^\rho+\delta_2 x_2^\rho}\right).
\end{aligned}$$
Como $da^x/dx = a^x\ln a$, para $a>0$, se tiene $\frac{d}{d\rho}\left(\delta_i x_i^\rho\right) = \delta_i x_i^\rho \ln x_i$, y así
$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0}\ln w &= \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\delta_1 x_1^\rho\ln x_1+\delta_2 x_2^\rho\ln x_2}{\delta_1 x_1^\rho+\delta_2 x_2^\rho}\right)\\
&= \frac{\delta_1\ln x_1+\delta_2\ln x_2}{\delta_1+\delta_2} = \frac{\ln x_1^{\delta_1}+\ln x_2^{\delta_2}}{1} = \ln\left(x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2}\right).
\end{aligned}$$
Concluimos que
$$\lim_{\rho\to 0} w = e^{\lim\limits_{\rho\to 0}\ln w} = e^{\ln\left(x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2}\right)} = x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2}.$$

Para concluir, es importante recalcar que la regla de L'Hopital sólo se aplica para calcular los límites de las formas indeterminadas ya mencionadas, y no para hallar cualquier límite que se nos presente. Por ejemplo, para demostrar que $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(xe^{1/x}\right)=\infty$ sí puede usarse la regla de L'Hopital, ya que es de la forma $0\cdot\infty$, mientras que para justificar que $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(xe^{1/x}\right)=0$ no puede aplicarse la regla, ya que es un límite directo del tipo $0\cdot 0$ (y no una forma indeterminada).

2.2 Integrales impropias

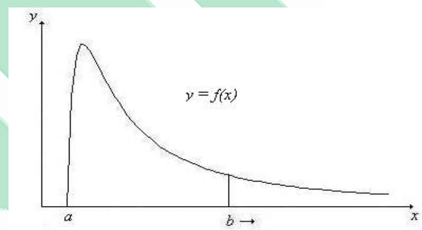
Las integrales que vimos en el capítulo 1 debían cumplir dos requisitos. Primero, que el dominio de integración $[a, b]$ fuera finito. Segundo, que la función f en el integrando fuera acotada en $[a, b]$. En muchas aplicaciones aparecen integrales que no cumplen una o ambas condiciones, y éstas se denominan integrales impropias.

Una integral impropia es una integral con límites de integración infinitos (tipo 1), o bien, es la integral definida de una función que se vuelve infinita en algún punto dentro del intervalo de integración (tipo 2). Una integral impropia se calcula a partir de una integral propia, como se expone a continuación.

Definición. Integrales impropias tipo 1 (dominio infinito)

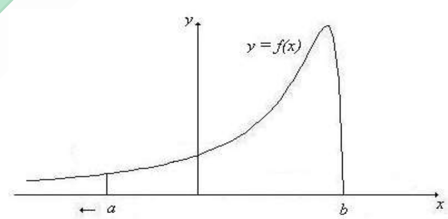
(a) Si f es continua en $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$



(b) Si f es continua en $(-\infty, b]$, entonces

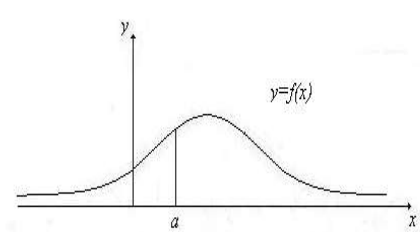
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$



Las integrales impropias en (a) y (b) se llaman *convergentes* si el límite existe, y *divergentes* si el límite no existe.

(c) Si son convergentes $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty f(x)\,dx$, definimos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx.$$



Si diverge alguna de las integrales del lado derecho de la igualdad, entonces *diverge* la integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$.

Ejemplos:

1. Calcula $\int_1^\infty \dfrac{\ln x}{x^2}\,dx$.

   En este caso,

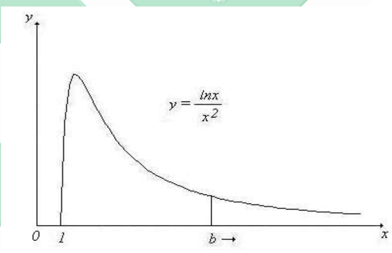
$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}\right]_1^b\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\ln b}{b}-\frac{1}{b}+\frac{\ln 1}{1}+\frac{1}{1}\right]\\ &= -\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b}+1.\end{aligned}$$

   De acuerdo con la regla de L'Hopital,

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b}\overset{L}{=}\lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{1}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}=0.$$

   Concluimos que la integral converge a 1, es decir,

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx=1.$$



2. Calcula $\int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t}\,dt$.

   En este caso,

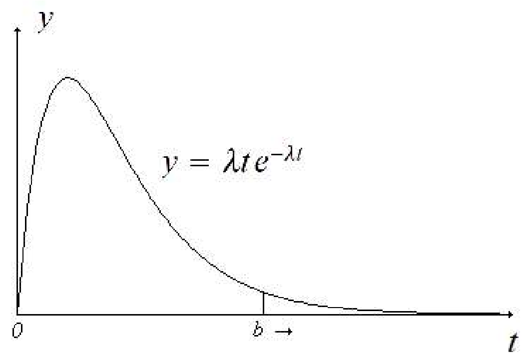
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda t\, e^{-\lambda t}\,dt &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \lambda t\, e^{-\lambda t}\,dt\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-te^{-\lambda t}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^b\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-be^{-\lambda b}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda b}+\frac{1}{\lambda}\right]\\ &= -\lim_{b\to\infty} be^{-\lambda b}+\frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

De acuerdo con la regla de L'Hopital,

$$\lim_{b\to\infty} be^{-\lambda b} = \lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^{\lambda b}} \stackrel{L}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda b}} = 0.$$

Concluimos que la integral converge a $1/\lambda$, es decir,

$$\int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}.$$

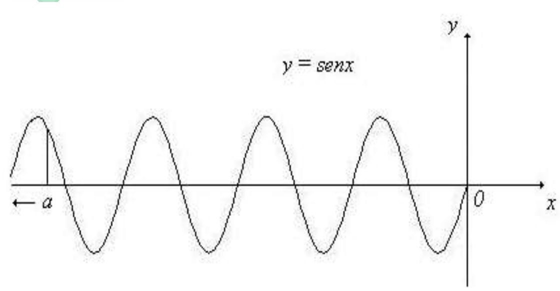


3. Calcula $\int_{-\infty}^{0}$ sen $x\ dx$.

   En este caso,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} \operatorname{sen} x\, dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \lim_{a\to-\infty} \left[-\cos x\right]_a^0 \\ &= \lim_{a\to-\infty} \left[-1+\cos a\right]. \end{aligned}$$

   Como $\cos(-\infty)$ no está definido, por lo tanto la integral diverge.



4. Calcula $\int_2^{\infty} \dfrac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\, dx$.

En este caso,

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \left[\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+1}\right] dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left\{ 2\int_2^{b} \frac{dx}{x-1} - \int_2^{b} \frac{2x\, dx}{x^2+1} - \int_2^{b} \frac{dx}{x^2+1} \right\} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[2\ln|x-1| - \ln(x^2+1) - \tan^{-1} x\right]_2^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left\{ \ln\left[\frac{(b-1)^2}{b^2+1}\right] - \tan^{-1} b + \ln 5 + \tan^{-1}(2) \right\}.
\end{aligned}$$

De acuerdo con la regla de L'Hopital,

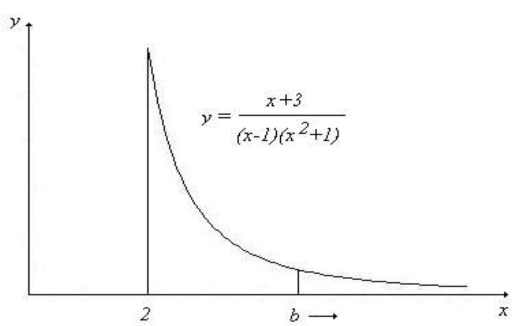
$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} \ln\left[\frac{(b-1)^2}{b^2+1}\right] &= \ln\left[\lim_{b\to\infty} \frac{(b-1)^2}{b^2+1}\right] \\
&\overset{L}{=} \ln\left[\lim_{b\to\infty} \frac{2(b-1)}{2b}\right] \\
&\overset{L}{=} \ln\left[\lim_{b\to\infty} \frac{2}{2}\right] \\
&= \ln 1 = 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte, como $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \tan\theta = \infty$, por lo tanto

$$\tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Concluimos que la integral converge a $-\frac{\pi}{2} + \ln 5 + \tan^{-1}(2)$, es decir,

$$\int_2^{\infty} \frac{x+3}{(x+1)(x^2+1)}\, dx = -\frac{\pi}{2} + \ln 5 + \tan^{-1}(2).$$



5. Calcula $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, dx$.
Por una parte,

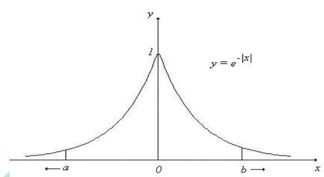
$$\int_{-\infty}^{0} e^{x}\, dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{x}\, dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^{x}\right]_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty}\left[1-e^{a}\right] = 1.$$

Por otra parte,

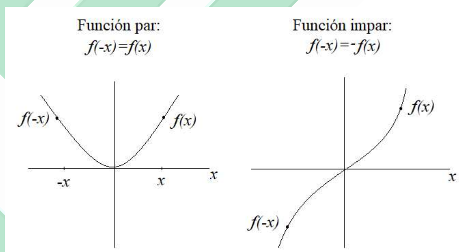
$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-b}+1\right] = 1.$$

Por lo tanto, cada integral converge a 1, de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = 2.$$



6. Sea f continua y acotada en $(-\infty,\infty)$. Demuestra que: (a) Si f es par, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)dx$. (b) Si f es impar, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$.



Como f es continua y acotada en $(-\infty,\infty)$, convergen las integrales $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ y $\int_{0}^{\infty} f(x)dx$. Esto permite escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx.$$

(a) Si f es par, entonces $f(-x) = f(x)$. Usando la sustitución $u = -x$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = -\int_{\infty}^{0} f(-u)du = -\int_{\infty}^{0} f(u)du = \int_{0}^{\infty} f(u)du.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} f(u)du + \int_{0}^{\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)dx.$$

(b) Si f es impar, entonces $f(-x) = -f(x)$. Usando la sustitución $u = -x$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = -\int_{\infty}^{0} f(-u)du = \int_{\infty}^{0} f(u)du = -\int_{0}^{\infty} f(u)du.$$

Por lo tanto,

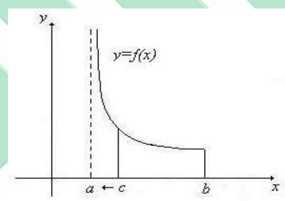
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -\int_{0}^{\infty} f(u)du + \int_{0}^{\infty} f(x)dx = 0.$$

Nota que con este resultado es más fácil resolver el ejercicio 5. En efecto, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = 2$.

Definición. Integrales impropias tipo 2 (imagen o rango infinito)

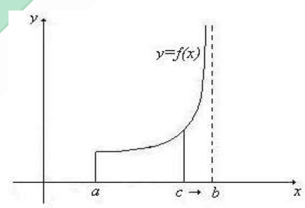
(a) Si f es continua en $(a, b]$, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{c \to a^+} \int_{c}^{b} f(x)\, dx.$$



(b) Si f es continua en $[a, b)$, entonces

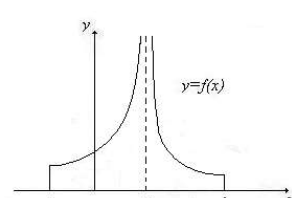
$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{c \to b^-} \int_{a}^{c} f(x)\, dx.$$



Las integrales impropias en (a) y (b) se llaman *convergentes* si el límite existe, y *divergentes* si el límite no existe.

(c) Si f tiende a infinito en algún punto interior $c \in [a, b]$ y son convergentes $\int_{a}^{c} f(x)\, dx$ y $\int_{c}^{b} f(x)\, dx$, definimos

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{b} f(x)\, dx.$$



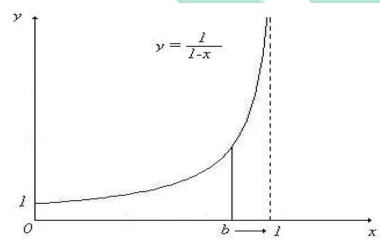
Si diverge alguna de las integrales del lado derecho de la igualdad, entonces *diverge* la integral $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$.

Ejemplos:

1. Calcula $\int_0^1 \dfrac{dx}{1-x}$.
   En este caso,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1-x} &= \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{1-x}\\ &= \lim_{b\to 1^-}\left[-\ln|1-x|\right]_0^b\\ &= -\lim_{b\to 1^-}\left[\ln|1-b|-\ln 1\right]\\ &= -\lim_{b\to 1^-}\ln|1-b|\\ &= -(-\infty)=\infty.\end{aligned}$$

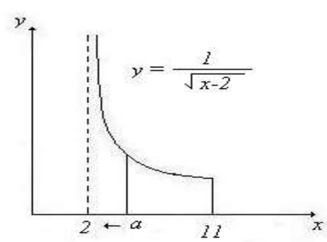
   Por lo tanto, la integral diverge.



2. Calcula $\int_2^{11} \dfrac{dx}{\sqrt{x-2}}$.
   En este caso,

$$\begin{aligned}\int_2^{11} \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{a\to 2^+}\int_a^{11} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}\\ &= \lim_{a\to 2^+}\left[2\sqrt{x-2}\right]_a^{11}\\ &= 2\lim_{a\to 2^+}\left[\sqrt{11-2}-\sqrt{a-2}\right]\\ &= 2\left[3-0\right]=6.\end{aligned}$$

   Por lo tanto, la integral converge a 6.



3. Calcula $\int_0^3 \dfrac{dx}{(x-1)^{2/3}}$.

Es conveniente realizar antes la sustitución $u = x - 1$. En ese caso,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_{-1}^2 \frac{du}{u^{2/3}} = \int_{-1}^0 \frac{du}{u^{2/3}} + \int_0^2 \frac{du}{u^{2/3}}.$$

Como

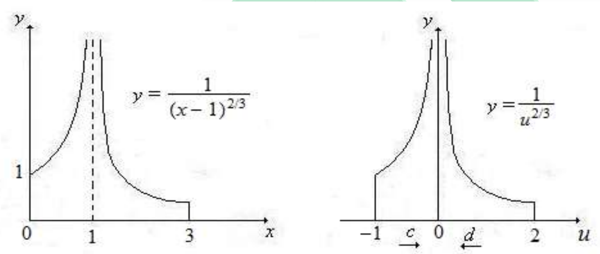
$$\int_{-1}^0 \frac{du}{u^{2/3}} = \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^c \frac{du}{u^{2/3}} = \lim_{c\to 0^-} \left[3u^{1/3}\right]_{-1}^c = 3 \lim_{c\to 0^-} \left[c^{1/3} - (-1)^{1/3}\right] = 3,$$

$$\int_0^2 \frac{du}{u^{2/3}} = \lim_{d\to 0^+} \int_d^2 \frac{du}{u^{2/3}} = \lim_{d\to 0^+} \left[3u^{1/3}\right]_d^2 = 3 \lim_{d\to 0^+} \left[2^{1/3} - d^{1/3}\right] = 3\sqrt[3]{2},$$

por lo tanto, ambas integrales convergen. De este modo,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2},$$

y, por lo tanto, la integral converge a $3 + 3\sqrt[3]{2}$.

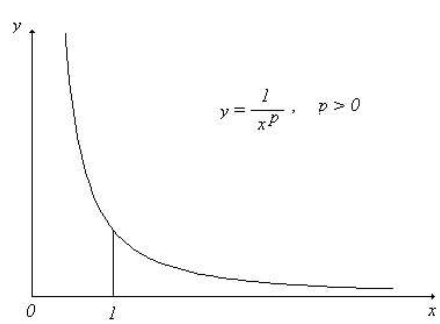


Integrales de la forma $\int \dfrac{dx}{x^p}$

Un tipo de integrales que resulta de particular interés son las integrales impropias de la forma

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \quad \text{y} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^p},$$

con $p \in \mathbb{R}$.



Dependiendo del valor del parámetro p, la primera integral puede presentar pro ble mas alrededor de $x = 0$, mientras que la segunda lo hace para $x \gg 1$. Para determinar la convergencia de estas integrales, nota que

$$\int \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \ln|x| + C, & p = 1 \\ \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1} + C, & p \neq 1. \end{cases}$$

Así, para las integrales de la forma $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^p}$ se tiene:

i) Si $p = 1$, entonces

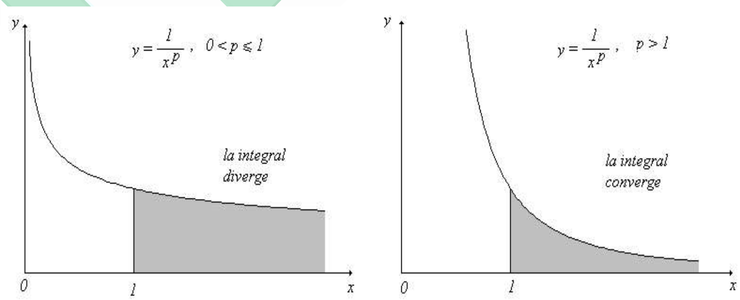
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} [\ln b - \ln 1] = \infty.$$

ii) Si $p \neq 1$, entonces

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{-p+1} \lim_{b\to\infty} \left[b^{-p+1} - 1\right] = \begin{cases} \infty, & p < 1 \\ \dfrac{1}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$

Concluimos entonces que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \infty, & p \leq 1 \\ \dfrac{1}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$



Ejemplo:

Son divergentes $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x}$, $\int_1^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ y $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^{-2}}$.

Son convergentes $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^{1.1}}$, $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^2}$ y $\int_1^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x^3}}$.

Por otra parte, para las integrales de la forma $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^p}$ se tiene:

i) Si $p = 1$, entonces

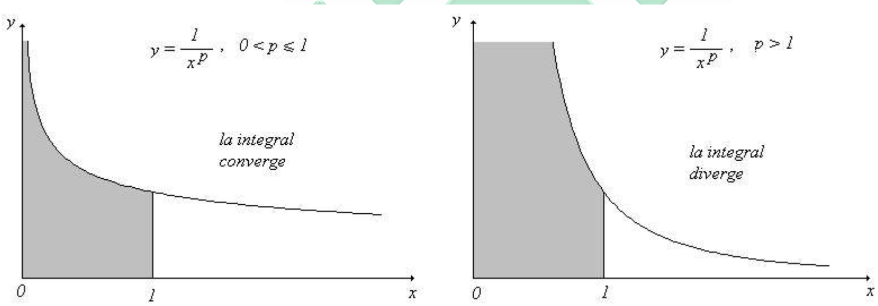
$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0^+} [\ln 1 - \ln a] = \infty.$$

ii) Si $p \neq 1$, entonces

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{-p+1} \lim_{a\to 0^+} \left[1 - a^{-p+1}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & p < 1 \\ \infty, & p > 1. \end{cases}$$

Concluimos entonces que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & p < 1 \\ \infty, & p \geq 1. \end{cases}$$



Ejemplo:

Son convergentes $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^{0,9}}$, $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ y $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^{-2}}$.

Son divergentes $\int_0^1 \dfrac{dx}{x}$, $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^{1,1}}$ y $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2}$.

De esta manera, sin efectuar cálculos detallados podemos concluir que la integral $\int_{-1}^1 \dfrac{dx}{x^3}$ diverge. En efecto, sabemos que

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^1 \frac{dx}{x^3}.$$

Como cada una de las integrales del lado derecho diverge, por lo tanto $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$ diverge (¡compruébalo!). Nota que si hubieras efectuado la integración de una manera descuidada, es decir, sin partir la integral en $x = 0$, habrías obtenido erróneamente

$$¡¡¡ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2} \right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{(-1)^2} \right) = 0 \; !!!$$

Por último, observa que las integrales $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^p}$ convergen para aquellos valores de p para los que las integrales $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ divergen, y viceversa, con excepción del caso $p = 1$, en donde ambas integrales divergen.

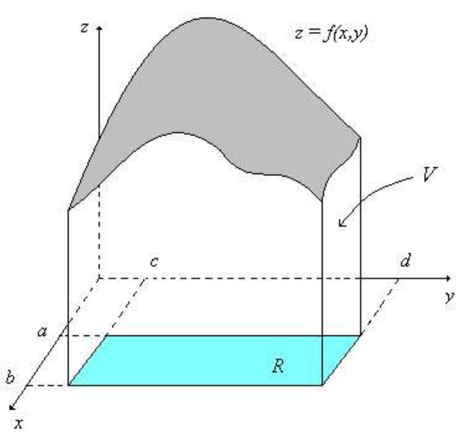
Capítulo 3

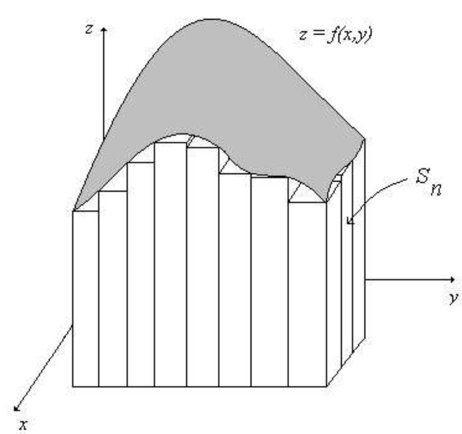
Integración Múltiple

3.1 Integrales dobles sobre un rectángulo. Teorema de Fubini

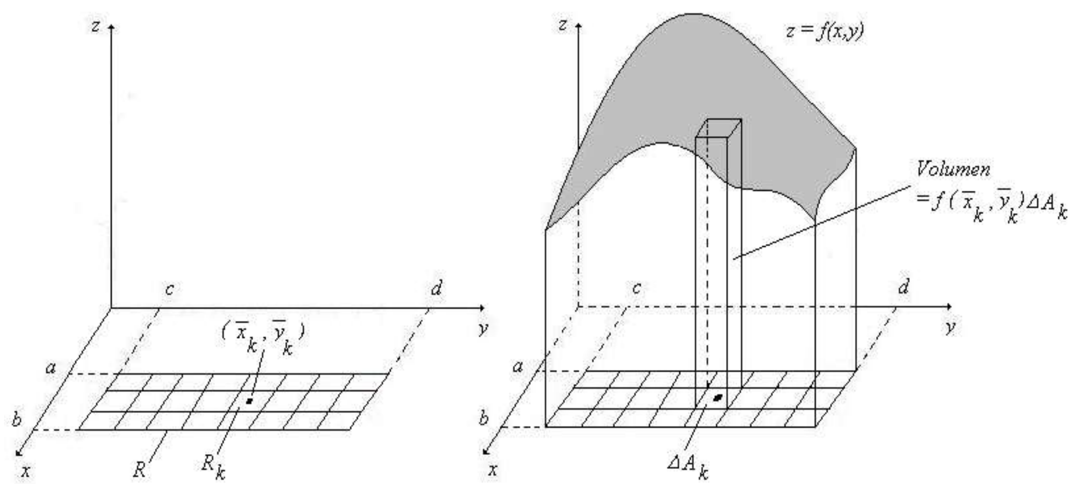
La generalización de la integral definida de funciones $f(x)$ de una variable en un intervalo del eje x es la *integral múltiple* de funciones $f(x_1, x_2, \ldots)$ de varias variables en alguna región de su dominio. Aquí discutiremos en detalle el significado y propiedades de la *integral doble* de funciones continuas $f(x, y)$ de dos variables sobre alguna región R de su dominio.

Sea $z = f(x, y)$ una función continua, definida en una región acotada R en el plano xy. Para facilitar la discusión, primero supongamos que f es una función no negativa, $f \geq 0$, en R. En ese caso, nos interesa encontrar el volumen V de la región sólida tridimensional sobre el plano xy, acotada abajo por R y arriba por la superficie $z = f(x, y)$, como se ilustra en la siguiente figura, en donde R es la región rectangular $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$. Extendiendo el concepto de suma de Riemann del capítulo 1, el volumen V puede aproximarse por el volumen S_n de n cajas rectangulares, o paralelepípedos.





Para encontrar S_n se realiza una partición (reticulado) de la región rectangular R, en n subregiones R_k, $k = 1, \ldots, n$, que determina las bases de cada una de las n cajas. En cada rectángulo k de la partición identificamos algún punto representativo $(\overline{x}_k,\overline{y}_k)$, de modo que la altura de la caja correspondiente es $f(\overline{x}_k,\overline{y}_k)$. Si ΔA_k es el área del rectángulo alrededor del punto (x_k, y_k), entonces el volumen de la $k-$ésima caja está dado simplemente por $f(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\Delta A_k$.



De esta manera, el volumen aproximado S_n de las n cajas rectangulares es la suma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\Delta A_k.$$

En el límite cuando $n \to \infty$, si éste converge, la suma anterior se convierte en el volumen V entre la gráfica de f y la región rectangular R, es decir,

$$V = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\Delta A_k \equiv \int\int_R f(x,y)\, dA,$$

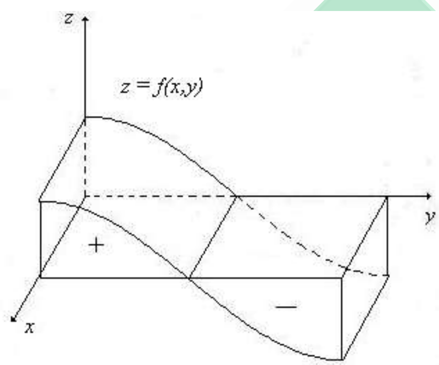
en donde dA es la diferencial de área. La última igualdad define la integral doble de la función f a lo largo de la región rectangular R en el plano xy. De hecho, aunque no lo mostraremos aquí, esta definición puede extenderse trivialmente al caso de regiones planas acotadas R más generales (no necesariamente rectangulares), como se enuncia a continuación.

Definición. La *integral doble* de una función $f(x,y)$ a lo largo de una región acotada y cerrada R en el plano xy es el límite

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\Delta A_k,$$

cuando este límite existe.

La integral doble $\int\int_R f(x,y)\,dA$ representa un volumen sólo cuando $f \geq 0$. Cuando f puede tomar valores negativos a lo largo de la región R la integral doble pierde su significado geométrico de volumen, convirtiéndose en una suma de contribuciones, que puede tomar un valor positivo, negativo o inclusive cero, dependiendo del signo de los productos $f(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\Delta A_k$.



Propiedades de la integral doble

Sean f y g funciones continuas, definidas a lo largo de una misma región R de $\mathbb{R}^2$ y sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $\int\int_R kf(x,y)\,dA = k\int\int_R f(x,y)\,dA$
2. $\int\int_R [\,f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \int\int_R f(x,y)\,dA + \int\int_R g(x,y)\,dA$
3. $f(x,y) \geq 0$ en $R \Rightarrow \int\int_R f(x,y)\,dA \geq 0$
4. $f(x,y) \geq g(x,y)$ en $R \Rightarrow \int\int_R f(x,y)\,dA \geq \int\int_R g(x,y)\,dA$
5. Si $R = R_1 \cup R_2$, con $R_1 \cap R_2 = \varnothing$, entonces

$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int\int_{R_1} f(x,y)\,dA + \int\int_{R_2} f(x,y)\,dA$

3.1 Integrales dobles sobre un rectángulo. Teorema de Fubini

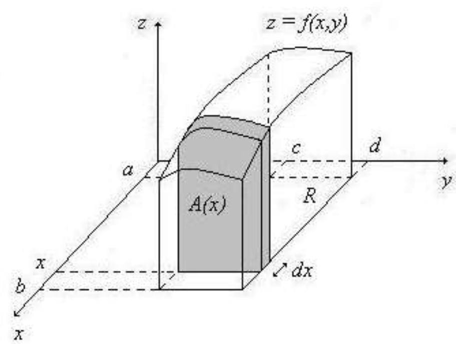
Hasta aquí hemos discutido el significado y las propiedades de la integral doble $\int\int_R f(x,y)\,dA$, pero aún no sabemos cómo se calcula ésta. A continuación presentamos un argumento geométrico para calcular esta integral, en donde resulta útil partir del supuesto de que f es una función no negativa. En esta sección nos restringiremos al caso de regiones rectangulares, de la forma

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\right\}.$$

La discusión para regiones R más generales se presenta en la siguiente sección.

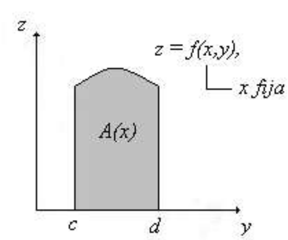
Nos interesa calcular el volumen V de la región sólida tridimensional acotada arriba por la superficie $z = f(x,y) \geq 0$ y abajo por la región rectangular $R:\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ en el plano xy. Imagina, por ejemplo, que el sólido en cuestión es un pan Bimbo, con la parte de arriba (la función $z = f(x,y)$) medio deformada, como lo muestra la figura. Para calcular el volumen V del pan, considera una rebanada muy delgadita en el intervalo $[x, x+dx]$. Si la rebanadita en la posición x presenta un área transversal $A(x)$, entonces su volumen sería simplemente $A(x)\,dx$ (área de la rebanadita$\times$su grosor). Así, el volumen V del pan es la suma de los volúmenes de todas las rebanaditas, desde $x = a$ hasta $x = b$, como se expresa en la siguiente integral:

$$V = \int_{x=a}^{x=b} A(x)\,dx.$$



Para encontrar el área $A(x)$ de la rebanadita de pan en la posición x, toma en cuenta que su superficie corre a lo largo del plano yz. Vista de frente, la rebanadita comienza en $y = c$ y termina en $y = d$, y su altura está dada por la curva $z = f(x \text{ fija}, y)$. Así, el área $A(x)$ del pan en la posición x está dada por la siguiente integral:

$$A(x) = \int_{y=c}^{y=d} f(x,y)\,dy \qquad (x \text{ fija})$$



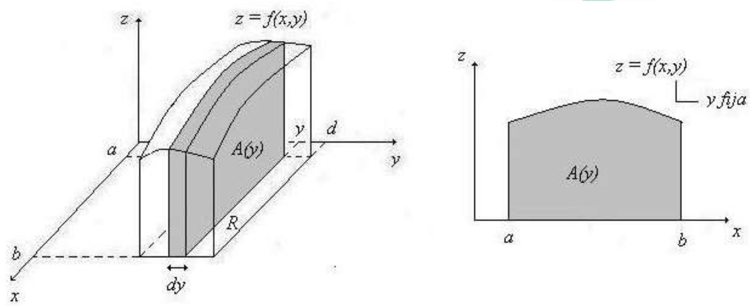
Sustituyendo esta expresión para $A(x)$ en la integral para V se tiene

$$V=\int_{x=a}^{x=b} A(x)\,dx=\int_{x=a}^{x=b}\left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)\,dy\right)\,dx,$$

o simplemente,

$$V=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx.$$

Un resultado similar se obtiene si, en lugar de rebanar el pan Bimbo a lo largo del eje x, éste se rebana a lo largo del eje y, como se muestra en la figura.



En ese caso,

$$V=\int_{y=c}^{y=d} A(y)\,dy=\int_{y=c}^{y=d}\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)\,dx\right)\,dy,$$

o simplemente

$$V=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy.$$

Estos resultados proporcionan una manera práctica de calcular la integral doble $\int\int_R f(x,y)\,dA$ a lo largo de una región rectangular R, aunque la función f pueda tomar valores negativos en R y la integral doble pierda el significado geométrico de volumen. Su formalización conduce al siguiente teorema, conocido como *Teorema de Fubini (primera forma)*, válido sólo para regiones R rectangulares. En la sección 3.2 se presentará una versión más general de este teorema, el *Teorema de Fubini (forma fuerte),* que se aplica en el caso de regiones R más generales (no rectangulares).

Teorema de Fubini (primera forma)

Si $f(x,y)$ es continua en la región rectangular $R:\ a\le x\le b,\ c\le y\le d$, entonces

$$\int\int_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx.$$

La expresión $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy$ se denomina *integral doble iterada*, ya que su cálculo se lleva a cabo mediante dos iteraciones. En la primera iteración integras parcialmente f con respecto a x,

$$\int_a^b f(x,y)\, dx,$$

manteniendo fijo el valor de y; al evaluar en los límites $x = a$ y $x = b$ el resultado de esta integración es, por lo general, una función de y. En la segunda iteración integras la función obtenida con respecto a y,

$$\int_c^d (\int_a^b f(x,y)\, dx) dy,$$

obteniendo como resultado final un número (no una función). Una interpretación similar se tiene para la integral doble iterada con el orden invertido, $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dydx$.

De acuerdo con el teorema de Fubini, en el caso de una región rectangular R puedes integrar $f(x,y)$ en el orden que te resulte más conveniente, siempre y cuando utilices los límites de integración apropiados en cada iteración: la integral con respecto a x va de $x = a$ a $x = b$, y la integral con respecto a y va de $y = c$ a $y = d$. El resultado final (un número) será el mismo para cualquier orden que escojas.

Ejemplo:

Calcula la integral doble $\int\int_R f(x,y)\, dA$ de la función $f(x,y) = 1 - 6xy^2$ a lo largo de la región $R: \ -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$.

Una manera de proceder es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\int\int_R f(x,y)\, dA &= \int_0^2 \int_{-1}^1 \left(1 - 6xy^2\right)\, dxdy \\
&= \int_0^2 \left[\int_{-1}^1 \left(1 - 6xy^2\right)\, dx\right]\, dy \\
&= \int_0^2 \left[x - 3x^2y^2\right]_{x=-1}^{x=1}\, dy \\
&= \int_0^2 \left[\left(1 - 3y^2\right) - \left(-1 - 3y^2\right)\right]\, dy \\
&= \int_0^2 2\, dy = [2y]_{y=0}^{y=2} = 4.
\end{aligned}$$

Equivalentemente, puedes proceder en el orden inverso, a saber,

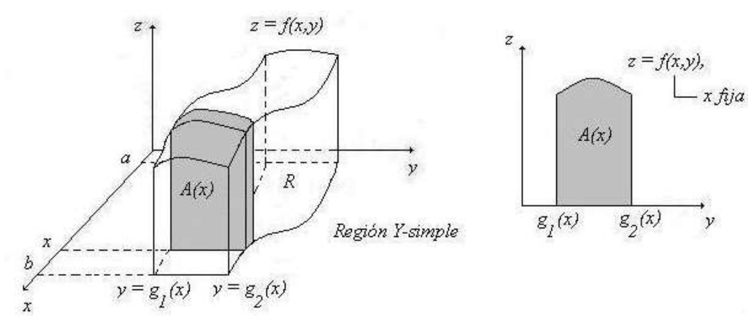
$$\begin{aligned}
\int\int_R f(x,y)\,dA &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} \left(1-6xy^2\right)\ dydx \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\int_{0}^{2} \left(1-6xy^2\right)\ dy\right]\ dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\,y-2xy^3\right]_0^2\ dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left[(2-16x)-0\right]\ dx \\
&= \int_{-1}^{1}(2-16x)\ dx \\
&= \left[2x-8x^2\right]_{x=-1}^{x=1} = 4.
\end{aligned}$$

3.2 Integrales dobles sobre regiones más generales

Una integral doble del tipo $\int_a^b\int_c^d\ f(x,y)\ dydx$ o del tipo $\int_c^d\int_a^b\ f(x,y)\ dxdy$, es decir, con límites de integración constantes, es válida sólo para regiones rectangulares $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\right\}$. En el caso de regiones R más generales, el teorema de Fubini en su versión anterior debe modificarse, como se describe a continuación.

Considera nuevamente el problema de encontrar el volumen V de un pan Bimbo, limitado arriba por una superficie no negativa $z=f(x,y)\ge 0$ y abajo por una región acotada R en el plano xy. Ahora supón que el pan viene un poco "apachurradito" de los lados, de modo que la región R de su base ya no es rectangular. Una primera opción es que los lados $x=a$ y $x=b$ del pan todavía son planitos, pero los lados correspondientes a las coordenadas y ya no son $y=c$ y $y=d$, sino más bien $y=g_1(x)$ y $y=g_2(x)$. En otras palabras, se trata de la región y-simple

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\le x\le b,\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\right\}.$$



El volumen V del pan es la suma de los volúmenes de las rebanaditas desde $x = a$ hasta $x = b$, es decir, $V = \int_{x=a}^{x=b} A(x)\,dx$, pero ahora el área $A(x)$ de la rebanadita de pan en la posición x (fija) ya no es $A(x) = \int_{y=c}^{y=d} f(x,y)\,dy$ sino más bien $A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,dy$. En otras palabras, se tiene

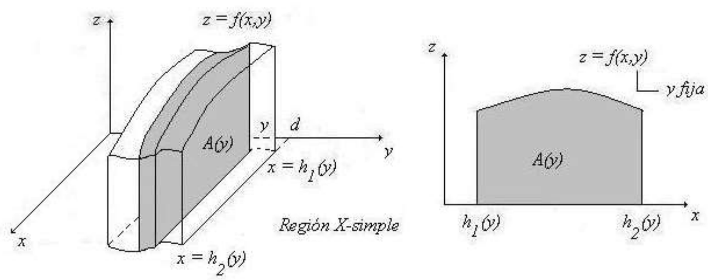
$$V = \int_{x=a}^{x=b} A(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

o simplemente,

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx.$$

Una segunda opción es que los lados $y = c$ y $y = c$ del pan son los que siguen planitos, pero los lados $x = a$ y $x = b$ están deformados de acuerdo con $x = h_1(y)$ y $x = h_2(y)$. En otras palabras, se trata de la región x-simple

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y) \right\}.$$



Con un razonamiento análogo al caso anterior, se tiene

$$V = \int_{y=c}^{y=d} A(y)\,dy = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy,$$

o simplemente,

$$V = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dxdy.$$

Estos resultados proporcionan una manera práctica de calcular la integral doble $\int\int_R f(x,y)\,dA$ a lo largo de una región no rectangular R, aun en el caso general en que la función f tome valores negativos en R. Este caso corresponde al *Teorema de Fubini (forma fuerte)*, que se enuncia a continuación.

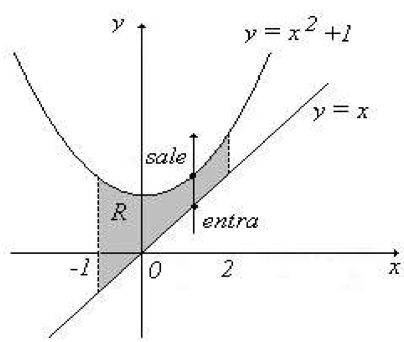
Teorema de Fubini (forma fuerte)

Sea $f(x,y)$ continua en una región acotada R del plano xy.

1. Si $R: \ a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a,b]$, entonces
$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx. \text{ (Región } y\text{-simple)}$$
2. Si $R: c \leq y \leq d, \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, con h_1 y h_2 continuas en $[c,d]$, entonces
$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dxdy. \text{ (Región } x\text{-simple)}$$

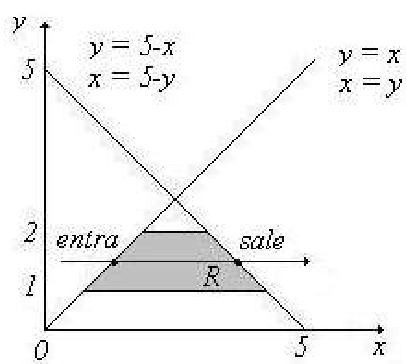
Ejemplos:

1. Evalúa la integral doble iterada de la función $f(x,y) = 2xy$ en la región R limitada por las gráficas de $y = x$, $y = x^2+1$, $x = -1$ y $x = 2$.
Esta es una región y-simple, de modo que



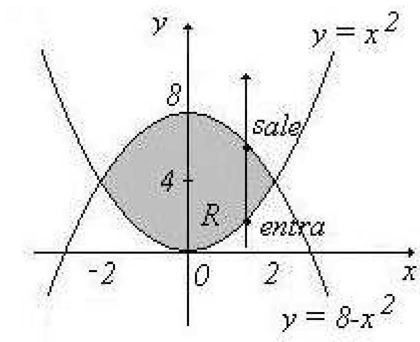
$$\begin{aligned}\int\int_R f(x,y)dA &= \int_{-1}^2 \int_x^{x^2+1} 2xy\;dydx\\ &= \int_{-1}^2 \left[xy^2\right]_{y=x}^{y=x^2+1}\;dx\\ &= \int_{-1}^2 \left[x\left(x^2+1\right)^2 - x\left(x\right)^2\right]dx\\ &= \left[\frac{1}{6}\left(x^2+1\right)^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_{x=-1}^{x=2}\\ &= \frac{63}{4}.\end{aligned}$$

2. Evalúa la integral doble iterada de la función $f(x,y) = e^{x+3y}$ en la región R limitada por las gráficas de $y = x$, $y = 5-x$, $y = 1$ y $y = 2$.
Esta es una región x-simple, de modo que



$$\begin{aligned}\int\int_R f(x,y)\,dA &= \int_1^2 \int_y^{5-y} e^{x+3y}\,dxdy\\ &= \int_1^2 \left[e^{x+3y}\right]_{x=y}^{x=5-y}\;dy\\ &= \int_1^2 \left[e^{5+2y} - e^{4y}\right]\;dy\\ &= \left[\frac{1}{2}e^{5+2y} - \frac{1}{4}e^{4y}\right]_{y=1}^{y=2}\\ &= \frac{1}{2}e^9 - \frac{1}{4}e^8 - \frac{1}{2}e^7 + \frac{1}{4}e^4.\end{aligned}$$

3. Evalúa la integral doble iterada de la función $f(x,y) = 1$ en la región finita R limitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$.
   Aunque ninguna de las gráficas que limitan la región R es recta, como en los ejemplos anteriores, aun así podemos identificar la región como una y-simple, de modo que

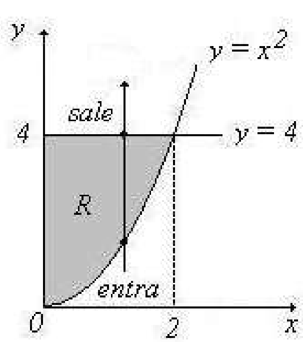


$$\int\int_R f(x,y)\, dA = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{8-x^2} 1\, dydx$$
$$= \int_{-2}^{2} [y]_{y=x^2}^{y=8-x^2}\ dx$$
$$= \int_{-2}^{2} [8 - 2x^2]\ dx$$
$$= \left[8x - \frac{2}{3}x^3\right]_{x=-2}^{x=2}$$
$$= \frac{64}{3}.$$

3.3 Cambio en el orden de integración

En algunas ocasiones puede resultar conveniente intercambiar el orden de integración en una integral iterada, en particular, cuando sea mucho más simple integrar en un orden que en el otro. En otras ocasiones, sin embargo, intercambiar el orden de integración no sólo resulta conveniente, sino necesario, como lo muestra el siguiente ejemplo.

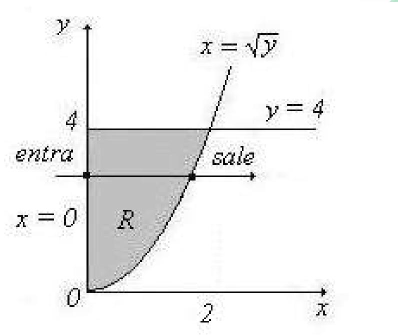
Supón que debes evaluar la integral doble iterada de la función $f(x,y) = xe^{y^2}$ en la región R del primer cuadrante limitada arriba por la gráfica de $y = 4$ y abajo por la gráfica de $y = x^2$. De acuerdo con la siguiente figura, aquí lo más natural es considerar la región R como una del tipo y-simple.



De este modo,

$$\begin{aligned}\int\int_R f(x,y)\,dA &= \int_0^2\int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dydx\\ &= \int_0^2 x\left(\int_{x^2}^4 e^{y^2}\,dy\right)\,dx = ???,\end{aligned}$$

que no es posible determinar analíticamente, ya que no existe una antiderivada simple para e^{y^2}. ¿Qué hacemos? ¿Nos sentamos a llorar? ¡Claro que no! Te propongo que intentemos calcular la integral en el orden inverso, es decir, considerando la región R como una tipo x-simple.



Así,

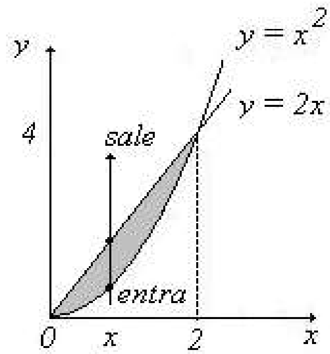
$$\begin{aligned}\int\int_R f(x,y)\,dA &= \int_0^4\int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2}\,dxdy\\ &= \int_0^4 e^{y^2}\left(\int_0^{\sqrt{y}} x\,dx\right)\,dy\\ &= \int_0^4 e^{y^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}\,dy\\ &= \frac{1}{2}\int_0^4 y\,e^{y^2}\,dy\\ &= \frac{1}{4}\left[e^{y^2}\right]_{y=0}^{y=4}\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{16}-1\right).\end{aligned}$$

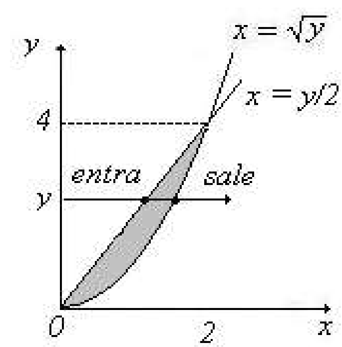
¡Y el problema ha quedado resuelto! Cabe señalar que no en todos los casos funcionará este truco, pero siempre vale la pena intentarlo. A continuación presentamos algunos otros ejemplos para practicar el cambio de orden en integrales dobles iteradas.

3.3 Cambio en el orden de integración

Ejemplos:

1. Dibuja la región de integración y cambia el orden de integración en $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dydx$.
   La figura del lado izquierdo muestra la región original, que es una y-simple, y la figura del lado derecho ilustra su interpretación como una región x-simple.

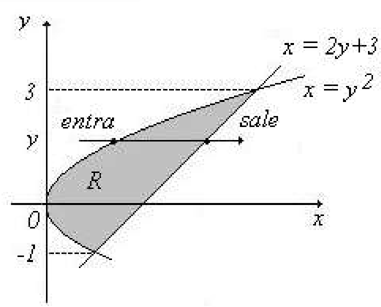




   De esta manera,

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dydx = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy.$$

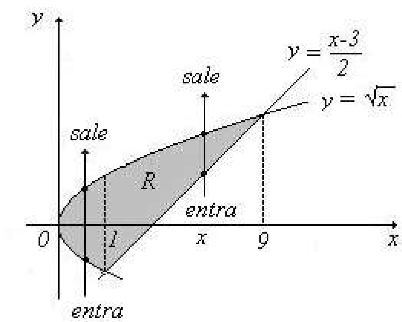
2. Dibuja la región R y escribe $\int\int_R f(x,y)\,dA$ en las dos posibles formas, si R es la región finita que está limitada por las gráficas de $x = y^2$ y $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$.
   De acuerdo con la siguiente figura, la manera más sencilla de expresar la integral doble es cuando la región R es considerada como una del tipo x-simple.



   En ese caso,

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{3} \int_{y^2}^{2y+3} f(x,y)\,dxdy.$$

   Por otra parte, si la región es considerada como una del tipo y-simple, es necesario considerar el cambio de regla de correspondencia alrededor de $x = 1$, como lo muestra la siguiente figura.



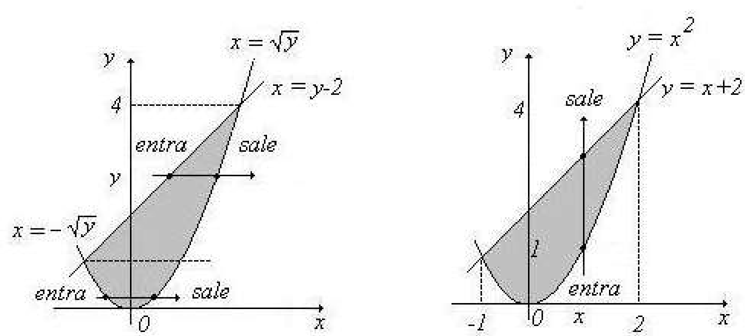
De este modo,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx + \int_1^9 \int_{\frac{x-3}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx.$$

3. Dibuja la región de integración y cambia el orden de integración en

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy.$$

La figura del lado izquierdo muestra la región x-simple original, mientras que la figura del lado derecho ilustra su interpretación como una región y-simple.



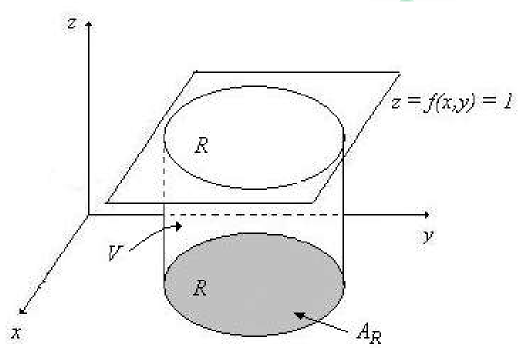
De esta manera,

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dydx.$$

3.4 Aplicaciones de la integral doble

3.4.1 Área de regiones acotadas en el plano

Una de las aplicaciones de las integrales dobles es el cálculo de áreas de regiones planas acotadas. Para calcular el área A_R de una región R en el plano xy se utiliza el truco de calcular el volumen V de la región sólida tridimensional sobre el plano xy acotada abajo por R y arriba por un plano horizontal de altura unitaria, $z = f(x, y) = 1$. Como la altura es igual a 1, el volumen y el área coinciden numéricamente, es decir, $V = A_R$.



Recurriendo nuevamente al concepto de suma de Riemann para determinar el volumen aproximado S_n de n paralelepípedos encerrados entre la gráfica de f y la región R, se tiene

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \bigtriangleup A_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \bigtriangleup A_k,$$

de modo que

$$A_R = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1 \bigtriangleup A_k = \int\int_R dA.$$

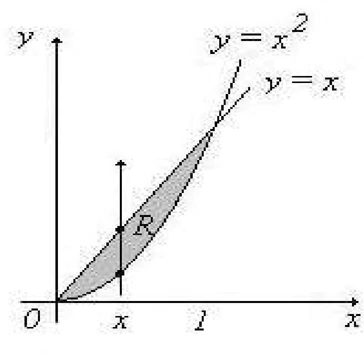
Definición. El *área* A_R de la región plana R cerrada y acotada del plano xy es la integral

$$A_R = \int\int_R dA.$$

Ejemplo:

Calcula el área A_R de la región finita R limitada por las gráficas de $y = x$ y $y = x^2$.

De acuerdo con la figura, se tiene



$$\begin{aligned} A_R &= \int \int_R \, dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^2}^x \; dydx \\ &= \int_0^1 \; [y]_{y=x^2}^{y=x} \; dx \\ &= \int_0^1 \; [x - x^2] \; dx \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Nota que el resultado $\int_0^1 \; [x - x^2] \; dx$ coincide con el obtenido en la sección 1.5 para el cálculo del área entre curvas, $\int_a^b \; |f(x) - g(x)| \; dx$.

3.4.2 Valor promedio

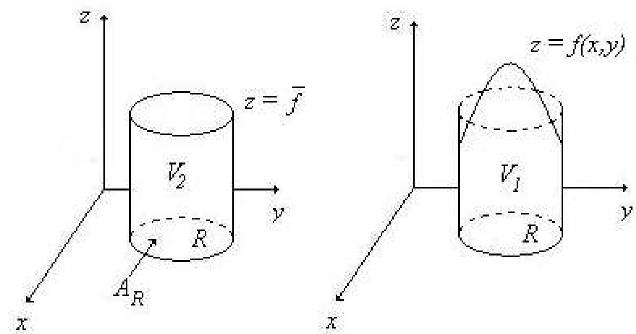
La definición del valor promedio de una función de dos variables $f(x, y)$ a lo largo de una región R en su dominio es una extensión de la definición que estudiamos previamente en la sección 1.5 para el caso de funciones de una variable.

Definición. El *valor promedio* $\overline{f}$ de una función integrable $f(x, y)$ a lo largo de una región R en su dominio es el número

$$\overline{f} = \frac{1}{A_R} \int \int_R f(x, y) \, dA,$$

donde $A_R = \int \int_R \, dA$ es el área de la región R.

Para entender su significado geométrico consideremos una función no negativa $f \geq 0$ en la región R. Nos preguntamos qué altura $\overline{f}$ debería tener una función constante $z = \overline{f}$ de tal modo que el volumen $V_2 = \bar{f} \cdot A_R$ encerrado por esta función en una región plana R sea igual al volumen $V_1 = \int \int_R \; f(x, y) \, dA$ encerrado por la función $z = f(x, y)$ a lo largo de esa misma región.



Como

$$V_2 = V_1,$$

por lo tanto,

$$\bar{f} \cdot A_R = \int\int_R f(x, y)\, dA,$$

de modo que

$$\bar{f} = \frac{1}{A_R}\int\int_R f(x, y)\, dA.$$

Por ejemplo, calculemos el valor promedio $\overline{f}$ de la función $f(x, y) = xy$ en la región finita R del ejemplo anterior. Ahí habíamos calculado que el área A_R de la región era $A_R = \int_0^1 \int_{x^2}^x \; dydx = \frac{1}{6}$. Así, de acuerdo con la definición, el valor promedio de f es

$$\begin{aligned}
\overline{f} &= \frac{1}{A_R}\int\int_R xy\, dA \\
&= \frac{1}{1/6}\int_0^1 \int_{x^2}^x xy\, dydx \\
&= 6\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x} dx \\
&= 3\int_0^1 \left[x^3 - x^5\right]\, dx \\
&= 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

3.5 Cambio de variables en integrales dobles. Coordenadas polares

El método de sustitución a menudo permite evaluar integrales complicadas transformándolas en integrales más simples. En la sección 1.4 estudiamos el caso de integrales definidas en una variable. En esta sección generalizaremos el método de sustitución para el caso de integrales dobles $\int\int_R f(x,y)dA$. En especial, veremos cómo el uso de coordenadas polares nos permite evaluar algunas integrales del tipo $\int\int_R e^{x^2+y^2}dA$, que no es posible calcular en coordenadas rectangulares.

3.5.1 Cambio de variables en una integral doble

Para el caso de una variable, el método de sustitución pretende evaluar una integral definida complicada, $\int_a^b f(x)\,dx$, introduciendo un cambio de variable $x = g(u)$. La función g es la regla de correspondencia que transforma a la variable original x en la nueva variable, $u = g^{-1}(x)$. En ese caso, el método se basa en la fórmula

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_c^d f(g(u))\,g'(u)\,du,$$

con $c = g^{-1}(a)$ y $d = g^{-1}(b)$, que es válida siempre que g tenga una derivada continua en el intervalo $[c,d]$ y f sea continua en el conjunto de valores tomados por $g(u)$ en $[c,d]$. La derivada $g'(u) = \dfrac{dx}{du}$ aparece como un factor de escala asociado con el cambio de variables de x a u.

Para el caso de dos variables, la fórmula de sustitución presenta una estructura similar, dada por

$$\int\int_R f(x,y)\,dxdy = \int\int_T f(g(u,v),h(u,v))\ |J(u,v)|\ dudv,$$

en donde T es la región del plano uv obtenida al transformar (o mapear) la región original R, y $|J(u,v)|$ juega el papel de la derivada $g'(u)$ para integrales de una variable. El factor de escala $|J(u,v)|$ es el valor absoluto del *determinante jacobiano* $J(u,v)$ asociado con el cambio de las variables x,y, a las nuevas variables $u = g(x,y), v = h(x,y)$, definido por

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Una notación alternativa para el determinante jacobiano es

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Si definimos $f(g(u,v), h(u,v)) = F(u,v)$, entonces la fórmula de sustitución para la integral doble se reduce a

$$\int\int_R f(x,y)\, dxdy = \int\int_T F(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

Ejemplo:

Calcula $\int_0^2 \int_0^{2-x} \left(\frac{y-x}{y+x}\right)^2 dydx$ usando la sustitución $u = y - x$, $v = y + x$.

A partir de la sustitución propuesta

$$u = y - x, \qquad v = y + x$$

despejamos las variables x y y, quedando

$$x = \frac{v-u}{2}, \qquad y = \frac{v+u}{2}.$$

El correspondiente determinante jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

de donde

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2}.$$

Por otra parte, sustituyendo en el integrando las expresiones para x y y, se tiene

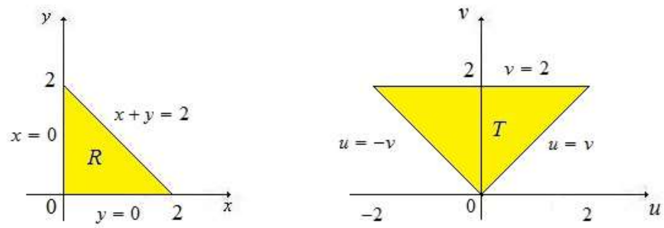
$$\left(\frac{y-x}{y+x}\right)^2 = \left(\frac{u}{v}\right)^2.$$

Por último debemos transformar la región R en el plano xy, en la región T en el plano uv. La región R está limitada por las gráficas de $x = 0, y = 0$ y $x + y = 2$.

Tomando en cuenta que $x = \dfrac{v-u}{2}, y = \dfrac{v+u}{2}$, se tiene

$$\begin{aligned} x &= 0 \implies \frac{v-u}{2} = 0 \implies u = v \\ y &= 0 \implies \frac{v+u}{2} = 0 \implies u = -v \\ x+y &= 2 \implies \frac{v-u}{2} + \frac{v+u}{2} = 2 \implies v = 2 \end{aligned}$$

Las regiones correspondientes R y T se muestran en la siguiente figura.



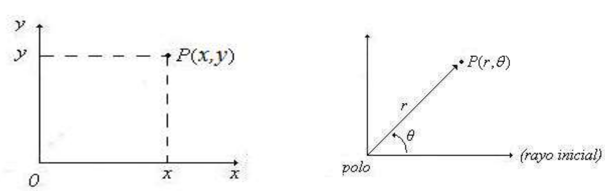
De esta manera,

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} \left(\frac{y-x}{y+x}\right)^2 dydx = \int_0^2 \int_{-v}^{v} \frac{u^2}{v^2}\,\frac{1}{2}\,dudv = \frac{2}{3}.$$

3.5.2 Integrales dobles en coordenadas polares

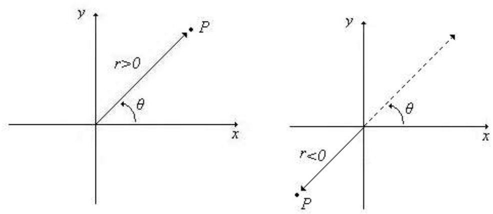
En coordenadas rectangulares, un punto P se representa en el plano xy en términos de dos cantidades, su distancia dirigida $x \in \mathbb{R}$ al eje y y su distancia dirigida $y \in \mathbb{R}$ al eje x. En ese caso, al punto lo denotamos por $P(x, y)$. Por *distancia dirigida* se entiende que si $x > 0$ el punto se localiza a la derecha del eje y, mientras que si $x < 0$ éste se localiza a su izquierda. Análogamente, si $y > 0$ el punto se localiza por encima del eje x, mientras que si $y < 0$ éste se localiza por debajo del mismo.

Las coordenadas polares constituyen una representación alternativa, en la que el punto P se representa en términos de su distancia dirigida $r \in \mathbb{R}$ al origen de coordenadas O (denominado *polo*) y el ángulo dirigido $\theta \in \mathbb{R}$ del eje x (o *rayo inicial*) al rayo OP. En este caso denotamos al punto como $P(r, \theta)$.

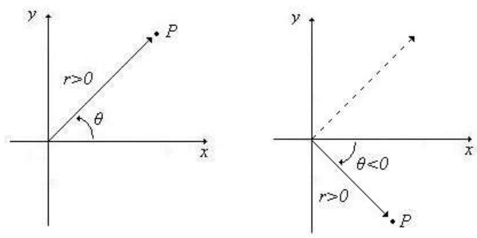


coordenadas rectangulares   coordenadas polares

Las siguientes figuras ilustran el significado de que la distancia dirigida r sea positiva, $r > 0$, o negativa, $r < 0$, para un valor dado del ángulo θ.



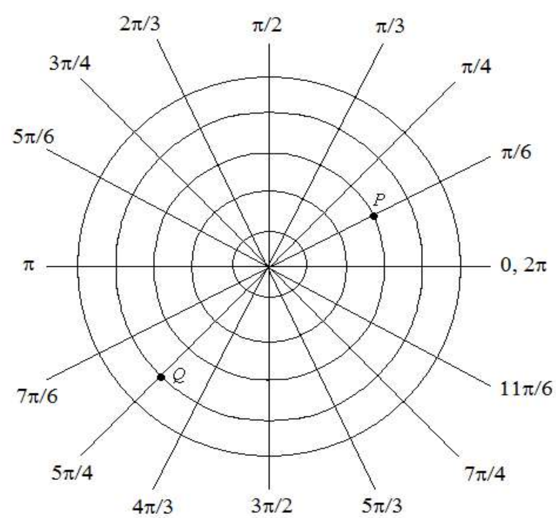
A su vez, las figuras a continuación ilustran el significado de que el ángulo dirigido sea positivo, $\theta > 0$, o negativo, $\theta < 0$, para un valor dado de la distancia r.



El hecho de que la distancia dirigida r pueda tomar tanto valores positivos como negativos, y que el ángulo θ no esté limitado a tomar valores entre 0 y 2π, hace que la representación $P(r, \theta)$ de un punto en coordenadas polares no sea única, en contraste con su representación $P(x, y)$ en coordenadas rectangulares. Por ejemplo, en el siguiente dibujo los puntos P y Q pueden representarse en cualquiera de las formas indicadas, así como en una infinidad más.

$$\begin{aligned} P(3, \frac{\pi}{6}) &= P(3, 2\pi + \tfrac{\pi}{6}) \\ &= P(-3, \tfrac{7\pi}{6}) \\ &= P(-3, -\tfrac{5\pi}{6}) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(4, \frac{5\pi}{4}) &= Q(4, \tfrac{5\pi}{4} - 8\pi) \\ &= Q(4, -\tfrac{3\pi}{4}) \\ &= Q(-4, \tfrac{\pi}{4}) \\ &= \ldots \end{aligned}$$



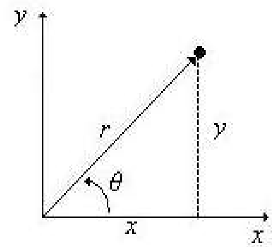
La conversión entre coordenadas polares y coordenadas rectangulares se lleva a cabo mediante las siguientes relaciones.

polares a rectangulares:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

rectangulares a polares:

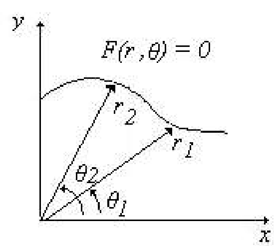
$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$



Una ecuación en coordenadas polares es una relación de la forma

$$F(r, \theta) = 0,$$

que involucra las variables polares r y θ. Su representación gráfica es una curva en el plano xy, generada por todos los puntos (r, θ) que satisfacen la relación.



Por lo general, en una ecuación polar de la forma $F(r, \theta) = 0$ suele considerarse al ángulo θ como la variable independiente y a la distancia r como la dependiente. En particular, cuando a cada valor de θ corresponde uno y sólo un valor de r decimos que la ecuación define a r como función de θ, y lo denotamos por

$$r = f(\theta).$$

La ecuación de muchas de las curvas planas que conocemos puede representarse tanto en coordenadas rectangulares como en coordenadas polares. Para pasar de una representación a la otra se utilizan las transformaciones de coordenadas ya mencionadas. Así, la ecuación cartesiana (coordenadas rectangulares) de una circunferencia de radio a y centro en el origen,

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

puede representarse en forma polar simplemente como

$$r = a.$$

Similarmente, la ecuación polar

$$r^2 \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = 1$$

corresponde en coordenadas rectangulares a la ecuación

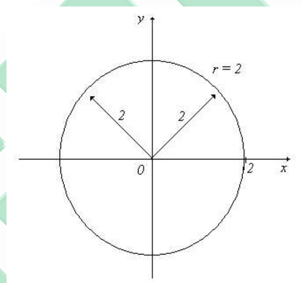
$$xy = 1.$$

Para una misma curva, una representación puede resultar más simple y concisa que otra, como lo muestran los ejemplos anteriores. También observamos que una relación que no define una función en una representación sí puede definirla en la otra. Así, en el segundo ejemplo, la relación $r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta = 1$ no define a r como función de θ (a un valor de θ le corresponden dos valores de r), pero la relación $xy = 1$ sí define a y como función de x (a cada valor de x le corresponde un único valor de y).

Ejemplos:

1. Grafica la curva con ecuación polar $r = 2$.

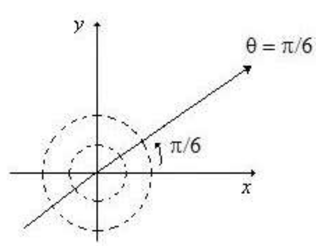
   Como ya mencionamos, esta ecuación describe una circunferencia con centro en el origen y radio 2 (θ libre).



   Observa que esta misma curva también puede describirse con la ecuación polar $r = -2$. Ambas posibilidades son compatibles con la ecuación cartesiana de esta circunferencia, a saber, $x^2 + y^2 = 4$.

2. Grafica la curva con ecuación polar $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

   Esta curva corresponde a todos los puntos del plano correspondientes a un ángulo fijo de $\dfrac{\pi}{6}$ radianes (r libre), es decir, la ecuación describe una recta a 30° que pasa por el origen.

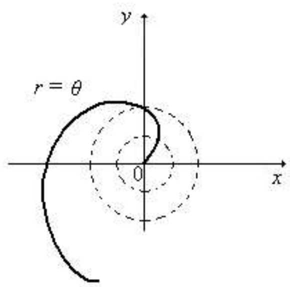


   Nota que la ecuación cartesiana de esta curva es $y = (\tan\dfrac{\pi}{6})x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

3. Grafica la curva con ecuación polar $r = \theta$, con $\theta \geq 0$.

   Esta ecuación describe una curva en la que el radio r aumenta en la misma cantidad que el ángulo θ, de modo que se trata de una espiral. Una simple tabulación nos permite esbozar su gráfica, como se muestra a continuación.

θ	$r = \theta$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
π	π
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
2π	2π

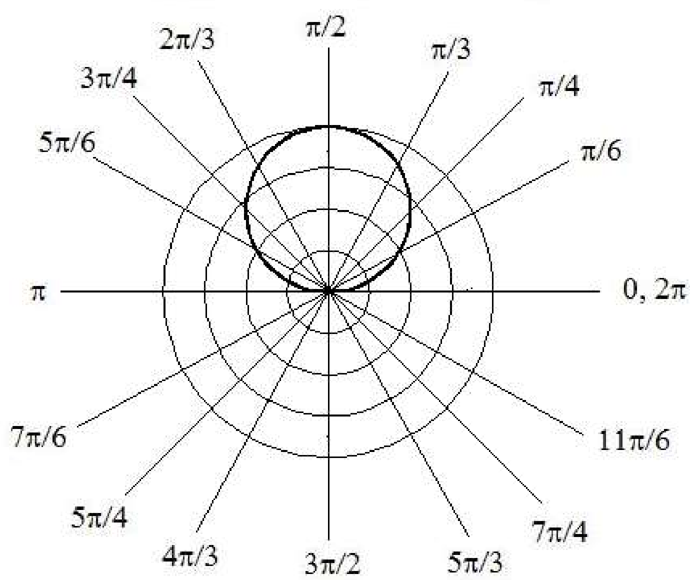


   Su ecuación cartesiana es una grosería de la forma $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, que está muy, muy feíta la pobre.

4. Grafica la curva con ecuación polar $r = 4\,\text{sen}\,\theta$.

   A partir de la tabulación trazamos la gráfica de esta ecuación, en la que descubrimos que se trata de una circunferencia con centro en $(0, 2)$ y radio 2.

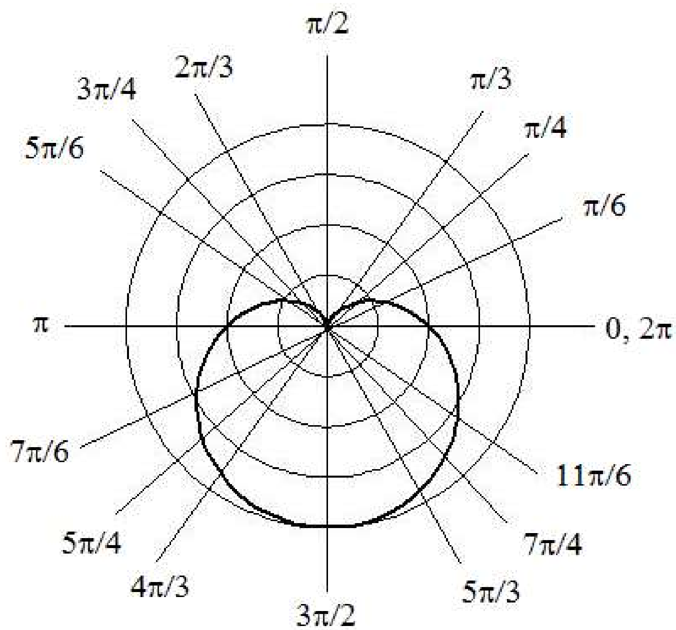
θ	$r = 4\,\text{sen}\,\theta$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$2\sqrt{2} = 2.8$
$\frac{\pi}{3}$	$2\sqrt{3} = 3.5$
$\frac{\pi}{2}$	4
$\frac{2\pi}{3}$	$2\sqrt{3} = 3.5$
$\frac{3\pi}{4}$	$2\sqrt{2} = 2.8$
$\frac{5\pi}{6}$	2
π	0
$\frac{7\pi}{6}$	-2
$\frac{5\pi}{4}$	$-2\sqrt{2} = -2.8$
$\frac{4\pi}{3}$	$-2\sqrt{3} = -3.5$
$\frac{3\pi}{2}$	-4
$\frac{5\pi}{3}$	$-2\sqrt{3} = -3.5$
$\frac{7\pi}{4}$	$-2\sqrt{2} = -2.8$
$\frac{11\pi}{6}$	-2
2π	0



   Su ecuación cartesiana es $x^2 + y^2 = 4y$, o bien, completando cuadrados para obtener su forma canónica, $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

5. Grafica la curva con ecuación polar $r = 2(1 - \operatorname{sen}\theta)$.
   A partir de la tabulación trazamos la gráfica de esta ecuación, que se trata de una cardioide.

θ	$r = 2(1 - \operatorname{sen}\theta)$
0	2
$\frac{\pi}{6}$	1
$\frac{\pi}{4}$	$2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.6$
$\frac{\pi}{3}$	$2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.3$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.3$
$\frac{3\pi}{4}$	$2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.6$
$\frac{5\pi}{6}$	1
π	2
$\frac{7\pi}{6}$	3
$\frac{5\pi}{4}$	$2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3.4$
$\frac{4\pi}{3}$	$2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3.7$
$\frac{3\pi}{2}$	4
$\frac{5\pi}{3}$	$2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3.7$
$\frac{7\pi}{4}$	$2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3.4$
$\frac{11\pi}{6}$	3
2π	2



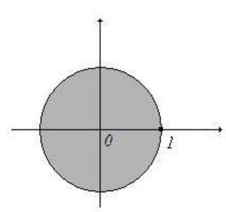
Su ecuación cartesiana es $\left(x^2 + y^2 + 2y\right)^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$.

Por último, una curva polar $F(r, \theta) = 0$ divide al plano en regiones alrededor de ella, determinadas por desigualdades del tipo

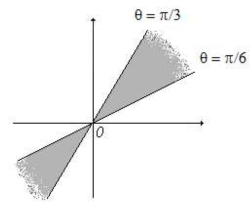
$$F(r, \theta) \geq 0 \quad \text{o} \quad F(r, \theta) > 0.$$

Ejemplos:

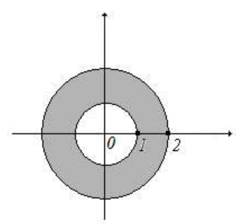
1. Dibuja la gráfica de la región en el plano definida por $0 \leq r \leq 1$.



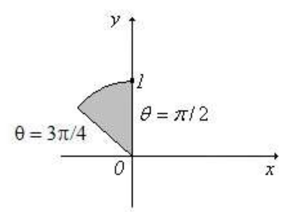
2. Dibuja la gráfica de la región en el plano definida por $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$.



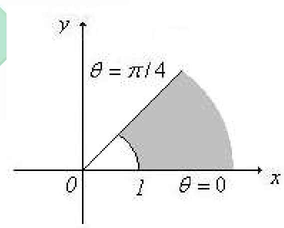
3. Dibuja la gráfica de la región en el plano definida por $1 \leq r \leq 2$.



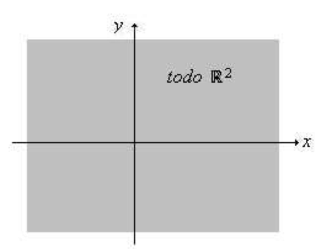
4. Dibuja la gráfica de la región en el plano definida por $0 \leq r \leq 1$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$.



5. Dibuja la gráfica de la región en el plano definida por $r \geq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.



6. Dibuja la gráfica de la región en el plano definida por $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$.



Una vez presentados los conceptos básicos sobre coordenadas polares, la idea ahora es poder transformar una integral doble de coordenadas rectangulares (x, y) a polares (r, θ). De acuerdo con los resultados de la subsección 3.5.1, la transformación debe satisfacer

$$\int\int_R f(x,y)\,dxdy = \int\int_T F(r,\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta,$$

en donde

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

En la integral del lado derecho,

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta).$$

El determinante jacobiano está dado por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Por simplicidad, a continuación supondremos que $r > 0$, de modo que

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r.$$

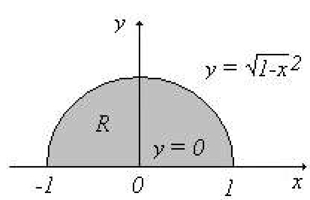
Por último, la región T de la integral del lado derecho es el resultado de transformar a coordenadas polares las curvas que delimitan la R del plano xy. Por lo general es fácil expresar la región de integración en la forma $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$, de donde concluimos

$$\int\int_R f(x,y)\,dxdy = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} F(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Ejemplos:

1. Calcula $\int\int_R \; e^{x^2+y^2}dA$, a lo largo de la región $R: \; -1 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$.

   La siguiente figura muestra la región de integración R para este caso.



En coordenadas rectangulares, el problema consiste en calcular la integral doble

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}dydx,$$

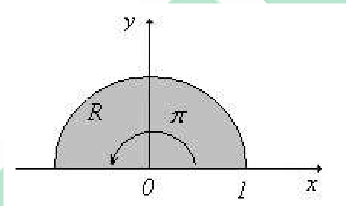
pero esto es imposible, ya que el integrando no posee una antiderivada. Por esta razón, y tomando en cuenta la simetría circular del problema, vale la pena plantear esta integral doble en coordenadas polares. Para ello, primero nota que el integrando se convierte en

$$e^{x^2+y^2} = e^{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta} = e^{r^2}.$$

Por otra parte, la región de integración R es el semicírculo $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$, que en coordenadas polares corresponde a la región

$$0\leq\theta\leq\pi,\quad 0\leq r\leq 1,$$

como se muestra en la figura.



De este modo, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}dydx &= \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} e^{r^2}r\,drd\theta \\ &= \int_{0}^{\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \frac{1}{2}(e-1)\int_{0}^{\pi} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}(e-1).\end{aligned}$$

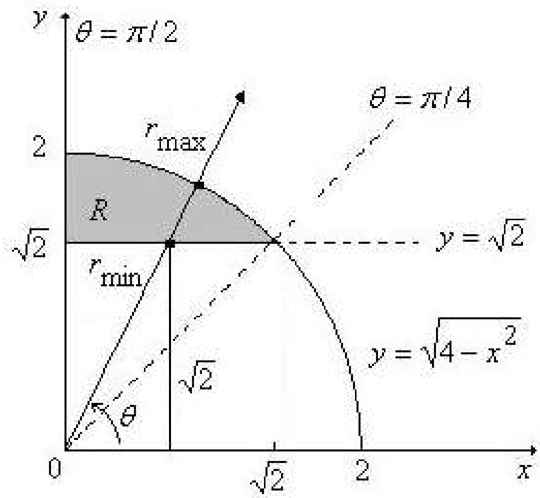
2. Calcula el área A_R de la región $R:\ 0\leq x\leq\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\leq y\leq\sqrt{4-x^2}$.

   En coordenadas rectangulares, el área A_R de la región R es la integral doble

$$A_R = \int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4-x^2}} dydx = \int_{0}^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2}\right)\,dx.$$

   A diferencia del ejemplo 1, en este caso sí existe una antiderivada de la función $\sqrt{4-x^2}$, que puedes encontrar en tablas de integración. Sin embargo, aquí evaluaremos esta integral transformándola a coordenadas polares. La región R está limitada por las gráficas de $x = 0, y = \sqrt{2}$ y $x^2 + y^2 = 4$. Tomando en cuenta que $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, se tiene

$$\begin{aligned} x &= 0 \implies r\cos\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2} \\ y &= \sqrt{2} \implies r\,\text{sen}\,\theta = \sqrt{2} \implies r = \frac{\sqrt{2}}{\text{sen}\,\theta} \\ x^2 + y^2 &= 4 \implies r = 2. \end{aligned}$$



Además, las curvas $y = \sqrt{2}$ y $x^2 + y^2 = 4$ en el primer cuadrante se intersecan en $x = y = \sqrt{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Así, R es la región definida por

$$R = \left\{ (r, \theta) \left| \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{\text{sen}\,\theta} \leq r \leq 2 \right. \right\}.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} A_R &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{\text{sen}\,\theta}}^{2} r\; dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - \frac{2}{\text{sen}^2\,\theta} \right) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \csc^2\theta \right) d\theta \\ &= \left[2\theta + \cot\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\pi - 1, \end{aligned}$$

en donde utilizamos que $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ y $\cot\frac{\pi}{4} = 1$.

3.6 Integrales dobles impropias

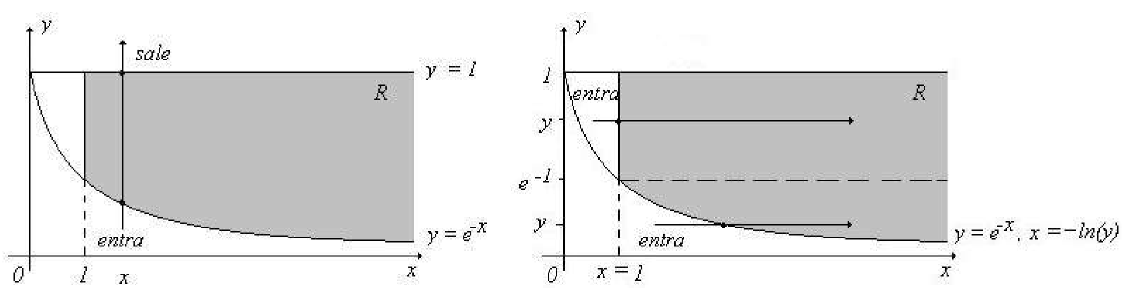
En la teoría de probabilidad hay una variedad de integrales definidas sobre regiones no acotadas en el plano, en donde uno o ambos límites de integración son de la forma $\pm\infty$, esto es, son integrales dobles impropias de dominio infinito. Las integrales correspondientes pueden plantearse ya sea en coordenadas rectangulares o bien en coordenadas polares, según la simetría del problema. Para su evaluación se procede de manera análoga al caso de las integrales simples de la sección 2.2, como se muestra a continuación.

Ejemplos:

1. Evalúa $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \dfrac{1}{x^3 y}\, dydx$.
   En este caso, se tiene simplemente

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}\, dydx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}\, dydx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^3} \left[\ln y\right]_{e^{-x}}^1 \, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^3} \left(\ln 1 - \ln e^{-x}\right) \, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^3} \left(0 - (-x)\right) \, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} + 1\right] = 1.
\end{aligned}$$

2. Intercambia el orden de integración en $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \dfrac{1}{x^3 y}\, dydx$ y evalúa la integral correspondiente.



De la figura se observa que

$$\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}\, dydx = \int_0^{e^{-1}} \int_{-\ln y}^\infty \frac{1}{x^3 y}\, dxdy + \int_{e^{-1}}^1 \int_1^\infty \frac{1}{x^3 y}\, dxdy.$$

La evaluación de estas integrales impropias la dejamos al entusiasta lector, quien de antemano sabe que el resultado de la suma es igual a 1, como en el problema anterior.

3. Evalúa $\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-(x+2y)}\, dydx$.
En este caso, se tiene simplemente

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-(x+2y)}\, dydx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \left(\lim_{c\to\infty} \int_0^c xe^{-(x+2y)}\, dy \right) dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x} \left(\lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-2y}\, dy \right) dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x} \left(\lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2y} \right]_0^c \right) dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x} \left(\lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{2e^{2c}} + \frac{1}{2} \right] \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[-xe^{-x} - e^{-x} \right]_0^b \\
&= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[\left(-\frac{b}{e^b} - \frac{1}{e^b} \right) - (0-1) \right] \\
&= \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

donde se utilizó la regla de L'Hopital en

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^b} \stackrel{L}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b} = 0.$$

4. Demuestra que el área bajo la curva normal $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es igual a 1, es decir,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = 1.$$

Con este fin, define

$$I \equiv \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} dx,$$

y el objetivo será demostrar que $I = 1$. Como se tiene una función par en el integrando, por lo tanto podemos escribir

$$I = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} dx;$$

además, como el integrando es una función positiva en $(-\infty, \infty)$, se tiene que

$$I > 0.$$

Ahora bien, como la integral definida da como resultado un número y no una función, es claro que x ahí juega el papel de una variable muda, de modo que también podríamos haber escrito I como

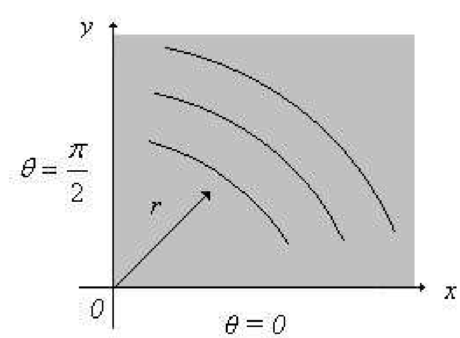
$$I = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-y^2/2\sigma^2} dy.$$

Aprovecharemos este último hecho para llevar a cabo el truco más interesante de la demostración, que consiste en convertir esta integral simple en una integral doble. Para ello, calcularemos el cuadrado I^2 como

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} dx\right)\left(2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-y^2/2\sigma^2} dy\right) \\ &= \frac{4}{2\pi\sigma^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2} dxdy, \end{aligned}$$

en donde se utilizó el hecho de que las variables x y y son independientes entre sí para escribir el producto de las dos integrales como una integral doble. Ésta es una integral impropia que, como hemos mencionado en repetidas ocasiones, no posee una antiderivada en coordenadas rectangulares. Sin embargo, de acuerdo con los resultados de la sección anterior, sí puede ser resuelta utilizando coordenadas polares. Para ello, notamos que la región de integración es todo el primer cuadrante del plano xy, de modo que su representación polar está dada simplemente por

$$I^2 = \frac{2}{\pi\sigma^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2\sigma^2}\ r\, drd\theta.$$



Ahora procedemos a calcular esta integral impropia, obteniendo

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{2}{\pi\sigma^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2\sigma^2}\, r\, dr d\theta \\ &= \frac{2}{\pi\sigma^2}\left[\theta\right]_0^{\pi/2} \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-r^2/2\sigma^2}\, r\, dr \\ &= \left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\lim_{b\to\infty}\left[-\sigma^2 e^{-r^2/2\sigma^2}\right]_0^b \\ &= -\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{b^2/2\sigma^2}}-1\right] = 1, \end{aligned}$$

Por último, como $I > 0$, por lo tanto

$$I = 1,$$

es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-x^2/2\sigma^2}dx = 1.$$

5. Sea $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1}e^{-x}\, dx$ la *función gamma*. Demuestra que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1}e^{-x}\, dx \implies \Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} x^{-1/2}e^{-x}\, dx.$$

Para resolver la integral, introducimos el siguiente cambio de variable

$$x = z^2 \implies dx = 2z\, dz.$$

De esta manera,

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty}\left(z^2\right)^{-1/2} e^{-z^2}\, 2z\, dz = 2\int_0^{\infty} e^{-z^2}\, dz.$$

Por último, procedemos de manera similar al ejemplo 4, a saber

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2)\Gamma(1/2) &= 4\int_0^{\infty} e^{-z^2}\, dz \int_0^{\infty} e^{-w^2}\, dw \\ &= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(z^2+w^2\right)}\, dz\, dw \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr d\theta \\ &= 4\left[\theta\right]_0^{\pi/2}\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-r^2}\, r\, dr \\ &= \pi\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-r^2}\right]_0^b = \pi. \end{aligned}$$

$$\therefore\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

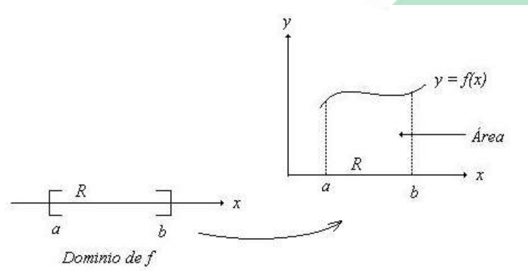
3.7 Introducción a las integrales triples

El concepto de integral también se puede extender al caso de funciones $w = f(x, y, z)$ de tres variables, como se expone brevemente a continuación.

En el caso de funciones $y = f(x)$ de una variable, la integral definida es una expresión de la forma

$$\int_R f(x)\,dL = \int_a^b f(x)\,dx,$$

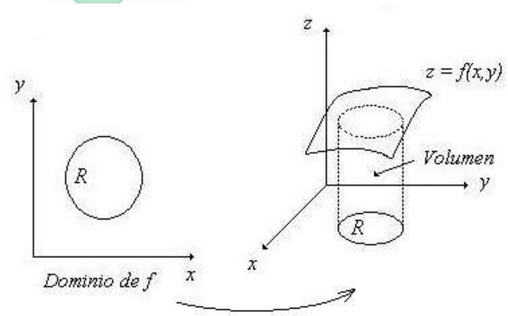
en donde la región de integración R es simplemente un intervalo $[a, b]$ en los reales y en donde $dL = dx$ es la diferencial de longitud correspondiente. En particular, si $f \geq 0$, entonces la integral definida representa el área entre la curva $y = f(x)$ y el eje x, en el intervalo $[a, b]$.



Por otra parte, en el caso de funciones $z = f(x, y)$ de dos variables, la integral definida doble es una expresión de la forma

$$\int\int_R f(x, y)\,dA,$$

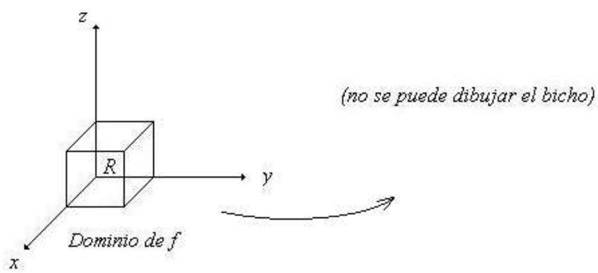
en donde la región de integración R es un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$ y en donde $dA = dxdy = dydx$ es la diferencial de área correspondiente. Si $f \geq 0$, entonces la integral doble representa el volumen encerrado por la superficie $z = f(x, y)$ y el plano xy a lo largo de la región R.



Siguiendo con este razonamiento, en el caso de funciones $w = f(x, y, z)$ de tres variables, la integral definida triple es una expresión de la forma

$$\int\int\int_R f(x, y, z)\,dV,$$

en donde la región de integración R es un subconjunto del espacio $\mathbb{R}^3$ y en donde $dV = dxdydz = dydxdz = \ldots$ es la diferencial de volumen correspondiente. Es de esperarse que si $f \geq 0$, entonces la integral triple representa el hipervolumen encerrado por la hipersuperficie $w = f(x, y, z)$ y la región R en el espacio xyz.

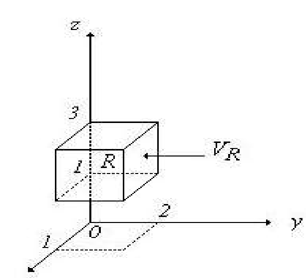


Varios de los resultados planteados a lo largo de este capítulo pueden generalizarse al caso de integrales triples (promedios, cambio de orden de integración, etc...). Su planteamiento, sin embargo, puede revestir de mayor complejidad, por lo que a continuación sólo abordaremos una aplicación muy específica, que es el cálculo de volúmenes.

En el caso de las integrales dobles, vimos el cálculo de áreas de regiones planas como una posible aplicación. La idea ahí fue determinar el área A_R de una región plana R mediante el truco de hacerlo a partir del cálculo de la integral doble $\int\int_R 1\, dA$ de la función $f(x, y) = 1$ a lo largo de R. En analogía, ahora podemos encontrar el volumen V_R de una región R en el espacio, planteando la integral triple $\int\int\int_R 1\, dV$ de la función $f(x, y, z) = 1$ a lo largo de la región espacial R, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

1. Este es un ejemplo bobo, pero bastante ilustrativo. Se trata de plantear una integral triple iterada para calcular el volumen V_R del paralelepípedo definido por la región $R:\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2,\ 1 \leq z \leq 3$.
   Como se muestra en la siguiente figura, se trata de una región con límites fijos, en la que z va de 1 a 3, mientras y va de 0 a 2 y x va de 0 a 1.



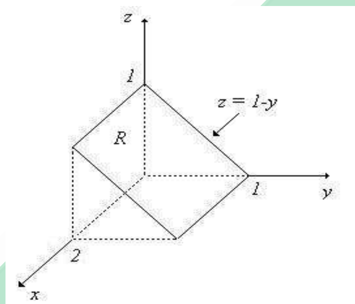
En este caso, se tiene simplemente

$$V_R = \int_0^1 \int_0^2 \int_1^3 1 \, dzdydx,$$

cuyo resultado es 4, como era de esperarse. Cabe señalar que debido a la simplicidad de la región R, la integral triple pudo haberse planteado directamente en cualquiera de las otras 5 maneras distintas, simplemente intercambiando el orden de integración, es decir,

$$V_R = \int_0^2 \int_0^1 \int_1^3 1 \, dzdxdy = \int_1^3 \int_0^2 \int_0^1 1 \, dxdydz = \ldots$$

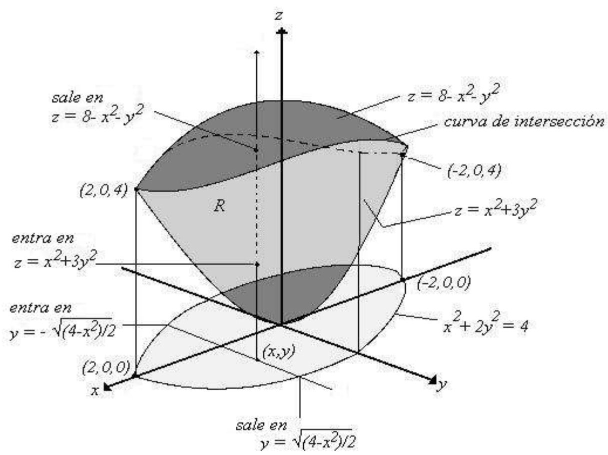
2. Plantea una integral triple iterada para calcular el volumen V_R de la región finita R del primer octante, limitada por las gráficas de los planos $x = 0$, $x = 2$, $z = 0$ y $z = 1 - y$.



De acuerdo con la figura, las seis maneras en las que se puede plantear una integral triple para calcular el volumen V_R de la región son

$$\begin{aligned}
V_R &= \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} dzdxdy \\
&= \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} dydzdx \\
&= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dydxdz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dxdydz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dxdzdy.
\end{aligned}$$

3. Plantea una integral triple iterada para calcular el volumen V_R de la región finita R contenida entre las gráficas de los paraboloides $z = x^2+3y^2$ y $z = 8-x^2-y^2$.



Del dibujo puedes observar que, mientras x va de -2 a 2, y va de la curva $y = -\sqrt{(4-x^2)/2}$ a la curva $y = \sqrt{(4-x^2)/2}$ y z va de la superficie $z = x^2+3y^2$ a la superficie $z = 8-x^2-y^2$. En ese caso, te conviene plantear la integral triple en el orden $dzdydx$, dado por

$$V_R = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dzdydx.$$

Capítulo 4
Sucesiones

4.1 Sucesiones de números reales. Criterios de convergencia

Las funciones continuas pueden no resultar útiles para describir el comportamiento de cantidades observables, que son medidas en ciertos valores específicos de la variable independiente y no de manera continua. Por ejemplo, el precio p de un bien a lo largo del tiempo t no se obtiene en la práctica como una función continua de la forma $p(t)$, sino más bien como el conjunto de valores $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_T$ correspondientes a los periodos $1, 2, 3, \ldots, T$, respectivamente. Suponiendo que puedes determinar el precio a perpetuidad, éste estaría descrito por un conjunto infinito de la forma $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Es decir, el precio estaría dado por una función discreta, tal que a cada número entero $t \geq 1$ le asigna un único número real p_t . Una función de este tipo es lo que se conoce como una *sucesión de números reales*.

Definición. Una *sucesión infinita, o sucesión,* de números reales es una función que a cada entero n mayor o igual que algún entero n_0 le asigna un único número real a_n.

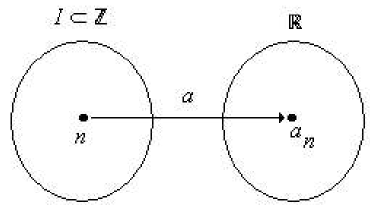
Una sucesión es una función en el sentido que ya conoces, pero los elementos de su dominio son números enteros, no reales. Esto es, una función f de variable continua es un objeto de la forma

$$\begin{aligned} f: \quad S \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

que a cada elemento x de un subconjunto S de los reales $\mathbb{R}$ le asigna un único elemento $y = f(x)$, también en $\mathbb{R}$. Si ahora suponemos que el dominio es un subconjunto $I = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ de los enteros $\mathbb{Z}$, y en lugar de f denotamos por a a la regla de correspondencia, entonces la función se denomina sucesión, y es un objeto de la forma

$$\begin{aligned} a: \quad I \subset \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n = a(n) \end{aligned}$$

que a cada elemento n del subconjunto I de enteros le asigna un único elemento $a_n = a(n)$ en los reales $\mathbb{R}$.

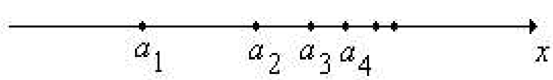


Por lo general se toma $n_0 = 1$ como primer elemento, aunque también es posible considerar algún otro valor inicial, incluyendo un entero negativo. Una vez seleccionado el primer elemento, digamos $n_0 = 1$, la sucesión a_n es el conjunto de valores

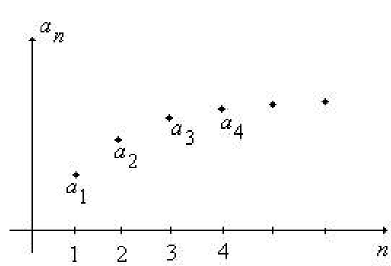
$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

obtenidos al evaluar la regla de correspondencia a_n en $n = 1, 2, 3, \ldots$. Una manera alternativa de denotar la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es $\{a_n\}$, en donde la notación $\{\ \}$ indica que se trata de un conjunto de valores construídos mediante la regla de correspondencia dada.

Gráficamente, una sucesión de números reales $\{a_n\}$ se representa mediante un conjunto de puntos en la recta real, como se muestra en la siguiente figura.



También puede resultar útil (¡aunque menos elegante!) graficar una sucesión $\{a_n\}$ como una función discreta en el plano, en donde el eje horizontal representa la variable entera n, y el eje vertical, la variable real a_n,, como se ilustra en la siguiente gráfica.



Por ejemplo, considera la sucesión

$$a_n = \frac{1}{n},$$

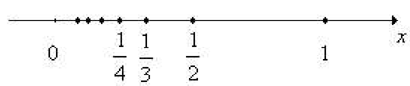
con $n \geq 1$. Esta regla de correspondencia genera los valores

$$\begin{array}{cccccc} \text{Dominio:} & 1, & 2, & 3, & 4, & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \text{Imagen:} & a_1 = 1, & a_2 = \frac{1}{2}, & a_3 = \frac{1}{3}, & a_4 = \frac{1}{4}, & \dots \end{array}$$

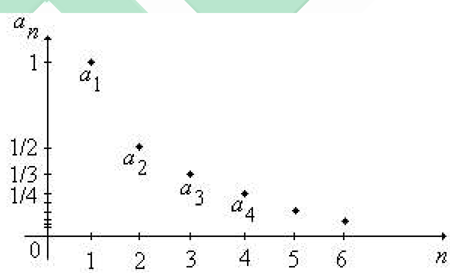
de modo que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es conjunto

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots,$$

cuyos elementos son números reales de la forma $\frac{1}{n}$, obtenidos a partir del recíproco de cada entero positivo n. En este listado se sobreentiende que el primer elemento proviene de $n = 1$, el segundo de $n = 2$, y así sucesivamente. Gráficamente, la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ se representa en la recta real como el conjunto de puntos mostrado en la siguiente figura.



Alternativamente, la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ puede representarse como una función discreta en el plano, como se muestra en la siguiente gráfica.



Este ejemplo nos permite introducir de manera intuitiva el concepto de *límite de una sucesión*. Por ejemplo, es fácil advertir que a medida que $n \to \infty$ los valores de la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ van tendiendo a 0. En este caso, decimos que la sucesión converge a 0, o tiene límite 0, y lo denotamos por

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Más generalmente, una sucesión es *convergente* si sus valores tienden a un único valor límite L a medida que $n \to \infty$, y esto se escribe como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Cuando esto ocurre, se dice que la sucesión *converge* al límite L. Si tal límite no existe, ya sea porque los valores crecen o decrecen indefinidamente, o porque no existe un único valor L, se dice que la sucesión es *divergente*. La definición formal de límite se presentará después de los siguientes ejemplos.

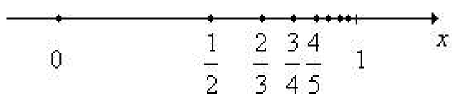
Ejemplos:

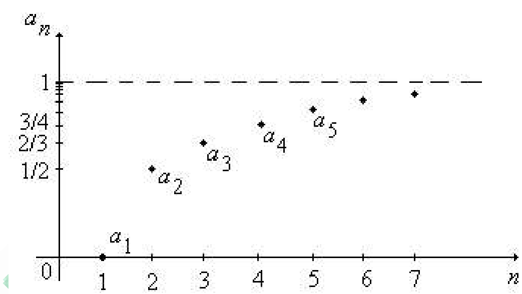
1. Identifica las siguientes sucesiones, con $n_0 = 1$.
   a. $\{2^n\}$
      Se trata de la sucesión $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$
   b. $\{2n\}$
      Se trata de la sucesión $2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$
   c. $\{2n - 1\}$
      Se trata de la sucesión $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$
   d. $\{(-1)^n (2n + 1)\}$
      Se trata de la sucesión $-3, 5, -7, 9, -11, 13, \ldots$
   e. $\left\{(-1)^{n+1} \dfrac{n}{n+1}\right\}$
      Se trata de la sucesión $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$
2. Encuentra la regla de correspondencia en las siguientes sucesiones.
   a. $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$
      La regla de correspondencia es $a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n^2}, \ n \geq 1$.
   b. $3, 3, 3, 3, 3, \ldots$
      La regla de correspondencia es $a_n = 3, \ n \geq 1$ (función constante).
   c. $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
      La regla de correspondencia es $a_n = (-1)^n, \ n \geq 1$.
   d. $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 \ldots$
      La regla de correspondencia es $a_n = \dfrac{1 - (-1)^n}{2}, \ n \geq 1$.
   e. $2, 0, 6, 0, 10, 0, 14, 0 \ldots$
      La regla de correspondencia es $a_n = [1 - (-1)^n] \ n, \ n \geq 1$.

3. Identifica las siguientes sucesiones $(n \geq 1)$. Grafícalas como puntos en la recta real y también como funciones discretas en el plano. Finalmente, determina si la sucesión es convergente o divergente.

   a. $a_n = \dfrac{n-1}{n}$

   Se trata de la sucesión $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$





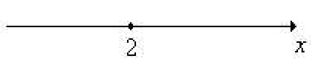
   Como

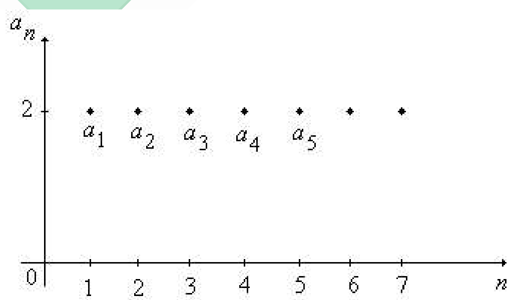
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1,$$

   por lo tanto la sucesión converge a 1.

   b. $a_n = 2$

   Se trata de la sucesión $2, 2, 2, 2, 2, \ldots$





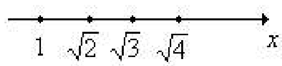
   Como

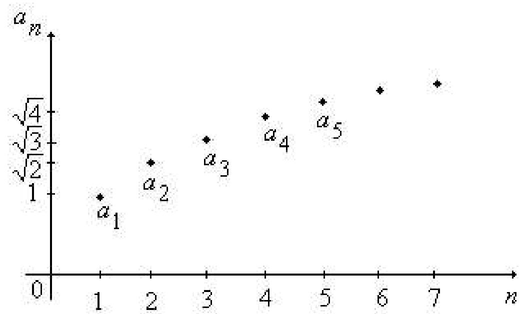
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2 = 2,$$

   por lo tanto la sucesión converge a 2.

c. $a_n = \sqrt{n}$

Se trata de la sucesión $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \ldots$





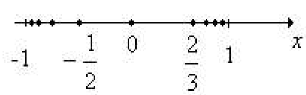
Como

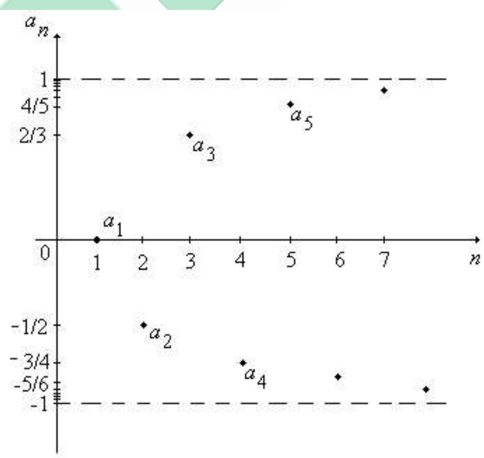
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty,$$

por lo tanto la sucesión diverge.

d. $a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$

Se trata de la sucesión $0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \ldots$





Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[(-1)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n} \right) \right]$$

no existe, ya que los valores no tienden a un único límite (van alternando hacia 1 y hacia -1), por lo tanto la sucesión diverge.

En este punto, vale la pena mencionar que existe otra representación alternativa para representar una sucesión $\{a_n\}$, dada por una *relación de recurrencia*. En esta última, en lugar de especificar la regla de correspondencia a_n, más bien se establece la relación que guardan entre sí cualesquiera dos elementos del conjunto. Por ejemplo, en lugar de definir la sucesión de potencias de 2,

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots,$$

como la regla de correspondencia $a_n = 2^n$, $n \geq 1$, podemos definirla a través de la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n, \\ a_1 &= 2. \end{aligned}$$

en la que se establece que el primer término de la sucesión, a_1, es 2 y, a partir de éste, cada término es el doble del anterior, $a_{n+1} = 2a_n$. Para encontrar la solución, se procede recurrentemente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 2a_1 = 2(2) = 2^2 \\ a_3 &= 2a_2 = 2(2^2) = 2^3 \\ \vdots &= \vdots \\ a_n &= 2a_{n-1} = 2(2^{n-1}) = 2^2 \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$a_n = 2^n, \quad n \geq 1.$$

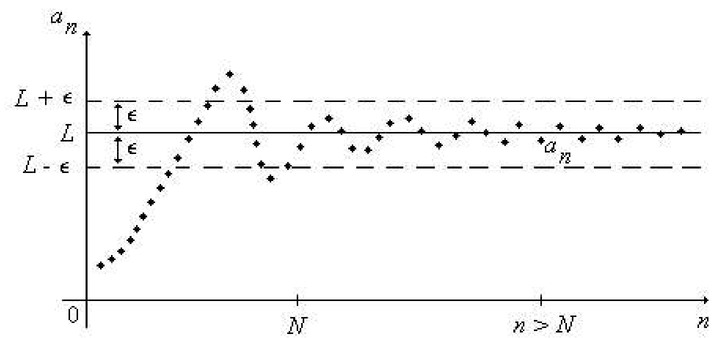
Este tipo de representación se utiliza mucho en economía y finanzas. Por ejemplo, puede obtenerse la sucesión temporal de los precios de un bien (o de un activo), relacionando el precio p_t del bien en el período t con el precio p_{t-1} que tenía en el período anterior $t - 1$.

El problema de mayor interés en el tema de sucesiones es determinar su comportamiento asintótico, $\lim_{n \to \infty} a_n$, mediante el análisis de la posible convengencia o divergencia de la sucesión a_n a medida que crece n. Desde un punto de vista formal, demostrar la existencia del límite involucra la definición que se enuncia a continuación.

Definición. Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales *converge* al número L si para todo número $\epsilon > 0$ existe un correspondiente entero $N(\epsilon)$ tal que para todo n

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon.$$

En ese caso, escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, o simplemente $a_n \to L$, y llamamos a L el *límite* de la sucesión. Cuando tal número L no existe decimos que $\{a_n\}$ *diverge.*



De acuerdo con la definición, una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite L si, a medida que n crece, la distancia $|a_n - L|$ entre a_n y el límite L se vuelve tan pequeña como se desee. Si denotamos por $\epsilon > 0$ a ese parámetro de pequeñez, entonces debe existir algún valor $n = N$ a partir del cual todos los elementos $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ quedan adentro de la franja $[L - \epsilon, L + \epsilon]$, como se muestra en la figura de arriba. Por lo general, el valor de N es función de qué tan estrecha se desee hacer esta franja, es decir, $N = N(\epsilon)$.

Ejemplos:

1. Demuestra formalmente que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) = 0.$

   Sea $\epsilon > 0$. Mostrar que la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ converge al límite $L = 0$ implica encontrar un valor $N(\epsilon)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon.$$

   Para encontrar más fácilmente $N(\epsilon)$ es útil proceder al revés, es decir, partiendo de la conclusión

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon.$$

   Como n es positivo, se tiene

$$\frac{1}{n} < \epsilon,$$

de modo que

$$n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Así, para garantizar la condición $n > N$, podemos escoger

$$N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}.$$

Por lo tanto, concluimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$, ya que para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$ tal que

$$n > \frac{1}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon.$$

2. Demuestra formalmente que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0.$

   Sea $\epsilon > 0$. Debemos encontrar un valor $N(\epsilon)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \epsilon.$$

   Para ello, partimos de

$$\left|\frac{1}{n^2}\right| < \epsilon.$$

   Como n es positivo, se tiene

$$\frac{1}{n^2} < \epsilon,$$

   de modo que

$$n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}.$$

   Así, escogemos simplemente

$$N(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}.$$

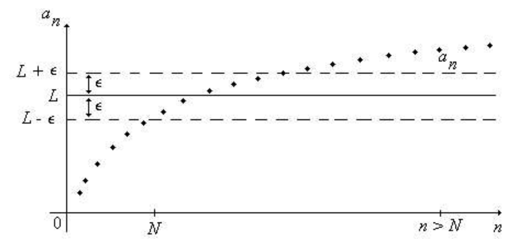
   Por lo tanto, concluimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$, ya que para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ tal que

$$n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \epsilon.$$

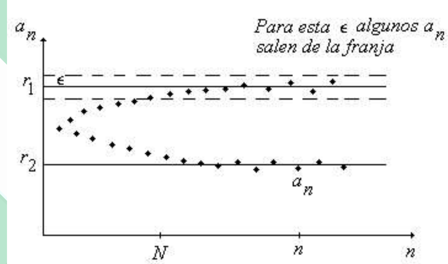
Para demostrar que una sucesión $\{a_n\}$ no posee un límite L se tiene que negar la definición

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{Z} \quad [\forall n \quad n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon],$$

mostrando que existe una $\epsilon > 0$ tal que, para cualquier valor de N, hay elementos a_n con $n > N$ que se salen de la franja $[L - \epsilon, L + \epsilon]$. Esto puede ocurrir en cualquiera de los siguientes casos. El primer caso es cuando los términos de la sucesión crecen (o decrecen) sin límite, a medida que $n \to \infty$, como se muestra en la siguiente figura.



En el segundo caso, los términos de la sucesión no crecen o decrecen indefinidamente, pero tampoco tienden un único valor a medida que $n \to \infty$. Esto se ilustra en la siguiente figura, en donde los términos de la sucesión a la larga se acumulan alrededor de dos valores diferentes, r_1 y r_2.

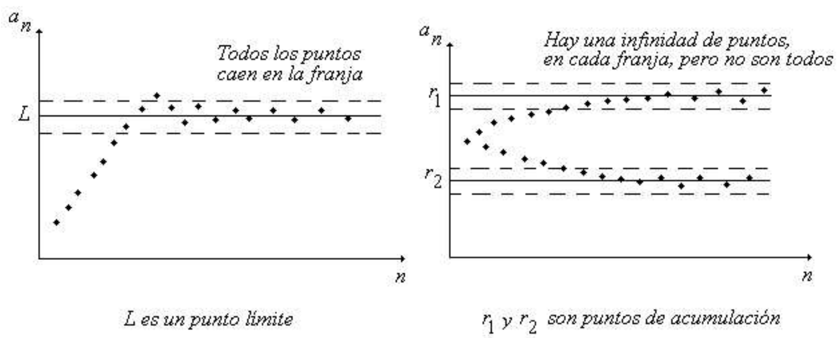


En este último caso, los valores r_1 y r_2 no se llaman puntos límite (¡un punto límite es único!) sino más bien se denominan *puntos de acumulación*.

Definición. Se dice que r es un *punto de acumulación* de una sucesión $\{a_n\}$ de números reales si para todo número $\epsilon > 0$ existe un número infinito de elementos $a_k \neq r$ de la sucesión tales que $|a_k - r| < \epsilon$.

La diferencia entre un punto límite L y un punto de acumulación r es la siguiente: para que L sea un punto límite es necesario que a partir de un cierto valor $n = N$ todos los elementos a_n, con $n > N$, estén a una distancia de L menor que ϵ, mientras que r es un punto de acumulación si existe una infinidad (¡ no todos!)

de elementos a_n, con $n > N$, a una distancia de r menor que ϵ.



Es importante señalar que no siempre que una sucesión a la larga tienda a dos o más puntos estos deben ser considerados como puntos de acumulación. Un número $r \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de $\{a_n\}$ si cada intervalo abierto que contiene a a contiene un punto en $\{a_n\}$ <u>diferente</u> de r. Así, por ejemplo, en la sucesión $a_n = (-1)^n$ los números 1 y -1 no son puntos de acumulación, ya en una vecindad pequeña alrededor de 1 no hay otros puntos de la sucesión diferentes de 1. El mismo argumento se aplica a -1.

A partir de cada sucesión $\{a_n\}$ se puede construir una *subsucesión* $\{b_n\}$. Por ejemplo, a partir de la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

podemos construir subsucesiones tales como

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots, \text{ o bien, } \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8} \ldots .$$

Teorema.

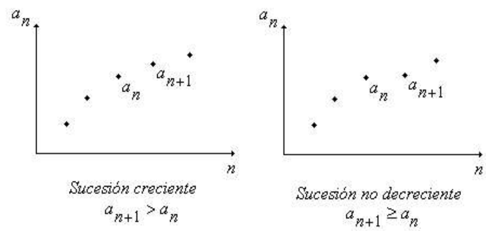
(i) Si una sucesión $\{a_n\}$ converge a un límite L, entonces cualquiera de sus subsucesiones $\{b_n\}$ converge al mismo límite L.

(ii) Si alguna de las subsucesiones $\{b_n\}$ de la sucesión $\{a_n\}$ diverge, o si dos de ellas convergen a diferentes límites L_1 y L_2, entonces $\{a_n\}$ diverge.

Por ejemplo, usando el inciso (ii) del teorema puede demostrarse que la sucesión $\{(-1)^n\}$ diverge, ya que la subsucesión $\{(-1)^m, m \text{ par}\}$ converge a 1, y la subsucesión $\{(-1)^m, m \text{ impar}\}$ converge a -1.

Para enunciar el último teorema de esta parte, es necesario introducir las siguientes definiciones.

Definición. Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales es *creciente* si para todo n se cumple que $a_n < a_{n+1}$. La sucesión es *no decreciente* si para todo n se cumple $a_n \leq a_{n+1}$.



Ejemplos:

1. La sucesión $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ es creciente, ya que como

$$n^2 - 1 < n^2$$

$$\therefore \quad (n+1)(n-1) < (n)(n)$$

$$\therefore \quad \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$$

$$\therefore \quad \frac{n-1}{n} < \frac{(n+1)-1}{(n+1)}$$

$$\therefore \quad a_n < a_{n+1}.$$

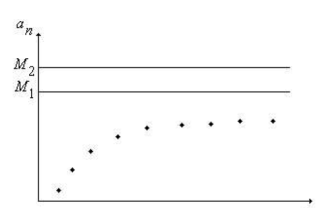
2. La sucesión $a_n = 3$ es no decreciente, ya que como

$$3 \leq 3$$

$$\therefore \; a_n \leq a_{n+1}.$$

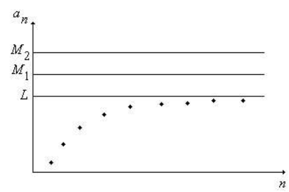
Definición. Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales está *acotada superiormente* si existe un número real M tal que para todo n se cumple que $a_n \leq M$. En ese caso, se dice que M es una *cota superior* para $\{a_n\}$.

Si una sucesión está acotada superiormente, entonces ésta posee una infinidad de cotas superiores $M_1, M_2, \ldots$



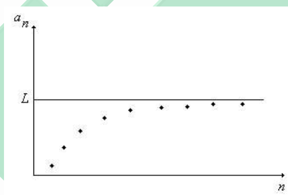
Definición. Si L es una cota superior para una sucesión $\{a_n\}$ de números reales, pero ningún otro número menor que L es una cota superior de $\{a_n\}$, entonces se dice que L es la *mínima cota superior* de $\{a_n\}$.

Debido a que $a_n \in \mathbb{R}$, y $\mathbb{R}$ es un conjunto completo, entonces cualquier sucesión $\{a_n\}$ que esté acotada superiormente posee una mínima cota superior L, que es única, y está dada por el supremo del conjunto $\{a_n\}$.



Teorema de la sucesión no decreciente. Una sucesión no decreciente $\{a_n\}$ de números reales converge si y sólo si ésta está acotada superiormente. Cuando la sucesión converge, ésta lo hace a su mínima cota superior L, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$



Este teorema es de gran importancia para analizar la convergencia de una serie de números, como discutiremos en el Capítulo 5.

Teoremas para calcular límites de sucesiones

El teorema de límites a continuación trata sobre el límite de sucesiones obtenidas a partir de operaciones algebraicas simples entre sucesiones.

Teorema. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales y $A, B, k \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, entonces

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$ Regla de la suma
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (ka_n) = kA$ Regla del múltiplo constante
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB$ Regla del producto
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{A}{B},\ B \neq 0$ Regla del cociente

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-4}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{4}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} 5 - 4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 5.\end{aligned}$$

Nota que el límite de la suma de sucesiones es la suma de los límites sólo si cada uno de esos límites existe. Lo mismo sucede con el límite del múltiplo constante, del producto y del cociente de sucesiones. En relación con esta última propiedad, debe ser claro que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-4}{n}\right) \neq \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5n-4)}{\lim\limits_{n\to\infty} n},$$

ya que tanto el límite en el numerador como en el denominador divergen. También vale la pena señalar que si una sucesión $\{ka_n\}$ converge, con $k \neq 0$, entonces $\{a_n\}$ converge, y que si $\{a_n\}$ diverge, entonces $\{ka_n\}$ diverge, para $k \neq 0$. Como consecuencia de este último resultado, si una sucesión es divergente, lo seguirá siendo aunque la dividas por un número muy grande.

El siguiente teorema puede ser útil para calcular el límite de sucesiones que están acotadas por otras sucesiones, que son más simples, y de las cuales tú ya conoces su límite.

Teorema del sandwich para sucesiones. Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones de números reales. Si $a_n \leq b_n \leq c_n$, para todo $n \geq n_0$, para algún $n_0 > 1$, y si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Ejemplos:

1. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\cos n}{n}\right) = 0.$
   Sabemos que
   $$-1 \leq \cos n \leq 1,$$
   de modo que
   $$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$
   para todo $n \geq 1$. Así
   $$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Como
$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = -\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$
por el teorema del sandwich concluimos que
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} = 0.$$

2. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n} = 0$.
   Sabemos que
$$2^n \geq n,$$
   para todo $n \geq 1$. Por lo tanto,
$$0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}.$$
   Así
$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.$$
   Como
$$\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$
   por el teorema del sandwich concluimos que
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$

3. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!} = 0$.
   Para aplicar el teorema del sandwich debemos encontrar dos sucesiones que converjan a 0 y que puedan relacionarse a la sucesión dada. Una posibilidad para ello se basa en el hecho de que, para $n \geq 4$,
$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot n = 24\cdot \underbrace{5\cdot 6\cdot \ldots \cdot n}_{(n-4)\text{ factores}}$$
   y
$$2^n = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2 = 16\cdot \underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{(n-4)\text{ factores}}.$$
   De esta manera, se tiene
$$n! > 2^n,$$
   es decir,
$$n! \geq 2^n,$$
   para todo $n \geq 4$. Por lo tanto,
$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}.$$
   Así,
$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Como
$$\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$
por el teorema del sandwich concluimos que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0.$$

Otro resultado de gran utilidad es el teorema del valor absoluto, que se enuncia a continuación, que establece que si la sucesión de los valores absolutos de una sucesión converge a 0, la sucesión original también converge a 0.

Teorema del valor absoluto para sucesiones. Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejemplo:

Demuestra que $\lim_{n\to\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{n!}\right] = 0$.

La sucesión es $a_n = (-1)^n \frac{1}{n!}$, de modo que $|a_n| = \left|(-1)^n \frac{1}{n!}\right| = \frac{1}{n!}$. Como ya demostramos en el anterior ejercicio 3,
$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0.$$
Así, por el teorema del valor absoluto,
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left\{(-1)^n \frac{1}{n!}\right\} = 0.$$

Otro teorema útil se refiere al límite de una composición de funciones, como se enuncia a continuación.

Teorema de la función continua para sucesiones. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y si $f(x)$ es una función que es continua en L y definida en todo a_n, entonces
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(L).$$

Ejemplos:

1. Demuestra que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1.$

   La sucesión $\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$ es la composición de la función continua $f(x) = \sqrt{x}$ con la sucesión $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

   y como $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en el límite 1 y está definida en toda $a_n = \dfrac{n+1}{n}$, por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \sqrt{1} = 1.$$

2. Demuestra que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1.$

   La sucesión $2^{1/n}$ es la composición de la función de variable continua $f(x) = 2^x$ con la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

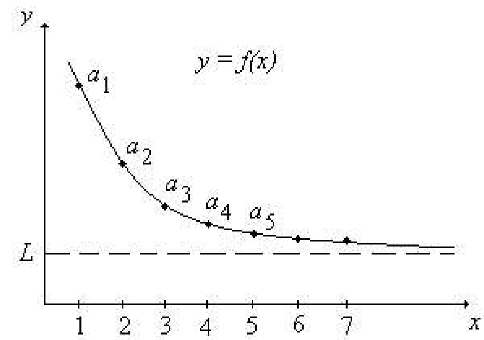
   y como $f(x) = 2^x$ es continua en el límite 0 y está definida en toda $a_n = \frac{1}{n}$, por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)} = 2^0 = 1.$$

Por último, el siguiente teorema te permite calcular el límite de una sucesión, si conoces el límite de su correspondiente función continua.

Teorema. Sea $f(x)$ una función de variable real, definida para todo $x \geq n_0$, y sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales, tal que $a_n = f(n)$, para todo $n \geq n_0$. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$



Por ejemplo, demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=1$. Para ello, primero identifica la sucesión como

$$a_n=\frac{n+1}{n},$$

para todo $n\geq 1$, de modo que su función continua correspondiente es

$$f(x)=\frac{x+1}{x}.$$

De este modo, es claro que

$$a_n=f(n)=\frac{n+1}{n}.$$

Por último, como

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1}\right)=1,$$

en donde se ha utilizado la regla de L'Hopital para calcular el límite tipo $\frac{\infty}{\infty}$ para la función continua f, por el teorema anterior concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)=1.$$

Nota que el resultado anterior pudo haberse obtenido de una manera directa, simplemente aplicando la regla de L'Hopital a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$, es decir, derivando con respecto a la variable discreta n (¡como si fuera una variable continua!). En otras palabras, el teorema anterior justifica calcular directamente el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ como

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\overset{L}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}\right)=1.$$

Ejemplos:

1. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n}{2^n}$.
   En este caso, se tiene simplemente
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{2^n} \stackrel{L}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2^n \ln 2} = 0.$$
2. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\ln(2n+1) - \ln n\right]$.
   Primeramente,
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left[\ln(2n+1) - \ln n\right] &= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)\\ &= \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right].\end{aligned}$$
   Utilizando ahora la regla de L'Hopital, se tiene
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right) \stackrel{L}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1} = 2,$$
   de modo que
$$\lim_{n\to\infty} \left[\ln(2n+1) - \ln n\right] = \ln 2.$$
3. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n$.
   Primero nota que
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} (1+2/n)^n\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\ln(1+2/n)^n}\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1+2/n)}\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(1+2/n)}{1/n}}\\ &= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(1+2/n)}{1/n}\right)}.\end{aligned}$$
   De acuerdo con la regla de L'Hopital
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(1+2/n)}{1/n}\right) \stackrel{L}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{-2/n^2}{1+2/n}}{-1/n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1+2/n}\right) = 2,$$
   de modo que
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n = e^2.$$

Límites que aparecen frecuentemente

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln n}{n}\right) = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1,$ para todo $x > 0$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0,$ para todo $|x| < 1$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x,$ para todo $x \in \mathbb{R}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0,$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Demostración:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln n}{n}\right) \overset{L}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1/n}{1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) = 0.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln n^{1/n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$

3. Sea $x > 0$. Por lo tanto,
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln x^{1/n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln x}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln x}{n}} = e^0 = 1.$

5. Sea $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,
$\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x/n)^n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln(1+x/n)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(1+x/n)}{1/n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(1+x/n)}{1/n}\right)}.$
Por regla de L'Hopital
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(1 + x/n)}{1/n}\right) \overset{L}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{-x/n^2}{1+x/n}}{-1/n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{1 + x/n}\right) = x,$$
de modo que $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x/n)^n = e^x.$

Las demostraciones de las propiedades 4 y 6 pueden consultarse en la bibliografía del curso. Aquí las omitimos por ser bastante más elaboradas.

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{7}\right)^n = 0,$ en donde se utilizó la propiedad 4, con $x = -1/7$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{35^n}{n!} = 0$, en donde se utilizó la propiedad 6, con $x = 35$.

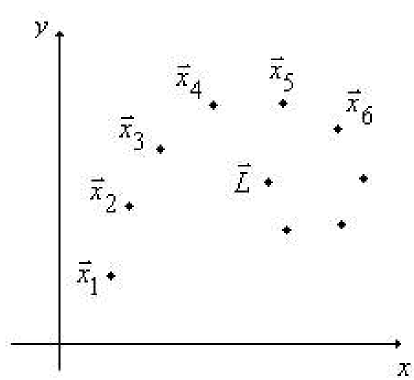
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) = (1)(1) = 1$, en donde se utilizó la propiedad 2.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-3}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^n = e^{-3}$, en donde se utilizó la propiedad 5, con $x = -3$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln\sqrt{n}}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln n^{1/2}}{n}\right) = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln n}{n}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)(0) = 0$, en donde se utilizó la propiedad 1.
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{5}\,\sqrt[n]{n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5}\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) = (1)(1) = 1$, en donde se utilizaron las propiedades 2 y 3 ($x = 5$).

4.2 Sucesiones de vectores

El concepto de sucesión de números reales, $a_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, puede extenderse para una sucesión de vectores, $\overrightarrow{x}_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$, que a cada entero n le asigna un único vector $\overrightarrow{x}_n$ en $\mathbb{R}^m$, como se discute a continuación.

Definición. Una *sucesión de vectores* en $\mathbb{R}^m$ es una función que a cada entero n mayor o igual a algún entero n_0 le asigna un único vector $\overrightarrow{x}_n$ en $\mathbb{R}^m$.

Así como una sucesión de números reales $\{a_n\}$ se representa geométricamente por una colección de puntos en la recta real (eje x), una sucesión de vectores $\{\overrightarrow{x}_n\}$ se representa por una colección de puntos en el espacio $\mathbb{R}^m$. La siguiente figura muestra una sucesión de vectores en el plano $\mathbb{R}^2$.



Nota que cuando una sucesión $\{\overrightarrow{x}_n\}$ en $\mathbb{R}^m$ converge, ésta no converge a un número real L, sino a un vector $\overrightarrow{L}$ en $\mathbb{R}^m$.

Definición. Una sucesión de vectores $\{\overrightarrow{x}_n\}$ *converge* al vector $\overrightarrow{L}$ si para todo número $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que para todo n

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{x}_n - \overrightarrow{L}\right\| < \epsilon.$$

En ese caso, escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} \overrightarrow{x}_n = \overrightarrow{L}$, o simplemente $\overrightarrow{x}_n \to \overrightarrow{L}$, y llamamos a $\overrightarrow{L}$ el *límite* de la sucesión. Cuando tal vector $\overrightarrow{L}$ no existe decimos que $\{\overrightarrow{x}_n\}$ *diverge*.

La definición anterior generaliza la definición de convergencia de sucesiones de reales, en donde se ha reemplazado el valor absoluto $|a_n - L|$ por la norma $\left\|\overrightarrow{x}_n - \overrightarrow{L}\right\|$. El siguiente teorema permite determinar la convergencia de una sucesión de vectores de una manera simple.

Teorema. Una sucesión de vectores $\{\overrightarrow{x}_n\}$ en $\mathbb{R}^m$ converge si y sólo si todas las m sucesiones de sus componentes convergen en $\mathbb{R}$.

Ejemplo:

Identifica la sucesión $\{\overrightarrow{x}_n\}$ en $\mathbb{R}^2$, dada por $\overrightarrow{x}_n = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$. Analiza su convergencia e ilustra con una gráfica.

En este caso, la sucesión es el conjunto de puntos

$$\left\{(2,1), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \ldots\right\}.$$

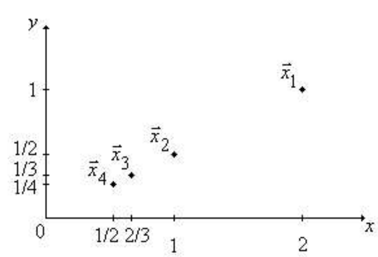
Como

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right) = 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

de acuerdo con el teorema anterior, se tiene,

$$\lim_{n\to\infty} \overrightarrow{x}_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0,0),$$

de modo que la sucesión converge al límite $\overrightarrow{L} = (0,0)$.



Definición. El vector $\overrightarrow{r}$ es un *punto de acumulación* de la sucesión de vectores $\{\overrightarrow{x}_n\}$ si para cada número $\epsilon > 0$ existe una infinidad de enteros n tales que $\|\overrightarrow{x}_n - \overrightarrow{r}\| < \epsilon$.

Ejemplo:

La sucesión $\{\overrightarrow{x}_n\}$ en $\mathbb{R}^2$, dada por $\overrightarrow{x}_n = \left((-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right), 1\right)$, $n \geq 1$, no posee un punto límite, pero sí presenta dos puntos de acumulación, $\overrightarrow{r}_1 = (1, 1)$ y $\overrightarrow{r}_1 = (-1, 1)$.

Para concluir, vale la pena mencionar que las sucesiones de vectores satisfacen muchas de las propiedades que conocemos para el caso de sucesiones de reales, tales como el límite de una suma de sucesiones vectoriales de la forma $\{\overrightarrow{x}_n + \overrightarrow{y}_n\}$, el límite del múltiplo constante $\{c\overrightarrow{x}_n\}$, etc, que aquí omitiremos por razones de tiempo.

4.3 Sucesiones de funciones

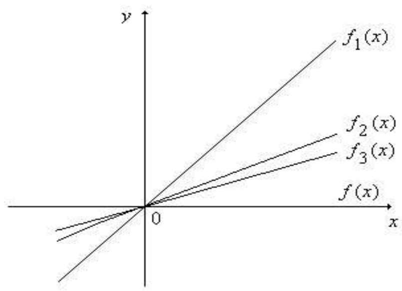
El concepto de sucesión de números reales, $a_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ también puede extenderse para una sucesión de funciones, $f_n : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada entero n le asigna una única función de x, $f_n(x)$, como se discute brevemente a continuación.

Definición. Sea $S \subset \mathbb{R}$. Se dice que $\{f_n\}$ es una *sucesión de funciones* si para cada entero n mayor o igual a algún entero n_0 existe la función $f_n : S \to \mathbb{R}$.

Es claro que para cada $x \in S$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ genera una correspondiente sucesión de números reales, obtenida al evaluar cada función f_n en el punto x. Para algunos valores de x la sucesión puede converger, y para otros puede divergir. Para cada número x para el que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge, existe un número real determinado de manera única, que denotamos por $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. En general, el valor de este límite, cuando existe, dependerá de la elección del punto x, de modo que el límite $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ es una función $f(x)$, cuyo dominio consta de todos los números $x \in S$ para los que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge. Si denotamos por $S_0 \subset S$ al conjunto de valores x para los cuales converge la sucesión $\{f_n\}$, decimos que la sucesión $\{f_n\}$ *converge puntualmente* en S_0.

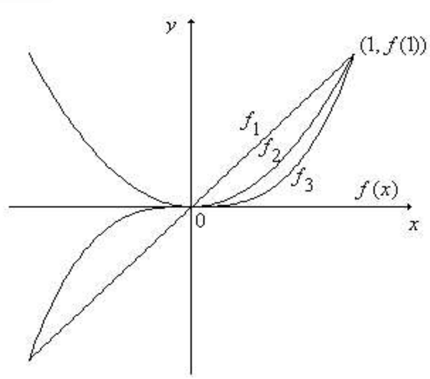
Ejemplos:

1. Considera la sucesión $\{f_n(x)\}$, $n \geq 1$, en donde $f_n(x) = x/n$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De esta manera, la sucesión es el conjunto de funciones
$$\left\{\frac{x}{1}, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \ldots\right\},$$
como se ilustra en la siguiente gráfica.



Para esta sucesión, es claro que
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{n}\right) = x \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = x \cdot 0 = 0,$$
para todo $x \in \mathbb{R}$. De esta manera, la sucesión $\{x/n\}$ converge a la función
$$f(x) = 0,$$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Considera la sucesión $\{f_n(x)\}$, en donde $f_n(x) = x^n$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De esta manera, la sucesión es el conjunto de funciones
$$\{x^1, x^2, x^3, \ldots\},$$
como se ilustra en la siguiente gráfica.



Si $x = 1$, la sucesión $\{f_n(1)\} = \{1\}$ converge a 1. Por otra parte, si $x = -1$, la sucesión $\{f_n(-1)\} = \{(-1)^n\}$ diverge, ya que oscila entre 1 y -1. Para

$x \neq \pm 1$ sabemos que $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ para $|x| < 1$, mientras que $\lim_{n\to\infty} x^n$ diverge para $|x| > 1$; en consecuencia, si $|x| < 1$, la sucesión $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ converge a la función $f(x) = 0$, y si $|x| > 1$, la sucesión diverge. En otras palabras,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

para todo $x \in (-1, 1]$. De esta manera, la sucesión $\{x^n\}$ converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

en $S_0 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 < x \leq 1\}$.

De la definición de convergencia puntual se sigue el siguiente teorema.

Teorema. Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones $f_n : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge a una función $f : S_0 \subset S \to \mathbb{R}$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ y toda $x \in S_0$ existe un número natural $K(\epsilon, x)$ tal que si $n \geq K(\epsilon, x)$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

En los dos ejemplos anteriores, es posible demostrar que el número $K(\epsilon, x)$ depende tanto del valor de $\epsilon > 0$ como de $x \in S_0$. Esto último se debe a que, por lo general, la convergencia de la sucesión puede ser más rápida en unos puntos que en otros. Sin embargo, existen ejemplos en donde la desigualdad $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ se cumple para todos los valores $x \in \mathbb{R}$, de modo que K es función de ϵ solamente. Para estos casos, se dice que la sucesión converge uniformemente.

Definición. Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones $f_n : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente* a una función $f : S_0 \subset S \to \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural $K(\epsilon)$ (que depende de ϵ pero no de x) tal que si $n \geq K(\epsilon)$ y $x \in S_0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Ejemplo:

Considera la sucesión $\{f_n(x)\}$, en donde $f_n(x) = \frac{sen(nx+n)}{n}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Claramente, esta sucesión converge a la función $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $|sen\, y| \leq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$, por lo tanto

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{sen(nx+n)}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n},$$

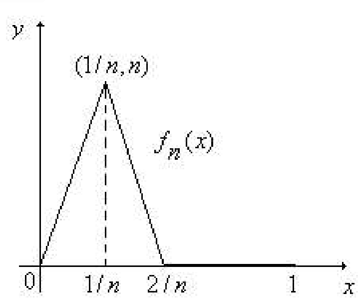
para todo $x \in \mathbb{R}$. De esta manera, dada cualquier $\epsilon > 0$, al elegir n lo suficientemente grande se puede hacer $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todos los valores de x simultáneamente. En otras palabras, se puede escoger un númeto natural $K(\epsilon)$ que no depende de x, por lo que la función converge uniformemente.

Una consecuencia inmediata de las definiciones anteriores es que si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en S_0 también converge puntualmente en S_0, pero no viceversa. El hecho de que una sucesión de funciones converja uniformemente tiene implicaciones bastante atractivas, como se discute a continuación.

Con frecuencia es conveniente saber si el límite de una sucesión de funciones es una función continua, una función derivable o una función integrable. Desafortunadamente, no siempre ocurre que el límite de una sucesión de funciones tenga estas propiedades.

Ejemplos:

1. Considera la sucesión de funciones $\{x^n\}$ del ejemplo 2 anterior, en donde cada función $f_n(x) = x^n$ es continua y derivable para todo $x \in \mathbb{R}$. Como vimos, esta sucesión converge a la función
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \end{cases} .$$
Sin embargo, esta última no es una función continua en $x = 1$ y, por tanto, tampoco es derivable en ese punto.
2. Considera la sucesión $\{f_n(x)\}$, en donde cada función f_n está dada por
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ -n^2(x - 2/n), & \text{si } 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0, & \text{si } 2/n \leq x \leq 1, \end{cases}$$
como se ilustra en la siguiente gráfica.



Es evidente que todas las funciones f_n son continuas en $[0, 1]$ y, por tanto, son integrables. De hecho, es fácil mostrar que
$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = 1, \quad \text{para } n \geq 2.$$

También es posible demostrar que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, de modo que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge a la función $f(x) = 0$. Como esta última es continua, por lo tanto es integrable, con

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Llegamos entonces a la terrible conclusión de que

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx = 0 \neq \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right) = 1.$$

Estos dos ejemplos muestran que, en general, el límite de una sucesión de funciones continuas, derivables o integrables no es una función continua, derivable o integrable. En ambos casos se consideró sucesiones que convergen puntualmente, pero no uniformemente, y ésa es precisamente la causa de la dificultad. De hecho, es posible demostrar que la convergencia uniforme de una sucesión de funciones es una condición suficiente para garantizar que la función a la que converge preserve sus propiedades de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad. De ahí la importancia de la convergencia uniforme, en relación con las sucesiones de funciones.

Capítulo 5

Series

5.1 Series. Serie geométrica

En muchas ocasiones es importante determinar el valor de la suma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ de los elementos de una sucesión de números reales $a_1, a_2, a_{3,} \ldots$.Una suma infinita de este tipo se conoce como *serie*. En este capítulo estudiaremos las propiedades de estas sumas infinitas, así como las condiciones bajo las cuales la suma converge o diverge. Haremos énfasis en el tipo de series conocida como la *serie geométrica*, que aparece en una gran variedad de aplicaciones.

Definición. Dada una sucesión $\{a_n\}$ de números, una *serie infinita*, o *serie*, es una expresión de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots .$$

El número a_k se denomina el *k-ésimo término* de la serie.

Ejemplos:

1. A partir de la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ se construye la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots .$$

2. A partir de la sucesión $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ se construye la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots .$$

3. A partir de la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ se construye la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots .$$

4. A partir de la sucesión $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$ se construye la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \cdots .$$

5. A partir de la sucesión $1, 2, 9, 64, 625, \ldots$ se construye la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} = 1 + 2 + 9 + 64 + 625 + \cdots .$$

Sumar una infinidad de términos no necesariamente implica que la suma sea infinita. Se puede demostrar que las series en los ejemplos 3 y 4 convergen a un valor finito, mientras que las de los ejemplos 1, 2 y 5 divergen. Aunque el problema de establecer la convergencia o divergencia de una serie puede resultar bastante complejo en general, en esta sección y en la siguiente presentaremos algunos criterios al respecto. El primer criterio que estudiaremos se basa en la convergencia de las *sumas parciales* de una serie, como se define a continuación.

Definición. La *sucesión de sumas parciales* de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es la sucesión $\{S_k\}$ definida por

$$S_1 = \sum_{n=1}^{1} a_n = a_1, S_2 = \sum_{n=1}^{2} a_n = a_1 + a_2, \ldots, S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k.$$

Si la sucesión $\{S_k\}$ converge a un límite L, decimos que la serie *converge* y su suma es L. En ese caso escribimos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = L$. Si la sucesión $\{S_k\}$ no converge a un límite, decimos que la serie *diverge*.

De esta manera, si la sucesión $\{S_k\}$ converge a un límite L, entonces éste será precisamente el valor de la serie. Dicho de otra forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} a_n,$$

lo que es completamente análogo al procedimiento utilizado para establecer la convergencia de la integral impropia, a saber,

$$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx.$$

Por ejemplo, considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots .$$

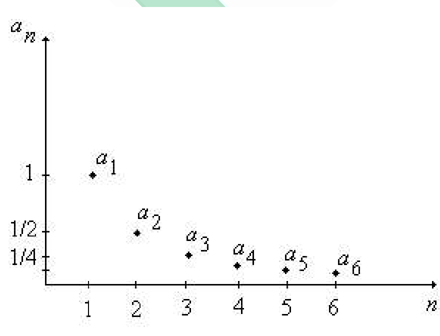
La sucesión de sus sumas parciales $\{S_k\}$ es

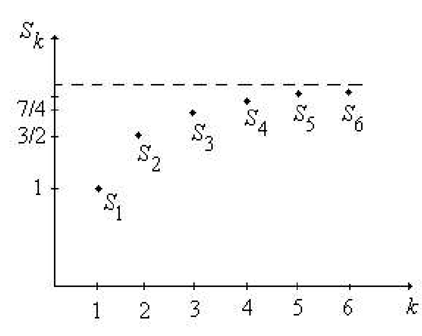
$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}},$$

es decir,

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \cdots .$$

La gráfica de la izquierda muestra los términos $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. La gráfica de la derecha muestra la sucesión de sumas parciales $\{S_k\}$.





Para saber si la serie converge a algún valor o diverge, observamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \lim_{k\to\infty} S_k.$$

Para calcular el límite $k \to \infty$ de S_k, observamos que

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 && = 2 - 1 \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2} && = 2 - \frac{1}{2} \\ S_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} && = 2 - \frac{1}{4}, \\ \vdots &= \vdots \\ S_k &= 2 - \frac{1}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) = 2.$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \lim_{k\to\infty} S_k = 2.$$

De esta manera, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ converge a 2.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ anterior es un ejemplo de la llamada *serie geométrica*, que reviste de gran interés por la gran variedad de fenómenos que describen en la ciencia en general.

Definición. Una *serie geométrica* es una suma infinita de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots,$$

en donde $r \in \mathbb{R}$ se conoce como la *razón* de la serie.

Teorema. Si r es un número real tal que $|r| < 1$, entonces la serie geométrica generada por r converge a

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}.$$

Si $|r| \geq 1$, entonces la serie diverge.

Demostración:

Por simplicidad, denotaremos por S el valor de la serie geométrica,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots ,$$

con $r \in \mathbb{R}$. Esta serie diverge para $r = 1$, ya que la suma $S = 1+1+1+1+\cdots$ es infinita. También la serie diverge para $r = -1$, ya que la suma $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ oscila entre 0 y 1, es decir, no converge a un único valor. Así, a continuación consideraremos solamente los casos con $|r| \neq 1$.

Para encontrar el valor de S, primero escribimos su suma parcial S_k,

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{k-2} + r^{k-1},$$

y notamos que se trata de la suma geométrica definida en la sección 1.2,

$$S_k = \frac{1 - r^k}{1 - r}.$$

Así, la serie geométrica S es el límite

$$S = \lim_{k \to \infty} S_k = \frac{1}{1 - r} \left(1 - \lim_{k \to \infty} r^k \right).$$

De acuerdo con la propiedad 4 de la sección 4.1 para límites frecuentes de sucesiones, el límite $\lim\limits_{k \to \infty} r^k$ existe y converge a 0 sólo si $|r| < 1$, es decir,

$$S = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - r}, & \text{si } |r| < 1 \\ \text{diverge}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Concluimos entonces que si $|r| < 1$ la serie geométrica generada por r converge a

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1 - r}.$$

Si $|r| \geq 1$, la serie diverge.

Nota la diferencia entre la suma geométrica, y la serie geométrica, dadas por

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} r^{n-1} &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{k-1} = \frac{1 - r^k}{1 - r}, \qquad r \neq 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1 - r}, \qquad |r| < 1. \end{aligned}$$

La primera se trata de una suma finita (la suma se trunca en el k-ésimo término), mientras que la segunda es una suma infinita o serie. Ambos tipos de expresiones aparecen frecuentemente en economía, dependiendo si se trata de un proceso que transcurre en un tiempo finito, o si éste se lleva a cabo a perpetuidad.

Ejemplos:

1. En cada inciso se presenta una serie geométrica o una serie relacionada con ésta. Determina si la serie converge o no. Si converge, encuentra la suma.

   a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$

   Reescribimos la serie como

   $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

   de modo que $r=\frac{1}{2}$. Como $|r|<1$, la serie converge, y su suma es

   $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=2.$$

   b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots$

   Reescribimos la serie como

   $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

   de modo que $r=-\frac{1}{2}$. Como $|r|<1$, la serie converge, y su suma es

   $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}.$$

   c) $-1+3-9+27-81+\cdots$

   Reescribimos la serie como

   $$-\left(1-3+3^2-3^3+\cdots\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,3^{n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1},$$

   de modo que $r=-3$. Como $|r|>1$, la serie diverge.

   d) $1-3+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{16}+\cdots$

   Reescribimos la serie como

   $$1-3\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots\right)=1-3\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

de modo que $r = -\dfrac{1}{2}$. Como $|r| < 1$, la serie converge, y su suma es

$$1-3+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{16}+\cdots = 1-3\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1-3\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) \; = -1.$$

e) $1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \cdots, \; a \in (-1, 1)$

Reescribimos la serie como

$$1 + a^2 + (a^2)^2 + (a^2)^3 + (a^2)^4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (a^2)^{n-1},$$

de modo que $r = a^2$. Como $|a| < 1$ la serie converge, y su suma es

$$1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (a^2)^{n-1} = \frac{1}{1-a^2}.$$

f) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$

Reescribimos la serie como

$$1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^{n-1},$$

de modo que $r = 2x$. La serie converge sólo si $|x| < \dfrac{1}{2}$, y su suma es

$$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^{n-1} = \frac{1}{1-2x}.$$

Si $|x| \geq \dfrac{1}{2}$, entonces la serie diverge.

2. Demuestra que $0.99999\ldots = 1$.

El número $0.99999\ldots$ es racional, ya que es un decimal periódico. Lo reescribimos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 0{,}99999\ldots &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots \\ &= \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{9}{10}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = 1. \end{aligned}$$

Nota que la igualdad $0.99999\ldots = 1$ es válida sólo si se mantiene una infinidad de 9's en el decimal. De lo contrario, el resultado es estrictamente menor que 1.

3. Calcula el valor de $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Observa que el índice de la suma no comienza en $n=1$, por lo que no puedes utilizar directamente la fórmula de la serie geométrica. Esta suma puede calcularse con diferentes métodos, como se muestra a continuación.

a. Un método sencillo consiste en escribir explícitamente los términos de la suma y luego usar una factorización:

$$\begin{aligned}\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{5}+\left(\frac{1}{2}\right)^{6}+\cdots\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\cdots\right]\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right]=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

b. Otro método se basa en sumar los términos que le faltan a la suma para que la serie geométrica aparezca en el formato original, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= \left(\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)-\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &= \left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right]-\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]=2-\frac{7}{4}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

c. Un tercer método consiste en efectuar el cambio de índices $l=n-3$ de tal modo que la nueva suma comience en 1 :

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+3)-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right]=\frac{1}{4}.$$

4. Una empresa que renta maquinaria adquirirá una cierta máquina al precio P, por la que recibirá rentas futuras $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_T$, correspondientes a los periodos $1, 2, 3, \ldots, T$. La empresa ajusta las rentas de tal modo que la suma de sus valores presentes descontados, $\dfrac{R_n}{(1+r)^n}$, iguale el precio actual de la máquina, es decir,

$$P=\frac{R_1}{1+r}+\frac{R_2}{(1+r)^2}+\frac{R_3}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{R_T}{(1+r)^T},$$

con $r > 0$ la tasa de interés (fija). Si se establece una renta fija $R_n = v$ en todos los periodos, halla el precio P como función de v y r. ¿Cómo varía este resultado si el arrendamiento es a perpetuidad ($T \to \infty$)?

Suponiendo una renta fija $R_n = v$, se tiene

$$\begin{aligned} P &= \frac{v}{1+r} + \frac{v}{(1+r)^2} + \frac{v}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{v}{(1+r)^T} \\ &= \frac{v}{1+r}\left[1 + \left(\frac{1}{1+r}\right) + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{1+r}\right)^{T-1}\right]. \end{aligned}$$

La expresión entre paréntesis es una suma geométrica finita, con

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{1}{1+r}\right) + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{1+r}\right)^{T-1} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T}{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)} \\ &= \frac{1+r}{r}\left[1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T\right], \end{aligned}$$

de modo que el precio P está dado por

$$P = \frac{v}{r}\left[1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T\right].$$

Por otra parte, como $0 < \dfrac{1}{1+r} < 1$, por límites frecuentes sabemos que

$$\lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^T = 0.$$

De esta manera, cuando el arrendamiento es a perpetuidad ($T \to \infty$), se tiene

$$P = \frac{v}{r}.$$

En otras palabras, suponiendo que la máquina no se deprecia en el tiempo, el precio de la renta coincide con el interés $v = rP$ que generaría mensualmente en el banco una cantidad P a una tasa fija r.

5. Determina $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{c_t}$, si $c_t = \left[1 - \beta^2 (1+r)\right] \left[\beta (1+r)\right]^{2t}$ y $0 < \beta^2 (1+r) < 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{c_t} &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{\left[1 - \beta^2 (1+r)\right] \left[\beta (1+r)\right]^{2t}} \\
&= \sqrt{1 - \beta^2 (1+r)} \sum_{t=0}^{\infty} \left[\beta^2 (1+r)\right]^t \\
&= \sqrt{1 - \beta^2 (1+r)} \left(\frac{1}{1 - \beta^2 (1+r)}\right) = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2 (1+r)}}.
\end{aligned}$$

6. El monto h_t de una hipoteca en el mes t satisface una relación de recurrencia de la forma $h_{t+1} = (1+r)h_t - a$, en donde a es el pago mensual y $r > 0$ es la tasa de interés mensual. Con el método de iteración resuelve la ecuación, suponiendo un préstamo inicial de K_0 pesos. Luego encuentra el mes N tal que $h_N = 0$.

   Para encontrar la solución h_t iteramos la relación de recurrencia:

$$\begin{aligned}
h_0 &= K_0 \\
h_1 &= (1+r)h_0 - a = K_0(1+r) - a \\
h_2 &= (1+r)h_1 - a = K_0(1+r)^2 - a(1+r) - a \\
h_3 &= (1+r)h_2 - a = K_0(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) - a \\
\vdots &= \vdots \\
h_t &= K_0(1+r)^t - a\left[(1+r)^{t-1} + \cdots + (1+r)^2 + (1+r) + 1\right]
\end{aligned}$$

   El término entre corchetes es una suma geométrica finita, de modo que

$$h_t = K_0(1+r)^t - a\frac{1 - (1+r)^t}{1 - (1+r)} = \left(K_0 - \frac{a}{r}\right)(1+r)^t + \frac{a}{r}.$$

   Para encontrar el mes N tal que la deuda queda totalmente saldada, resolvemos

$$h_N = \left(K_0 - \frac{a}{r}\right)(1+r)^N + \frac{a}{r} = 0,$$

   obteniendo

$$N = \log_{1+r}\left(\frac{a}{a - rK_0}\right).$$

7. Demuestra que para todo $|r| < 1$ se cumple $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$.

   Sabemos que si $|r| < 1$, entonces

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}.$$

Derivando con respecto a r ambos lados de la igualdad, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\left(1+r+r^2+r^3+\cdots\right) &= \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{1-r}\right)\\ 1+2r+3r^2+\cdots &= \frac{1}{(1-r)^2}\\ r+2r^2+3r^3+\cdots &= \frac{r}{(1-r)^2}.\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

8. Se define la duración de Macaulay D para un bono con cupón constante como

$$D = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{N} \frac{Ct}{(1+r)^t} + \frac{NV}{(1+r)^N}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{N} \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{V}{(1+r)^N}},$$

con $C, V, r > 0$. Demuestra que para un bono perpetuo ($N \to \infty$) la duración de Macaulay se reduce a

$$D = 1 + \frac{1}{r}.$$

Sugerencia: Usa el resultado del ejercicio 7.

En el caso de un bono perpetuo ($N \to \infty$) la duración de Macaulay es

$$D = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} \frac{Ct}{(1+r)^t} + V \lim_{N\to\infty} \frac{N}{(1+r)^N}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^t} + V \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(1+r)^N}} = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} \frac{Ct}{(1+r)^t}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^t}},$$

en donde se utilizó el hecho de que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{(1+r)^N} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{N}{(1+r)^N} \overset{L}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(1+r)^N \ \ln(1+r)} = 0,$$

ya que $0 < \dfrac{1}{1+r} < 1$. Ahora bien, sabemos que si $|r| < 1$, entonces

$$\sum_{t=1}^{\infty} r^{t-1} = \frac{1}{1-r}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^t} = \frac{C}{1+r} \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{t-1} = \frac{C}{1+r} \left(\frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+r}} \right) = \frac{C}{r}.$$

Por otra parte, de acuerdo con el ejercicio 7, sabemos que para $|r| < 1$ se cumple

$$\sum_{t=1}^{\infty} t r^t = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{Ct}{(1+r)^t} = C \sum_{t=1}^{\infty} t \left(\frac{1}{1+r} \right)^t = C \frac{\dfrac{1}{1+r}}{\left(1 - \dfrac{1}{1+r} \right)^2} = \frac{C(1+r)}{r^2}.$$

De esta manera,

$$D = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} \frac{Ct}{(1+r)^t}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^t}} = \frac{\dfrac{C(1+r)}{r^2}}{\dfrac{C}{r}} = \frac{1+r}{r} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Por último, es importante mencionar que la representación de una serie en términos de una suma no es única, al igual que sucedía con las sumas finitas de la sección 1.2. Aunque aquí definimos serie como una suma infinita de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, el índice de la misma no necesariamente debe comenzar en $n = 1$. En un sentido más amplio, una serie es cualquier suma infinita de la forma

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots,$$

construida con los elementos de una sucesión $\{a_n\}$. En el caso particular de la serie geométrica,

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots,$$

ésta podrá ser representada como una suma en una infinidad de maneras, como por ejemplo,

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \sum_{n=4}^{\infty} r^{n-4} = \sum_{n=-3}^{\infty} r^{n+3}.$$

Muy especialmente, a menudo usaremos aquí la representación con $n_0 = 0$,

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Además de la serie geométrica, hay otra familia de series para las que es fácil determinar si convergen o no, y de hacerlo, a qué valor. Esta son las llamadas *series telescópicas*, que son una extensión de las sumas telescópicas finitas de la sección 1.2.

Definición. Una *serie telescópica* es una expresión de la forma

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n).$$

Para estudiar la convergencia de una serie telescópica, es conveniente utilizar nuevamente el concepto de suma parcial S_k introducida en el caso de la serie geométrica. En otras palabras, si denotamos por S el valor de la serie telescópica,

$$S = \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n),$$

éste puede encontrarse mediante el límite

$$S = \lim_{k \to \infty} S_k$$

de la suma parcial

$$S_k = \sum_{n=n_0}^{k} (a_{n+1} - a_n).$$

Ejemplos:

1. Calcula el valor de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)^2 - n^2\right]$.

   Denotamos por $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)^2 - n^2\right]$ a la suma infinita que deseamos calcular. A partir de ella construimos la suma parcial

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \left[(n+1)^2 - n^2\right].$$

Desarrollando esta última se obtiene

$$\begin{aligned} S_k &= \left[2^2-1^2\right]+\left[3^2-2^2\right]+\ldots+\left[k^2-(k-1)^2\right]+\left[(k+1)^2-k^2\right] \\ &= -1+(k+1)^2. \end{aligned}$$

Por último, como

$$S=\lim_{k\to\infty} S_k=\lim_{k\to\infty}\left[-1+(k+1)^2\right]=\infty,$$

por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)^2-n^2\right]$ diverge.

2. Calcula el valor de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$.

Usando una separación en fracciones parciales, observamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

de modo que se trata de una suma telescópica. Denotamos por $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ y construimos la correspondiente suma parcial

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Desarrollando esta última se obtiene

$$\begin{aligned} S_k &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{k+1}, \end{aligned}$$

en donde se han cancelado todos los términos, excepto el primero y el último. Así, el valor de la serie es

$$S=\lim_{k\to\infty} S_k=\lim_{k\to\infty}\left[1-\frac{1}{k+1}\right]=1,$$

es decir, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$.

Las series anteriores, la geométrica y la telescópica, nos han permitido adquirir familiaridad con el concepto de convergencia de una serie. Una vez establecida dicha convergencia, el siguiente teorema nos permite realizar dos operaciones básicas entre series convergentes, que son la suma de series y la multiplicación de una serie por un escalar.

Teorema. Sean $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ series convergentes y $c \in \mathbb{R}$. Entonces,

1. $\sum_n (a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n$ Regla de la suma
2. $\sum_n (ca_n) = c \sum_n a_n$ Regla del múltiplo constante

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5}{3^n} - \frac{1}{6^{n-1}}\right] = \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) - \left(\frac{1}{1-\frac{1}{6}}\right) = \frac{13}{10}.$$

Corolario.

1. Si $\sum_n a_n$ diverge y $\sum_n b_n$ converge, entonces $\sum_n (a_n + b_n)$ diverge.
2. Si $\sum_n a_n$ diverge y $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, entonces $\sum_n (ca_n)$ diverge.

De acuerdo con este corolario, si una serie $\sum_n a_n$ diverge, no existe manera de remover esta divergencia mediante operaciones tales como la suma con otra serie, o bien, su multiplicación por un escalar diferente de cero.

Por último, debes tener mucho cuidado con el manejo de las series generadas por el producto, o cociente, de elementos de una sucesión. En particular, nota que

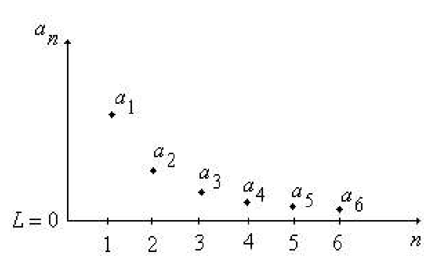
$$\sum_n (a_n b_n) \neq (\sum_n a_n)(\sum_n b_n) \quad \text{y} \quad \sum_n \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \neq \frac{\sum_n a_n}{\sum_n b_n}.$$

5.2 Criterios de convergencia de series

Con excepción de una serie geométrica o una telescópica, en general no es fácil encontrar el valor de una suma infinita. Por esta razón, a partir de este punto nos enfocaremos sólo en determinar si una serie dada converge o diverge.

Para este fin, la primera prueba que debes considerar es la llamada *prueba del n-ésimo término*, que te permite determinar a priori cuándo una serie dada $\sum_n a_n$ es divergente. La prueba se basa en el siguiente teorema, referente al comportamiento asintótico de la sucesión $\{a_n\}$ que la genera.

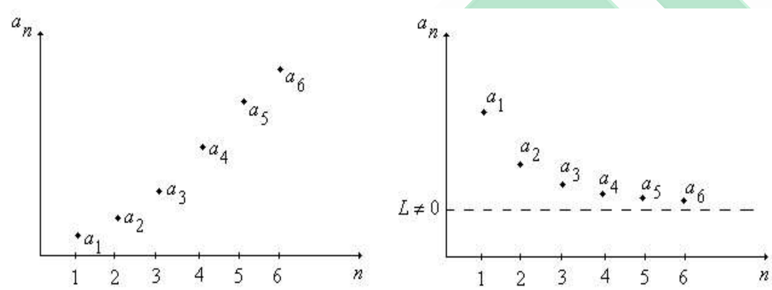
Teorema. Si $\sum_n a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.



Este teorema establece que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es una condición necesaria para la convergencia de la serie $\sum_n a_n$, pero no suficiente. En consecuencia, no puede utilizarse para probar la convergencia de una serie. Sin embargo, del teorema se desprende una prueba equivalente, que constituye un criterio de suficiencia que resulta útil para demostrar la divergencia de una serie.

Prueba del *n*-ésimo término. Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, o si este límite no existe, entonces la serie $\sum_n a_n$ es divergente.

Este criterio de divergencia establece que una condición suficiente para que una serie $\sum_n a_n$ sea divergente es que la sucesión $\{a_n\}$ de términos que la generan diverja o no converja exactamente a 0.



Ejemplos:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ diverge, ya que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0.$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$ diverge, ya que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} \neq 0.$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}$ diverge, ya que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 3^{n-1}$ no existe (tiende a infinito).
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ diverge, ya que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos n$ no existe (oscila entre -1 y 1).

Los ejemplos 1 y 2 ilustran que, aunque la sucesión $\{a_n\}$ sea convergente, la serie $\sum_n a_n$ generada por $\{a_n\}$ es divergente.

El siguiente ejemplo ilustra por qué $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es tan sólo una condición necesaria, mas no suficiente, para establecer la convergencia de una serie $\sum_n a_n$.

Ejemplo:

Analicemos la convergencia de la *serie armónica*, dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots .$$

Esta serie está generada por la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$, que satisface

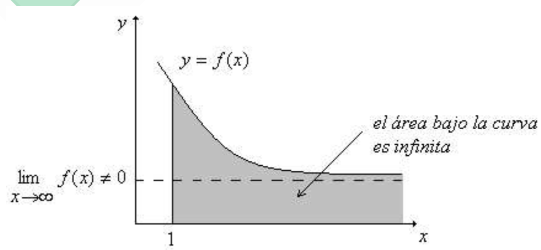
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

A pesar de que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ converge a 0, la serie armónica diverge, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{2}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{4}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{> \frac{8}{16}} + \cdots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty.$$

Nota que ésta es una situación similar a la del caso de una integral impropia del tipo $\int_1^\infty f(x)dx$. Para que esta última converja es necesario que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$; de lo contrario, la suma de contribuciones sería divergente. Sin embargo, esta condición no garantiza que $\int_1^\infty f(x)dx$ sea finita, como sucede con la integral $\int_1^\infty \dfrac{1}{x}\, dx$, que diverge, aunque $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.



Resumimos los resultados anteriores de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_n a_n \text{ diverge}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_n a_n \text{ puede converger o divergir}$$

Una vez verificada la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, existe una variedad de criterios que nos permiten establecer la convergencia o divergencia de la serie $\sum_n a_n$, como se describe a continuación.

5.2.1 Pruebas para series de términos no negativos

La manera natural de estudiar la posible convergencia de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ consiste en analizar el comportamiento asintótico de la sucesión de sus sumas parciales,

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots .$$

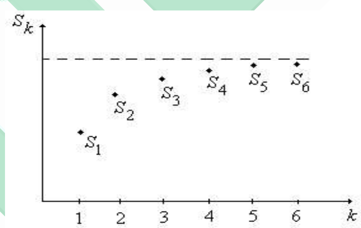
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la sucesión $\{S_k\}$ converge. Para estudiar la convergencia de la sucesión $\{S_k\}$, resulta de particular interés considerar el "peor escenario", que corresponde al caso de series de términos no negativos, $a_n \geq 0$. En efecto, tomando en cuenta que

$$S_k = S_{k-1} + a_k,$$

si suponemos que $a_k \geq 0$, entonces

$$S_k \geq S_{k-1}.$$

Así, en este caso, las sumas parciales $S_1, S_2, S_3, \ldots$ constituyen una sucesión no decreciente. Si logramos demostrar que esta sucesión está acotada superiormente, por el teorema de las sucesiones no decrecientes, de la sección 4.1, podemos concluir que la sucesión $\{S_k\}$ converge, y por lo tanto converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.



Teorema. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos no negativos, $a_n \geq 0$, converge si y sólo si sus sumas parciales $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ están acotadas superiormente.

Nota que este teorema sólo establece la convergencia de la serie, pero no el valor de su suma. Para determinar ese valor, no basta con demostrar que la sucesión está acotada por arriba, sino que habría que determinar cuál es el límite L de la sucesión, que es su mínima cota superior.

De este teorema se desprenden una variedad de resultados correspondientes a series $\sum_n a_n$ de términos no negativos, $a_n \geq 0$, como se exponen a continuación. Al respecto, primero presentamos las llamadas *pruebas intrínsecas*, que resultan al analizar el comportamiento asintótico de los términos de la serie que se desea estudiar. Posteriormente presentamos las *pruebas extrínsecas*, que complementan a las anteriores, y que se basan en la comparación de los términos de la serie estudiada con algún otro tipo de objeto (una integral u otra serie).

5.2.1.1 Pruebas intrínsecas para series de términos no negativos Aquí presentamos dos pruebas intrínsecas para convergencia de series de términos no negativos, la *prueba del cociente* y la *prueba de la raíz.* Ambas pruebas se basan en el comportamiento de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$, que converge sólo si $|r| < 1$. Es fácil ver que los elementos de la serie geométrica satisfacen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{r^{n+1}}{r^n} = r \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{r^n} = r,$$

de modo que, en el caso $r > 0$, la condición de convergencia, $0 < r < 1$, implica

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{a_n} < 1.$$

Las pruebas que se describen a continuación establecen una condición de convergencia similar, pero de manera asintótica ($n \to \infty$).

Prueba del cociente (prueba de D'Alembert). Sea $\sum_n a_n$ una serie de términos positivos, $a_n > 0$, y suponga que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

a) Si $\rho < 1$, entonces $\sum_n a_n$ converge.
b) Si $\rho > 1$ o ρ es infinita, entonces $\sum_n a_n$ diverge.
c) Si $\rho = 1$, entonces la prueba no es concluyente.

Ejemplos:

1. Determina la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$.

   En este caso, $a_n = \dfrac{2^n + 5}{3^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1} + 5}{3^{n+1}}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}\right)}{\left(\frac{2^n+5}{3^n}\right)} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+5}{2^n+5} \stackrel{L}{=} \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\ln 2}{2^n \ln 2} = \frac{2}{3} < 1,$$

   por lo tanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$ converge (de hecho su suma es $9/2$, y no $\rho = 2/3$).

2. Determina la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

   En este caso, $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$, $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. Como

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{2^n}{n!}\right)} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)\,(n!)} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,
\end{aligned}$$

   por lo tanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge (su suma es e^2, como mostraremos en el tema de series de Taylor).

3. Determina la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,n!}$.

   En este caso, $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!\,n!}$, $a_{n+1} = \dfrac{(\,2(n+1)\,)!}{(n+1)!\;(n+1)!} = \dfrac{(\,2n+2\,)!}{(n+1)!\;(n+1)!}$. Como

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{(\,2n+2\,)!}{(n+1)!\,(n+1)!}\right)}{\left(\frac{(2n)!}{n!\,n!}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n!\;(2n+2)!}{(n+1)!\;(n+1)!\,(2n)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n!\;(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}{(n+1)\,(n!)\,(n+1)\,(n!)\,(2n)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\,(n+1)\,(2n+1)}{(n+1)\,(n+1)} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} \overset{L}{=} 2\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1} = 4,
\end{aligned}$$

   por lo tanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,n!}$ diverge.

4. Determina la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!\,n!}{(2n)!}$.

   En este caso, $a_n = \dfrac{4^n n!\,n!}{(2n)!}$, $a_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}\,(n+1)!\;(n+1)!}{(\,2n+2\,)!}$. Siguiendo pasos similares a los del problema 3, se tiene,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4^{n+1}(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}\right)}{\left(\frac{4^n n!\,n!}{(2n)!}\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4\,(n+1)\,(n+1)}{2\,(n+1)\,(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2\,n+1} \overset{L}{=} \lim_{n\to\infty} 1 = 1,\end{aligned}$$

de modo que la prueba no es concluyente, y tenemos que utilizar algún otro criterio. Para esta serie en particular, es fácil ver que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2\,n+1} = \frac{(2n+1)+1}{2\,n+1} > 1.$$

Como $a_{n+1} > a_n$, por lo tanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!\,n!}{(2n)!}$ diverge.

Prueba de la raíz *n*-ésima (prueba de Cauchy). Sea $\sum_n a_n$ una serie de términos no negativos, $a_n \geq 0$, y suponga que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho.$$

a) Si $\rho < 1$, entonces $\sum_n a_n$ converge.
b) Si $\rho > 1$ o ρ es infinita, entonces $\sum_n a_n$ diverge.
c) Si $\rho = 1$, entonces la prueba no es concluyente.

Ejemplos:

1. Determina la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

En este caso, $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n^{2/n} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}\right) = \frac{1}{2} < 1,$$

en donde se ha utilizado uno de los límites de uso frecuente de la sección 4.1. De esta manera, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ converge.

2. Determina la convergencia de $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$.

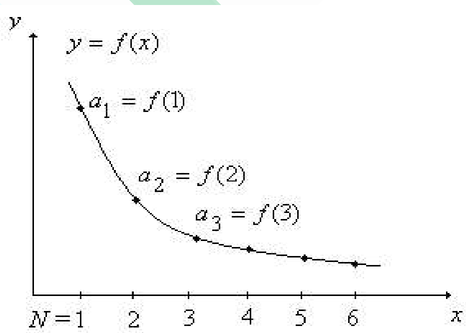
   En este caso, $a_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0 < 1.$$

   De esta manera, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$ converge.

5.2.1.2 Pruebas extrínsecas para series de términos no negativos Las pruebas extrínsecas se basan en la comparación de la serie bajo estudio con algún otro objeto, ya sea una integral y otra serie, del cual nos consta su convergencia o divergencia. Este tipo de pruebas presentan una mayor dificultad que las intrínsecas, porque requieren creatividad y un mayor conocimiento del tema (¿contra qué otro objeto comparamos? ¿sabemos si este objeto converge o no?).

Prueba de la integral. Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de términos positivos, $a_n > 0$. Sea f una función continua, positiva y decreciente de x, para todo x mayor o igual que un entero positivo N, tal que $f(n) = a_n$. Entonces la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ y la integral $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ convergen ambas, o divergen ambas.



Ejemplo:

Determina la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Primero identificamos la sucesión que la genera, como

$$a_n = \frac{1}{n^2},$$

y notamos que la suma comienza en $N = 1$. La función continua correspondiente es, entonces,

$$f(x) = \frac{1}{x^2},$$

con $x \geq 1$. Es claro que la sucesión de sumas parciales de la serie,

$$S_1 = \frac{1}{1^2}, \quad S_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}, \quad S_3 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}, \quad \ldots ,$$

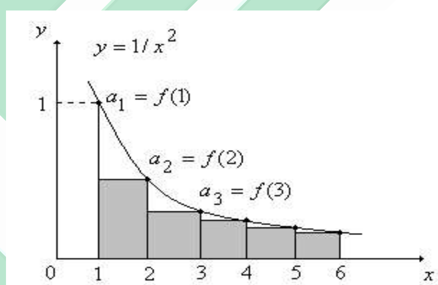
es no decreciente $(S_k > S_{k-1})$. Para demostrar que está acotada por arriba considera la k-ésima suma parcial,

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2},$$

y exprésala en términos de f, como

$$\begin{aligned} S_k &= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(k) \\ &= 1 + f(2) + f(3) + \cdots + f(k). \end{aligned}$$

Como se muestra en la figura, cada término $f(i)$, $i = 2, 3, \ldots, k$, puede pensarse como el área de un rectángulo con base $\Delta i = 1$ y altura $f(i) = \dfrac{1}{i^2}$.



Por construcción, los rectángulos están situados por debajo de la curva continua $y = \dfrac{1}{x^2}$, de modo que la suma de sus áreas es menor que el área bajo la curva entre $x = 1$ y $x = k$, es decir,

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(k) < \int_1^k \frac{1}{x^2} dx.$$

A su vez, se tiene

$$\int_1^k \frac{1}{x^2} dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx,$$

de modo que

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(k) < \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx.$$

De esta manera,

$$1 + f(2) + f(3) + \cdots + f(k) < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx,$$

es decir,

$$S_k < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx.$$

Como $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$, por lo tanto

$$S_k < 2,$$

de modo que la sucesión de sumas parciales $S_1, S_2, \ldots$ está acotada por arriba. Por el teorema de las sucesiones no decrecientes, la sucesión $\{S_k\}$ converge y, por lo tanto, existe $\lim\limits_{k\to\infty} S_k$. Por último, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{k\to\infty} S_k$$

por lo tanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Nota que este resultado no establece que la serie converge a 2, sólo que ésta converge (a un valor menor que 2). Con esto hemos demostrado que la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ implica la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

La prueba de la integral para una serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ es muy útil cuando se conoce la convergencia o divergencia de su contraparte continua $\int_N^\infty f(x)\,dx$, $f(n) = a_n$. Por ejemplo, sabiendo que converge la integral $\int_1^\infty xe^{-x}\,dx$, podemos justificar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.

De esta prueba se desprende un caso particular de interés, que es el correspondiente a las llamadas *series-p*, dadas por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots ,$$

con $p \in \mathbb{R}$. La convergencia (divergencia) de estas series está dada por la convergencia (divergencia) de las integrales $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$, que estudiamos en la sección 2.2.

De los resultados ahí obtenidos, concluimos directamente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \to \begin{cases} \text{converge,} & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge,} & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

Este resultado será de gran utilidad a lo largo de esta sección.

Por último, es muy importante que puedas distinguir una serie-p, tal como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots ,$$

de una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots ,$$

que es de la familia de las geométricas, con $r = 1/2$ (ésta no es exactamente una serie geométrica, sino un múltiplo de ella, puesto que comienza en $1/2$ y no en 1).

Prueba de la comparación directa. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $0 < a_n < b_n$, para todo n mayor o igual que un entero positivo N.

a) Si $\sum_n b_n$ converge, entonces también converge $\sum_n a_n$.
b) Si $\sum_n a_n$ diverge, entonces también diverge $\sum_n b_n$.

Esta prueba se utiliza de la siguiente manera. Te dan una serie de términos positivos, y te piden determinar si ésta converge o no. De alguna u otra manera tú "intuyes"la respuesta (¡difícil tarea!), y luego procedes a la demostración, seleccionando uno de los dos incisos anteriores:

a) Usas este inciso cuando quieres demostrar que la serie converge. En este caso, la serie dada juega el papel de $\sum_n a_n$, y tú tienes que proporcionar una segunda serie, $\sum_n b_n$, que sea convergente y numéricamente mayor que la primera ($a_n < b_n$). La lógica es "si converge la grande, converge la chica".

b) Usas este inciso cuando quieres demostrar que la serie diverge. En este caso, la serie dada juega el papel de $\sum_n b_n$, y tú tienes que proporcionar una segunda serie, $\sum_n a_n$, que sea divergente y numéricamente menor que la primera ($a_n < b_n$). La lógica es "si diverge la chica, diverge la grande".

Ejemplos:

1. Analiza la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$.

   Se "intuye"que la serie converge, ya que se parece a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que es convergente (serie-p, con $p > 1$). Para demostrarlo, podemos utilizar lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
-1 \leq \cos n \leq 1 \\
\therefore \quad 1+\cos n \leq 2 \\
\therefore \quad \frac{1+\cos n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2} \\
\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}
\end{aligned}
$$

   Como $\dfrac{1+\cos n}{n^2} \leq \dfrac{2}{n^2}$, para todo $n \geq 1$, y como $2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$ converge.

2. Analiza la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

   Se "intuye"que la serie diverge, ya que se parece a la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$, que diverge (serie armónica). Para demostrarlo, tomamos en cuenta que, para todo $n \geq 3$,

$$
\begin{aligned}
\ln n \geq 1 \\
\therefore \quad \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \\
\therefore \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

   Como $\dfrac{\ln n}{n} \geq \dfrac{1}{n}$, para todo $n \geq 3$, y como $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge.

Ten cuidado de utilizar esta prueba de manera apropiada, para no obtener resultados erróneos. Es decir, no puedes demostrar que una serie converge presentando una mayor que diverja (si diverge la grande, la chica puede o no converger). Similarmente, no puedes demostrar que una serie diverge exhibiendo una menor que converja (si converge la chica, la grande puede o no divergir).

Prueba de la comparación de límites (prueba por paso al límite). Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $a_n, b_n > 0$, para todo n mayor o igual que un entero positivo N.

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$, $c \in \mathbb{R}^+$, entonces $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ convergen ambas o divergen ambas.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum_n b_n$ converge, entonces $\sum_n a_n$ converge.

c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\sum_n b_n$ diverge, entonces $\sum_n a_n$ diverge.

Aquí no se comparan directamente dos series $\left(\sum_n a_n \text{ vs. } \sum_n b_n\right)$, sino más bien las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ que las generan. En particular, se analiza el comportamiento asintótico $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ del cociente de sus términos, dando origen a tres posibles casos:

a) Si el cociente se estabiliza en una tasa fija $c > 0$, las sucesiones tienden a crecer o decrecer proporcionalmente. De esta manera, si una de las series converge (diverge), entonces la otra también lo hará.

b) Si el cociente se anula, la sucesión en el denominador tiende a crecer más rápido que la del numerador. Si aún así la serie generada por esta sucesión converge, claramente deberá converger la serie generada por la sucesión en el numerador.

c) Si el cociente crece indefinidamente, la sucesión en el denominador tiende a crecer más lento que la del numerador. Si aún así la serie generada por esta sucesión diverge, claramente deberá divergir la serie generada por la sucesión en el numerador.

Esta prueba es útil para series generadas por funciones racionales de n, como lo muestran los ejemplos a continuación.

Ejemplos:

1. Analiza la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2+5n+8}{2n^5+n-1}$.

   La sucesión correspondiente a esta serie es $a_n = \dfrac{6n^2+5n+8}{2n^5+n-1}$. Como su comportamiento dominante para $n \gg 1$ es $\dfrac{6n^2}{2n^5}$, de modo que podemos elegir $b_n = \dfrac{3}{n^3}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{6n^2+5n+8}{2n^5+n-1}\right)}{\left(\dfrac{3}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^5+5n^4+8n^3}{6n^5+3n-3} \stackrel{L}{=} 1,$$

y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3}$ generada por b_n converge (serie-p, con $p = 3$), por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2 + 5n + 8}{2n^5 + n - 1}$ converge.

2. Analiza la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{n^2 + 2n + 1}$.

   La sucesión correspondiente a esta serie es $a_n = \frac{2n + 1}{n^2 + 2n + 1}$. Su comportamiento dominante para $n \gg 1$ es $\frac{2n}{n^2}$, de modo que podemos elegir $b_n = \frac{2}{n}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{2n+1}{n^2+2n+1}\right)}{\left(\dfrac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n}{2n^2 + 4n + 2} = 1,$$

   y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ generada por b_n diverge (múltiplo de la serie armónica), por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{n^2 + 2n + 1}$ diverge.

3. Analiza la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

   La sucesión correspondiente a esta serie es $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$. Si elegimos la segunda sucesión como $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)}{\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/2}} \overset{L}{=} 0,$$

   y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ generada por b_n converge (serie-p, con $p = 3/2$), por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ converge.

4. Analiza la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

   La sucesión correspondiente a esta serie es $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Si elegimos la segunda sucesión como $b_n = \dfrac{1}{n}$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)}{\left(\dfrac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\ln n = \infty.$$

   Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ generada por b_n diverge, por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ diverge.

5.2.2 Pruebas de convergencia para series de términos con signos diferentes

Las pruebas anteriores (extrínsecas e intrínsecas) tratan solamente con series $\sum_n a_n$ de términos no negativos, en donde todos los elementos se suman, no se restan. Obviamente, esas pruebas se aplican también para series de términos no positivos, factorizando el signo menos fuera de la suma. Generalmente las series pueden poseer tanto términos positivos como negativos, por lo que resulta útil estudiar algunos criterios de convergencia para ese caso.

Un criterio de convergencia para series con signos mezclados, que resulta bastante intuitivo, establece que si una serie de términos no negativos $\sum_n |a_n|$ converge, con mayor razón convergirá la serie asociada $\sum_n a_n$, en la que algunos de los términos a_n puedan tener signo negativo, disminuyendo el valor de la suma infinita. Este es el contenido del siguiente teorema.

Teorema. Si $\sum_n |a_n|$ converge, entonces $\sum_n a_n$ converge.

Ejemplos:

1. Demuestra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ converge.

   Sabemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, ya que es una serie-p, con $p = 2$. Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ converge.

2. Demuestra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ converge.

   Primero mostramos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$ converge. Para ello, partimos del hecho que $|\cos n| \leq 1$, de modo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, por la prueba de la comparación directa concluímos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$ converge.

   De esto último se sigue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ converge.

Considera ahora una serie de signos diferentes, tal como

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Es claro que en este caso no puede aplicarse el teorema anterior, ya que la serie de los valores absolutos, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, diverge (serie armónica). Para casos como éste, existe un criterio alternativo de convergencia, conocido como el *teorema de Leibniz para series alternantes*, que trata con series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots ,$$

$u_n > 0$, en donde los términos $a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}$ van alternando signo, dependiendo de que n sea par o impar.

Teorema de Leibniz para series alternantes. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ converge si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

i) $u_n > 0$, para todo $n \geq 1$,

ii) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, para todo n mayor o igual que algún entero positivo N,

iii) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

La primera condición garantiza que efectivamente se trata de una serie de signos alternantes, es decir, el signo de cada término proviene exclusivamente del factor $(-1)^{n+1}$. La segunda condición establece que la sucesión debe ser decreciente $(u_{n+1} \leq u_n)$ a partir de algún valor $n = N$. La última condición es simplemente la prueba del n-ésimo término.

Ejemplos:

1. Determina la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, conocida como serie armónica alternante.

   La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ converge, ya que

   i) $u_n = \frac{1}{n} > 0$, para todo $n \geq 1$,

   ii) $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \leq 1$, para todo $n \geq 1$,

   iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$

2. Determina la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2^n}$.

   La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$ converge, ya que se trata de una serie geométrica, con $|r| = \left|-\frac{1}{2}\right| < 1$. Esta misma conclusión puede obtenerse a partir del teorema de Leibniz, puesto que

   i) $u_n = \dfrac{1}{2^n} > 0$, para todo $n \geq 0$,

   ii) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} \leq 1$, para todo $n \geq 0$,

   iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$

3. Determina la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

   La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ diverge, puesto que no satisface la condición iii), o prueba del n-ésimo término, es decir, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0.$

5.2.3 Convergencia condicional y convergencia absoluta

Definición. Se dice que una serie $\sum_n a_n$ *converge condicionalmente*, si ésta converge, pero la correspondiente serie de valores absolutos, $\sum_n |a_n|$, no converge.

Ejemplos:

1. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ converge condicionalmente, ya que:

   i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ converge (teorema de las series alternantes),

   ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge (serie armónica, o serie-*p*, con $p = 1$).

2. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge condicionalmente, ya que:

   i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge (teorema de las series alternantes),

   ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (serie-*p*, con $p = \frac{1}{2}$).

Definición. Una serie $\sum_n a_n$ es *absolutamente convergente* si la correspondiente serie de valores absolutos, $\sum_n |a_n|$, converge.

Ejemplos:

1. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2^n}$ converge absolutamente, ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^{n}\frac{1}{2^n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

   converge (serie geométrica, con $r = \frac{1}{2} < 1$).

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ converge absolutamente, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

converge (serie-p, con $p = 2$).

Por último, cabe mencionar que la convergencia absoluta de una serie es importante para garantizar que cualquier re-arreglo de términos en una serie infinita no cambia el valor de esta suma, como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema de los re-arreglos. Si $\sum_n a_n$ converge absolutamente y si $b_1, b_2, b_3, \ldots$ es cualquier arreglo de la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$, entonces $\sum_n b_n$ converge absolutamente, y además $\sum_n b_n = \sum_n a_n$.

Para comprender el significado de este teorema, primero nota que el valor de una suma finita es independiente de la manera en la que agrupes sus términos para calcular su valor. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} &= \left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \\ &= \cdots = \frac{25}{12}. \end{aligned}$$

En el caso de una suma infinita esto no necesariamente es cierto, ya que el resultado de un re-arreglo de sus términos puede darte un valor diferente para esta suma. Por ejemplo, considera la serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots,$$

que es una serie armónica alternante y, por lo tanto, converge. De hecho, es posible demostrar que esta serie converge al valor $S = \ln 2$. Sin embargo, si cambias el orden de los términos puedes llegar a que la suma vale cualquier cosa. Por ejemplo, si la escribes como

$$S = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right),$$

entonces S diverge (cada paréntesis da una suma infinita), o bien escrita como

$$S = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{7}\right) + \cdots$$

te da una suma igual a 1. Esta inconsistencia se debe a que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ no converge absolutamente, sino tan sólo condicionalmente. En otras palabras, aunque esta serie converge, y converge a $\ln 2$, como su convergencia no es absoluta, cualquier re-arreglo de sus términos puede darte una suma diferente a ésta. Sólo la convergencia absoluta de una serie garantiza que su valor sea invariante ante cualquier re-arreglo de sus términos.

5.3 Series de funciones. Series de potencias

En las secciones anteriores estudiamos series de números, $\sum_n a_n$, en donde el valor al que converge la suma es un número, S. El objetivo aquí es extender el concepto de serie al de *serie de funciones,* $\sum_n f_n(x)$, de una variable real x, cuya suma converge a una función $f(x)$.

Para motivar el tema, considera que en lugar de tener una serie dada, tal como la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$, ahora tienes una familia de series geométricas,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}3^n, \quad \ldots$$

correspondientes a diferentes razones, $\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}, 3, \ldots$ Claramente, toda esta familia puede representarse por la expresión

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$

con $x \in \mathbb{R}$. Una expresión de este tipo es un ejemplo de una serie de funciones, generada por la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$. De acuerdo con los resultados de la sección 5.1, sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x},$$

si $|x| < 1$, mientras que la suma diverge en otro caso. Decimos entonces que la serie generada por la sucesión $\{x^n\}$ converge a la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

dentro del intervalo, $-1 < x < 1$, conocido como el *intervalo de convergencia* de la serie. De acuerdo con esto, las series $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ o $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ son valores particulares de la función $f(x)$, es decir,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n &= f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4},\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n &= f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3},\end{aligned}$$

para $x \in (-1,1)$. En otras palabras, las series numéricas que estudiamos en las secciones 5.1 y 5.2 pueden considerarse como casos particulares de una serie de funciones de x, que convergen a alguna función $f(x)$ dentro de algún intervalo de valores de la variable x.

Definición. Dada una sucesión $\{f_n(x)\}$ de funciones, $f_n : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una *serie infinita de funciones* es una expresión de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_k(x) + \cdots .$$

Como un segundo ejemplo, considera la serie de funciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n = 1 + \ln x + (\ln x)^2 + (\ln x)^3 + \cdots ,$$

generadas por la sucesión $f_n(x) = (\ln x)^n$, con $x > 0$, $x \neq 1$. Al igual que en el ejemplo anterior, nuevamente se trata de una serie geométrica, pero ahora la razón de la serie es $\ln x$. Claramente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n = \frac{1}{1-\ln x}, \qquad |\ln x| < 1.$$

En otras palabras, la serie generada por la sucesión $\{(\ln x)^n\}$ converge a la función

$$f(x) = \frac{1}{1-\ln x},$$

dentro del intervalo de convergencia, dado por $e^{-1} < x < e$.

Como se ilustra en los ejemplos anteriores, cuando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge, ésta lo hace a una función $f(x)$ en S. Desde el punto de vista formal, la función $f(x)$ se obtiene tomando el límite $k \to \infty$ de la sucesión de sus sumas parciales,

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x).$$

Por otra parte, si la serie de los valores absolutos $\sum_n |f_n(x)|$ converge para toda $x \in S$ se dice que $\sum_n f_n(x)$ es *absolutamente convergente* en S. Si la sucesión $\{S_k\}$ de sumas parciales converge uniformemente a $f(x)$ en S, se dice que la serie $\sum_n f_n(x)$ *converge a* $f(x)$ *uniformemente* en S. La convergencia uniforme de una serie de funciones es muy importante, ya que nos permite garantizar resultados tales como

$$\begin{aligned} \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)dx, \\ \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n(x)}{dx}, \end{aligned}$$

que siempre se cumplen para sumas finitas, pero no necesariamente se verifican en el caso de sumas infinitas.

Entre las series de funciones se destacan las llamadas *series de potencias*, para las que las funciones f_n son potencias de x, de la forma

$$f_n(x) = c_n(x - x_0)^n,$$

en donde x_0 es una constante y los coeficientes c_n sólo pueden depender de n, pero no de la variable real x.

Definición. Una s*erie de potencias de la variable* x *alrededor de* $x = x_0$ es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots ,$$

en donde x es una variable real, x_0 es una constante y los coeficientes c_n son números que sólo dependen del índice de la suma, n.

Cabe señalar que el índice de la suma de una serie de potencias no necesariamente debe iniciar en $n = 0$, sino en algún otro entero positivo. Los siguientes ejemplos ilustran diferentes series de potencias.

Ejemplos:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ es una serie de potencias alrededor del origen ($x_0 = 0$), con $c_n = 1$, para todo $n \geq 0$.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right) x^n = \frac{1}{3}x + \frac{2}{4}x^2 + \frac{3}{5}x^3 + \cdots$ es una serie de potencias alrededor del origen, con $c_n = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)$, para todo $n \geq 0$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ es una serie de potencias alrededor del origen, con $c_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, para todo $n \geq 1$.

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{x}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n (x-2)^n = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 - \cdots$ es una serie de potencias alrededor de $x_0 = 2$, con $c_n = (-\dfrac{1}{2})^n$, para todo $n \geq 0$.

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!} = 1 + (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + \cdots$ es una serie de potencias alrededor de $x_0 = -1$, con $c_n = \dfrac{1}{n!}$, para todo $n \geq 0$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+3)^n}{n\,2^n} = \frac{(x+3)}{2} - \frac{(x+3)^2}{2\,(2^2)} + \frac{(x+3)^3}{3\,(2^3)} - \cdots$ es una serie de potencias alrededor de $x_0 = -3$, con $c_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\,2^n}$, para todo $n \geq 1$.

Hemos comentado ya que cuando una serie de potencias $\sum_n c_n(x-x_0)^n$ converge ésta lo hace a una función $f(x)$, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = f(x),$$

dentro de algún intervalo de valores de x. Por lo general, es muy difícil determinar la función $f(x)$ a la que converge una serie de potencias, por lo que aquí nos conformaremos con determinar el intervalo de convergencia de la serie. Para ello, nota que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + c_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

siempre converge en $x = x_0$, con

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \bigg|_{x=x_0} = c_0.$$

La pregunta interesante es, entonces, para qué otros valores de x converge la serie. A continuación proporcionamos una prueba para determinar el intervalo de convergencia de una serie de potencias.

Prueba de la convergencia para la serie de potencias $\sum_n c_n (x - x_0)^n$.

1. Se utiliza la prueba de la cociente, o la prueba de la raíz n-ésima, para encontrar el intervalo de valores de x en donde la serie converge absolutamente. Es decir, se analiza la convergencia de la serie correspondientes de valores absolutos, $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (x - x_0)^n|$, obteniéndose típicamente un intervalo abierto, de la forma $|x - x_0| < R$, en donde R es el radio de convergencia alrededor de $x = x_0$.

2. Si el intervalo de convergencia absoluta es finito, $|x - x_0| < R$, se analiza entonces la convergencia de la serie numérica obtenida al evaluar la serie de potencias en los puntos extremos, $x = x_0 \pm R$. Para ello, se utiliza alguna de las pruebas intrínsecas, extrínsecas, o de series alternantes, correspondientes a series de números.

3. Por último, la serie diverge para $|x - x_0| > R$.

Ejemplos:

1. Determina el intervalo y radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

   La serie
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$
   es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, con $a_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. La serie correspondiente de valores absolutos es $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$, con
   $$|a_n(x)| = \left| (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right| = \left| \frac{x^n}{n} \right| = \frac{|x|^n}{n}.$$

Para esta serie podemos aplicar la prueba de la raíz n-ésima, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \rho$, imponiendo convergencia ($\rho < 1$), es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = |x| < 1,$$

en donde se utilizó que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. La desigualdad $|x| < 1$ implica que el intervalo de convergencia absoluta alrededor de $x_0 = 0$ es $-1 < x < 1$, con un radio de convergencia $R = 1$.

Por último, se analiza la convergencia en los puntos extremos:

La serie correspondiente a $x = -1$ es

$$(-1) - \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^4}{4} + \ldots = -(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots),$$

que diverge (negativo de la serie armónica).

Por otra parte, la serie correspondiente a $x = 1$ es

$$(1) - \frac{(1)^2}{2} + \frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^4}{4} + \ldots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

que converge (serie armónica alternante).

Concluimos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ converge en el intervalo

$$-1 < x \leq 1.$$

2. Determina el intervalo y radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2^n}$.

   Nota que se trata de una serie geométrica. Para esta serie, dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2^n} = 1 - \frac{(x-3)}{2} + \frac{(x-3)^2}{2^2} - \frac{(x-3)^3}{2^3} + \ldots$$

   se tiene $a_n(x) = (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2^n}$. Los términos de la serie correspondiente de valores absolutos son

$$|a_n(x)| = \left|(-1)^n \frac{(x-3)^n}{2^n}\right| = \left|\frac{(x-3)^n}{2^n}\right| = \frac{|x-3|^n}{2^n}.$$

   Imponiendo convergencia ($\rho < 1$) en la prueba de la raíz n-ésima se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x-3|^n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} |x-3| = \frac{1}{2} |x-3| < 1.$$

La desigualdad $\frac{1}{2}|x-3|<1$ implica que el intervalo de convergencia absoluta alrededor de $x_0=3$ es $1<x<5$, con un radio de convergencia $R=2$.

Por último, la serie correspondiente a $x=1$ es

$$1-\frac{(1-3)}{2}+\frac{(1-3)^2}{2^2}-\frac{(1-3)^3}{2^3}+\ldots=1+1+1+1+\ldots,$$

que diverge.

La serie correspondiente a $x=5$ es

$$1-\frac{(5-3)}{2}+\frac{(5-3)^2}{2^2}-\frac{(5-3)^3}{2^3}+\ldots=1-1+1-1+\ldots,$$

que también diverge.

Concluimos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{2^n}$ converge en el intervalo

$$1<x<5.$$

3. Determina el intervalo y radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

   Para la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

   se tiene $a_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$, de modo que conviene utilizar la prueba del cociente, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$. En este caso,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)\,n!}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

   de modo que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ converge para todo $x\in\mathbb{R}$, con radio de convergencia infinito.

4. Determina el intervalo y radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!(x+5)^n$.

   Para la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!(x+5)^n=1+(x+5)+2!\,(x+5)^2+3!\,(x+5)^3+\ldots$$

   se tiene $a_n(x)=n!(x+5)^n$. Utilizando la prueba del cociente se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(x+5)^{n+1}}{n!(x+5)^n}\right|=|x+5|\lim_{n\to\infty}(n+1)=\begin{cases}0, & \text{si } x=-5\\ \text{diverge}, & \text{si } x\neq-5\end{cases}.$$

Concluimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x+5)^n$converge sólo en $x=-5$, con radio de convergencia 0.

5.4 Series de Taylor para funciones de una y varias variables

En esta sección veremos bajo qué condiciones una función $f(x)$ genera una serie de potencias $\sum_n c_n(x-x_0)^n$ alrededor de un punto x_0 de su dominio. Supongamos que esto es posible, y escribimos f como

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots+c_k(x-x_0)^k+\cdots .$$

Para determinar los coeficientes c_n tomamos en cuenta que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= c_1+2c_2(x-x_0)+3c_3(x-x_0)^2+4c_4(x-x_0)^3+\cdots ,\\
f''(x) &= 2c_2+3\cdot 2c_3(x-x_0)+4\cdot 3c_4(x-x_0)^2+\cdots ,\\
f'''(x) &= 3\cdot 2c_3+4\cdot 3\cdot 2c_4(x-x_0)+\cdots ,\\
f^{IV}(x) &= 4\cdot 3\cdot 2c_4+\cdots ,\\
& \cdots
\end{aligned}$$

Al evaluar f y sus derivadas $f^{(k)}$ en $x=x_0$ se obtiene

$$f(x_0)=c_0,\;\; f'(x_0)=c_1,\;\; f''(x_0)=2c_2,\;\; f'''(x_0)=3\cdot 2c_3,\ldots,\; f^{(k)}(x_0)=k!c_k,$$

de modo que los coeficientes c_k están dados por

$$c_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

La serie de potencias correspondiente es

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\cdots ,$$

y a este tipo de series se le conoce como una *serie de Taylor*.

Definición. Sea $f(x)$ una función con derivadas de todos los órdenes en algún intervalo que contenga al punto x_0 como punto interior. La *serie de Taylor generada por f alrededor de $x=x_0$* es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots ,$$

en donde $f^{(n)}(x_0)$ denota la n-ésima derivada de la función f con respecto a la variable x, evaluada en $x=x_0$. La serie de Taylor generada por f en $x_0=0$ se denomina *serie de Maclaurin*.

Así, para desarrollar una función f en una serie de potencias alrededor de un centro $x = x_0$ se necesita que existan las derivadas $f^{(n)}(x_0)$ de todos los órdenes evaluadas en x_0, y en ese caso, los coeficientes c_n de la serie de potencias generada están dados por $c_n = f^{(n)}(x_0)/n!$.

Ejemplos:

1. Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ alrededor de $x_0 = 0$.

   La serie de Taylor (o Maclaurin) correspondiente es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots ,$$

   con $f^{(n)}(0)$ la n-ésima derivada de la función f evaluada en $x = 0$. Como

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x} && \rightarrow \quad f(0) = 1 = 0!, \\
f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} && \rightarrow \quad f'(0) = 1 = 1!, \\
f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} && \rightarrow \quad f''(0) = 2 = 2!, \\
f'''(x) &= \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4} && \rightarrow \quad f'''(0) = 2 \cdot 3 = 3!, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

   es claro que

$$f^{(n)}(0) = n!,$$

   para todo $n \geq 0$. Así, la serie de Taylor generada por $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ alrededor de $x_0 = 0$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots .$$

   Para esta serie particular es fácil determinar su intervalo de convergencia, ya que se trata de una serie geométrica, cuya razón es $r = x$. A partir de la condición $|x| < 1$, obtenemos que el intervalo de convergencia es $-1 < x < 1$, con un radio de convergencia $R = 1$ alrededor de $x_0 = 0$.

2. Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alrededor de $x_0 = 3$.

   La serie de Taylor correspondiente es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3 + \cdots ,$$

con $f^{(n)}(3)$ la n-ésima derivada de la función f evaluada en $x = 3$. Como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f(3) = \frac{1}{3}, \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad f'(3) = -\frac{1}{3^2}, \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3} \quad \rightarrow \quad f''(3) = \frac{2}{3^3}, \\ f'''(x) &= -\frac{2\cdot 3}{x^4} \quad \rightarrow \quad f'''(3) = -\frac{2\cdot 3}{3^4}, \\ & \cdots \end{aligned}$$

por lo tanto

$$f^{(n)}(3) = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}},$$

para todo $n \geq 0$. Así, la serie de Taylor generada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alrededor de $x_0 = 3$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}}{n!}(x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{(x-3)}{3^2} + \frac{(x-3)^2}{3^3} - \frac{(x-3)^3}{3^4} + \cdots .$$

Para encontrar su intervalo de convergencia, observamos que se trata de un múltiplo de una serie geométrica, cuya razón es $r = -\left(\dfrac{x-3}{3}\right)$. A partir de la condición $\left|-\left(\dfrac{x-3}{3}\right)\right| < 1$, obtenemos que el intervalo de convergencia es $0 < x < 6$, con un radio de convergencia $R = 3$ alrededor de $x_0 = 3$.

A partir de una serie de Taylor es posible definir polinomios $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots,$ de orden $0, 1, 2, , \ldots$ simplemente truncando la serie a ese orden, como se define a continuación.

Definición. Sea f una función con derivadas de orden k para $k = 1, 2, \ldots, n$ en algún intervalo que contenga a x_0 como punto interior. El *polinomio de Taylor de orden n generado por f alrededor de $x = x_0$* es la función

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Nota que el polinomio de Taylor $P_1(x)$ de orden 1,

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

es precisamente la *linearización* $L(x)$ de $f(x)$ alrededor de x_0, que representa la ecuación de la recta tangente a f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Por otra parte, el polinomio de Taylor $P_2(x)$ de orden 2,

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2,$$

se conoce como la *aproximación cuadrática*, ya que aproxima localmente a la función f por una parábola, de donde se originan las condiciones suficientes de segundo orden para definir la concavidad o convexidad de f en x_0.

Ejemplos:

1. Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = e^x$ alrededor de $x_0 = 0$, así como los polinomios de Taylor $P_0(x), P_1(x)$ y $P_2(x)$, correspondientes. Ilustra tus resultados gráficamente.

   La serie de Taylor alrededor de $x_0 = 0$ está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots .$$

   Como

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = e^x ,$$

   por lo tanto, para todo $n \geq 0$,

$$f^{(n)}(0) = 1.$$

   De esta manera, la serie de Taylor de $f(x) = e^x$ alrededor de $x_0 = 0$ es

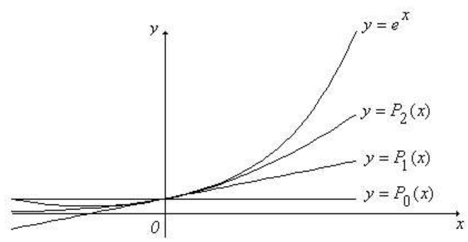
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

   En particular, nota que para $x = 1$ esta serie converge al número e, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2{,}718281828\ldots = e.$$

   Por último, los polinomios de Taylor $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$, correspondientes son las funciones

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}.$$



2. La funcióndistribución de probabilidad de Poisson está dada por $p(y) = \dfrac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda}$.

   Demuestra que $\sum_{y=0}^{\infty} p(y) = 1$.

   Se tiene

$$\sum_{y=0}^{\infty} p(y) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

3. Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = e^{-2x^2}$ alrededor de $x_0 = 0$, así como el polinomio de Taylor de orden 2, $P_2(x)$, correspondiente.
   Aquí conviene aprovechar los resultados del ejercicio 1, adaptando las expresiones obtenidas mediante la sustitución

$$x \longrightarrow -2x^2.$$

   En ese caso, la serie de Taylor de $f(x) = e^{-2x^2}$ alrededor de $x_0 = 0$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-2x^2\right)^n = 1 + \left(-2x^2\right) + \frac{\left(-2x^2\right)^2}{2!} + \frac{\left(-2x^2\right)^3}{3!} + \frac{\left(-2x^2\right)^4}{4!} + \cdots .$$

   Así, el polinomio de Taylor $P_2(x)$ correspondiente es

$$P_2(x) = 1 - 2x^2 + 2x^4.$$

4. Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = \ln x$ alrededor de $x_0 = 1$, así como el polinomio de Taylor $P_2(x)$ correspondiente.

   La serie de Taylor alrededor de $x_0 = 1$ está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\cdots .$$

   Como

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x \quad \rightarrow \quad f(1) = 0,\\
f'(x) &= \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f'(1) = 1,\\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad f''(1) = -1,\\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \quad \rightarrow \quad f'''(1) = 2,\\
f^{IV}(x) &= -\frac{2\cdot 3}{x^4} \quad \rightarrow \quad f^{IV}(1) = -2\cdot 3,\\
&\cdots
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, \\ f^{(n)}(1) &= (-1)^{n+1}(n-1)!, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

De este modo, para $n \geq 1$ se tiene

$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Así, la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$ alrededor de $x_0 = 1$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$

El polinomio de Taylor $P_2(x)$ de orden 2 es la función cuadrática

$$P_2(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}.$$

5. Se deja como ejercicio para el lector demostrar que, alrededor de $x_0 = 0$, la serie de Taylor generada por la función $f_1(x) = \cos x$ es

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots ,$$

y la serie de Taylor generada por la función $f_2(x) = \operatorname{sen} x$ es

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots .$$

Así, por ejemplo, los polinomios de Taylor correspondientes de orden 3 son las funciones $1 - \frac{x^2}{2!}$ y $x - \frac{x^3}{3!}$, respectivamente.

El polinomio de Taylor puede constituir una aproximación razonable al valor de una función en un punto dado x cercano al centro de la aproximación x_0. Para estudiar las condiciones para que esto suceda se analiza el error $f(x) - P_n(x)$ cometido al aproximar la función f por el polinomio P_n en el punto x. Con este fin, se define el n-ésimo residuo de Taylor R_n como

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - P_n(x) \\ &= f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right). \end{aligned}$$

El teorema de Taylor a continuación proporciona una manera de estimar teóricamente el residuo u error R_n y, por tanto, la precisión involucrada al reemplazar f por P_n.

Teorema de Taylor. Sea n un entero no negativo, y suponga que la derivada $f^{(n+1)}(x)$ existe para cada x en un intervalo abierto I que contiene al punto x_0. Entonces, para cada $x \neq x_0$ en I existe un número c entre x_0 y x tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

con

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

La primera igualdad se conoce como la fórmula de Taylor, y la segunda es la fórmula de Lagrange para estimar el residuo o error correspondiente.

En particular, para $n = 0$ este teorema establece que existe c entre x_0 y x tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0),$$

que es el conocido teorema del valor medio (TVM) para funciones derivables. De esta manera, el teorema de Taylor es una generalización del TVM, que en lugar de la derivada f' involucra $n + 1$ derivadas de f.

Del teorema de Taylor se sigue que la serie de Taylor generada por una función f alrededor de x_0 converge a la función f en I sólo si

$$R_n(x) \to 0$$

cuando $n \to \infty$, para toda $x \in I$. Asimismo, la expresión correspondiente a este residuo establece que existe un valor c entre x_0 y x que juega el papel de representante de toda la infinidad de términos que han sido excluídos al truncar la serie a un orden finito n, es decir,

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x - x_0)^{n+2} + \cdots .$$

La fórmula de Taylor te garantiza su existencia, pero no su valor. Sin embargo, con frecuencia es posible estimar R_n sin conocer el valor de c, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

1. Aproxima el número e mediante un polinomio de Taylor de orden $n = 4$ y luego estima el error correspondiente.

   Para aproximar el número e a orden $n = 4$ partimos del polinomio $P_4(x)$ generado por la función $f(x) = e^x$ alrededor de $x_0 = 0$,

$$e^x \approx P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$

De esta manera,

$$e \approx P_4(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2.7083.$$

Para estimar el error cometido, utilizamos la fórmula del residuo correspondiente,

$$R_4(1) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(1-0)^5 = \frac{e^c}{5!},$$

con c entre 1 y 0. En este intervalo,

$$1 < e^c < e < 3,$$

de donde

$$R_4(1) = \frac{e^c}{5!} < \frac{3}{5!} = 0.025$$

En otras palabras, al aproximar e por 2.7083 estamos cometiendo un error máximo de 0.025. Este resultado concuerda con el valor conocido $e = 2.7183$.

2. Determina de qué grado n debe ser el polinomio de Taylor que debe utilizarse para estimar e con un error menor que 10^{-6}.

   Buscamos el valor de n tal que satisfaga la condición

   $$R_n(1) < 10^{-6}.$$

   Sabemos que, a orden n, el error está dado por

   $$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!},$$

   con $0 \leq c \leq 1$. Así, el error más grande ocurre en $c = 1$, de modo que

   $$\frac{e}{(n+1)!} < 10^{-6},$$

   lo cual ocurre si $n \geq 9$. Concluimos que una aproximación de orden 9 es suficiente para garantizar que el error cometido sea menor que 10^{-6}. En efecto, a este orden,

   $$e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2.718281526,$$

   que difiere del valor exacto, $e = 2.718281828$, en el séptimo dígito.

3. Utiliza el polinomio de Taylor de orden 1 para calcular $\int_0^{0.3} e^{x^2}\,dx$.

   Para valores de x cercanos a $x_0 = 0$ se tiene

   $$e^x \simeq P_1(x) = 1 + x,$$

   de modo que

   $$e^{x^2} \simeq 1 + x^2.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{0.3} e^{x^2} dx \simeq \int_0^{0.3} (1+x^2)\, dx = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^{0.3} = 0.309\ .$$

Se observa que en este caso la aproximación $e^x \simeq P_1(x)$ es bastante adecuada, tomando en cuenta que $\int_0^{0.3} e^{x^2} dx = 0.30925$.

Por último, el desarrollo en series de Taylor también es válido para funciones de varias variables. Aquí discutiremos muy brevemente el concepto de series de Taylor para funciones $z = f(x,y)$ de dos variables.

Definición. Sea f una función con derivadas parciales de todos los órdenes en algún intervalo que contenga al punto (x_0, y_0) como punto interior. La *serie de Taylor generada por f alrededor de* $(x,y) = (x_0, y_0)$ es

$$\begin{aligned} & f(x_0,y_0) + f_{\,x}(x_0,y_0)(x-x_0) + f_{\,y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ & + \frac{1}{2!}\left[f_{\,xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{\,xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{\,yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \right] \\ & + \cdots + \frac{1}{k!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right]^k f \Bigg|_{(x_0,y_0)} + \cdots\ . \end{aligned}$$

La notación $\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right]$ significa aplicar k veces ese operador a la función f, y posteriormente evaluar las derivadas parciales correspondientes de orden k en el punto (x_0, y_0).

El polinomio de Taylor $P_1(x,y)$ de orden 1 o *aproximación lineal* es la función

$$P_1(x,y) = f(x_0,y_0) + f_{\,x}(x_0,y_0)(x-x_0) + f_{\,y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

conocida como la *linealización* de f en ese punto, que representa la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$. Introduciendo notación vectorial, este polinomio puede escribirse como

$$P_1(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}_0) + \nabla f(\overrightarrow{x}_0)^T\, (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0)\, ,$$

donde $\overrightarrow{x}$ y $\overrightarrow{x}_0$ son los vectores columna

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

$(\ )^T$ denota el vector transpuesto y $\nabla f(\overrightarrow{x}_0)$ es el vector gradiente de f en el punto (x_0, y_0). Asimismo, el polinomio de Taylor $P_2(x, y)$ de orden 2, o *aproximación cuadrática,* está dado por

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_{\,x}(x_0,y_0)(x-x_0) + f_{\,y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[f_{\,xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{\,xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{\,yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right], \end{aligned}$$

y representa la ecuación del paraboloide que es tangente a la superfice en ese punto y posee su misma concavidad. En notación compacta, se tiene

$$P_2(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}_0) + \nabla f(\overrightarrow{x}_0)^T (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0) + \frac{1}{2!}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0)^T H(\overrightarrow{x}_0)(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0),$$

con

$$H(\overrightarrow{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{\,xx}(x_0,y_0) & f_{\,xy}(x_0,y_0) \\ f_{\,xy}(x_0,y_0) & f_{\,yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

la matriz hessiana de f en el punto (x_0, y_0). Omitimos aquí los polinomios $P_n(x, y)$ de orden $n \geq 3$, por carecer éstos de interés práctico.

Ejemplos:

1. Encuentra $P_2(x, y)$ para $f(x, y) = e^{2x-y}$ alrededor de $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

   Como el polinomio $P_2(x, y)$ alrededor de $(x_0, y_0) = (0, 0)$ es

$$P_2(x,y) = f(0,0) + f_{\,x}(0,0)x + f_{\,y}(0,0)y + \frac{1}{2!}\left[f_{\,xx}(0,0)x^2 + 2f_{\,xy}(0,0)xy + f_{\,yy}(0,0)y^2\right],$$

   con

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{2x-y} &\to\quad & f(0,0) = 1, \\ f_x(x,y) &= 2e^{2x-y} &\to\quad & f_x(0,0) = 2, \\ f_y(x,y) &= -e^{2x-y} &\to\quad & f_y(0,0) = -1, \\ f_{xx}(x,y) &= 4e^{2x-y} &\to\quad & f_{xx}(0,0) = 4, \\ f_{xy}(x,y) &= -2e^{2x-y} &\to\quad & f_{xy}(0,0) = -2, \\ f_{yy}(x,y) &= e^{2x-y} &\to\quad & f_{yy}(0,0) = 1 \end{aligned}$$

   por lo tanto,

$$P_2(x,y) = 1 + 2x - y + \frac{1}{2!}\left(4x^2 - 4xy + y^2\right).$$

2. Encuentra $P_2(x, y)$ para $f(x, y) = y^3 e^{x+2}$ alrededor de $(x_0, y_0) = (-2, 1)$.

   Como el polinomio $P_2(x, y)$ alrededor de $(x_0, y_0) = (-2, 1)$ es

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(-2,1) + f_{\,x}(-2,1)(x+2) + f_{\,y}(-2,1)(y-1) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[f_{\,xx}(-2,1)(x+2)^2 + 2f_{\,xy}(-2,1)(x+2)(y-1) + f_{\,yy}(-2,1)(y-1)^2\right], \end{aligned}$$

con

$$\begin{array}{rcl}
f(x,y) &=& y^3e^{x+2} \quad \to \quad f(-2,1)=1, \\
f_x(x,y) &=& y^3e^{x+2} \quad \to \quad f_x(-2,1)=1, \\
f_y(x,y) &=& 3y^2e^{x+2} \quad \to \quad f_y(-2,1)=3, \\
f_{xx}(x,y) &=& y^3e^{x+2} \quad \to \quad f_{xx}(-2,1)=1, \\
f_{xy}(x,y) &=& 3y^2e^{x+2} \quad \to \quad f_{xy}(-2,1)=3, \\
f_{yy}(x,y) &=& 6ye^{x+2} \quad \to \quad f_{yy}(-2,1)=6,
\end{array}$$

por lo tanto,

$$P_2(x,y)=1+(x+2)+3(y-1)+\frac{1}{2!}\left[(x+2)^2+6(x+2)(y-1)+6(y-1)^2\right].$$

Apéndice A

Integración tabular

Las integrales de productos de polinomios con funciones trascendentes pueden involucrar polinomios de grados altos, que conllevan cálculos demasiado laboriosos al aplicar la fórmula de la integral por partes. En tales casos se utiliza la regla conocida como integración tabular.

La regla consiste en derivar la funciones polinomiales hasta llegar a cero, y a su vez integrar la funciones trascendentes tantas veces como se derivó la otra función. Colocando las derivadas e integrales correspondientes lado a lado en una tabla, se realizan los productos de cada derivada con la integral del siguiente renglón, alternando el signo de. El resultado de la integral es la suma de esos productos. El método funciona bien con funciones exponenciales, hiperbólicas, senos y cosenos.

Ejemplo:

Calculemos $\int x^3 e^{ax} dx$. Para ello, definimos $f(x) = x^3$ y $g(x) = e^{ax}$. Se tiene

Signos alternados		$f(x)$ y sus derivadas		$g(x)$ y sus integrales
$+$	$\longrightarrow$	x^3		e^{ax}
			$\searrow$	
$-$	$\longrightarrow$	$3x^2$		$\frac{1}{a}e^{ax}$
			$\searrow$	
$+$	$\longrightarrow$	$6x$		$\frac{1}{a^2}e^{ax}$
			$\searrow$	
$-$	$\longrightarrow$	6		$\frac{1}{a^3}e^{ax}$
			$\searrow$	
$+$	$\longrightarrow$	0		$\frac{1}{a^4}e^{ax}$

De esta manera,

$$\int x^3 e^{ax} dx = x^3 \left(\frac{1}{a} e^{ax} \right) - 3x^2 \left(\frac{1}{a^2} e^{ax} \right) + 6x \left(\frac{1}{a^3} e^{ax} \right) - 6 \left(\frac{1}{a^4} e^{ax} \right) + C.$$

Así,

$$\int x^3 e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^3 e^{ax} - \frac{3}{a^2} x^2 e^{ax} + \frac{6}{a^3} x e^{ax} - \frac{6}{a^4} e^{ax} + C.$$

Compara la sencillez de la integración tabular anterior, con una integración paso a paso para esa misma función:

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^{ax} dx &= (x^3)\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) - \int (3x^2)\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) dx \\
&= \frac{1}{a}x^3 e^{ax} - \frac{3}{a}\int x^2 e^{ax} dx \\
&= \frac{1}{a}x^3 e^{ax} - \frac{3}{a}\left[(x^2)\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) - \int (2x)\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) dx\right] \\
&= \frac{1}{a}x^3 e^{ax} - \frac{3}{a^2}x^2 e^{ax} + \frac{6}{a^2}\int x e^{ax} dx \\
&= \frac{1}{a}x^3 e^{ax} - \frac{3}{a^2}x^2 e^{ax} + \frac{6}{a^2}\left[(x)\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) - \int \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) dx\right] \\
&= \frac{1}{a}x^3 e^{ax} - \frac{3}{a^2}x^2 e^{ax} + \frac{6}{a^3}x e^{ax} - \frac{6}{a^3}\int e^{ax} dx \\
&= \frac{1}{a}x^3 e^{ax} - \frac{3}{a^2}x^2 e^{ax} + \frac{6}{a^3}x e^{ax} - \frac{6}{a^4}e^{ax} + C.
\end{aligned}$$

Apéndice B

Teorema del valor medio de Cauchy. Demostración de la regla de L'Hopital

Para demostrar la regla de L'Hopital primero hay que demostrar el teorema del valor medio de Cauchy, que se enuncia a continuación (tomado del texto de Thomas-Finney).

Teorema del valor medio de Cauchy. Suponga que f y g son continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b). Suponga también que $g'(x) \neq 0$ en (a,b). Entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Demostración:

Primero demostraremos que $g(b) \neq g(a)$, de la siguiente manera. Si $g(b) = g(a)$, entonces el teorema del valor medio nos daría $g'(c) = \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} = 0$, para alguna $c \in (a,b)$. Pero esto contradice la hipótesis de que $g'(x) \neq 0$ en (a,b).

Por otra parte, define la función

$$F(x) = [f(x)-f(a)] - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right][g(x)-g(a)].$$

Esta función es continua y diferenciable en los puntos donde f y g lo son, con

$$F'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right] g'(x).$$

Como $F(b) = F(a) = 0$, por el teorema del valor medio existe un número c entre a y b para el que $F'(c) = 0$, esto es,

$$F'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right] g'(c) = 0,$$

de donde

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Observa que este teorema se reduce al teorema del valor medio cuando $g(x) = x$.

Regla de L'Hopital (forma fuerte)

Suponga que $f(a) = g(a) = 0$ y que f y g son diferenciables en un intervalo abierto I que contenga al punto a. Suponga también que $g'(x) \neq 0$ en I, para todo $x \neq a$. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración:

Primero establecemos la ecuación del límite para el caso $x \to a^+$. Supongamos que x está a la derecha de a. Entonces $g'(x) \neq 0$ y aplicamos el teorema del valor medio de Cauchy al intervalo $[a, x]$. Este paso produce un número c entre a y x tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

Pero $f(a) = g(a) = 0$, de modo que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Cuando x se aproxima a a, c se aproxima a a, ya que c siempre está entre a y x. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

que establece la regla de L'Hopital para el caso donde x se aproxima a a por la derecha. El caso donde x se aproxima a a por la izquierda se obtiene al aplicar el teorema del valor medio de Cauchy al intervalo $[x, a]$, con $x < a$. En ese caso,

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^-} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Juntando los dos resultados anteriores, concluimos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bibliografía

1. O. Estrada, P. García y Colomé, G. Monsivais, Cálculo Vectorial y Aplicaciones, Grupo Editorial Iberoamérica, 2003.
2. J. E. Marsden, A.J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, 5a. edición, Pearson, 2004.
3. C.P. Simon, L. Blume, *Mathematics for Economists*, Norton, 1994.
4. K. Sydsaeter, P.J. Hammond, A. Carvajal, *Matemáticas para el Análisis Económico*, Pearson, 2a. edición, 2012.
5. K. Sydsaeter, P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, 2nd. edition, Prentice Hall, 2006.
6. K. Sydsaeter, P.J. Hammond, A. Seierstad, A. Strom, *Further Mathematics for Economic Analysis*, 2nd. edition, Prentice Hall, 2008.
7. G.B. Thomas, R.L. Finney, *Cálculo*, Vols. I y II, 12a. edición, Adisson Wesley, 2004.
8. A.C. Chiang, *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*, 3a. edición, McGraw-Hill Interamericana de México, 1987.
9. M.J. Osborne, *Mathematical Methods for Economic Theory: A Tutorial*, http://www.economics.utoronto.ca/osborne/MathTutorial, 2007.
10. R.G. Bartle, *Introducción al Análisis Matemático de una Variable*, 2a. edición, Limusa Wiley, 1996.
11. T.M. Apostol, *Calculus,* Vol. II, 2nd. edition, Wiley International Edition, 1969.